ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 4, 1983 Математика

УДК 517.51

М. Ж. ГРИГОРЯН

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ РЯДОВ ФУРЬЕ—УОЛША СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

Д. Е. Меньшовым доказаны следующие теоремы (см. [1], [2]).

Теорема 1. (Д. Е. Меньшов). *Пусть $f(x)$ — измеримая функция конечная почти всюду на $[0,2\pi]$. Какого бы ни было $\varepsilon>0$ можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E, $|E|^*>2\pi-\varepsilon$ и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на* $[0, 2\pi]$.

Теорема 2. (Д. Е. Меньшов). *Пусть $f(x)$ — любая суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция и $Q\subset[0, 2\pi]$ — любое совершенное нигде не плотное множество.*

Тогда можно найти такую суммируемую функцию $g(x)$, что $g(x)=f(x)$ на Q и ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду.

Р. И. Осипов [3] и А. М. Зубаки [4] доказали справедливость теорем 1 и 2 для системы Уолша.

Более сильный результат получил Прайс [5]:

Пусть заданы две последовательности натуральных чисел $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$: $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, которые удовлетворяют условиям

$$p_1<q_1<\cdots<p_k<q_k<\cdots;\ \lim_{k\to\infty}\frac{q_k}{p_k}=+\infty.$$

Тогда для любой измеримой функции $f(x)$ и любого $\varepsilon>0$ существует такая функция $g(x)$, что

a) $|\{x\in[0,1]: f(x)\neq g(x)\}|<\varepsilon$,

в) *ряд Фурье—Уолша функции $g(x)$ равномерно сходится на* $[0, 1]$,

c) $a_k(g)=0$, *при* $q_l<k\leqslant p_{l+1}$: $l=1, 2,\cdots$ (*где* $a_k(g)$ — *коэффициенты Фурье функции $g(x)$ по системе Уолша*).

Аналогичная теорема для систем типа (χ)* установлена Ф. Г. Арутюняном [6].

В наших дальнейших рассуждениях будем считать что возрастающая подпоследовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$; $\lim\limits_{k\to\infty}(N_{2k}-N_{2k-1})=+\infty$ фиксирована, и рассмотрим подсистему

---

* Через $|E|$ обозначена мера Лебега множества E.

** Определение систем (χ) см. в работе [7].

$$\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}=\{W_m(x);\ m=N_{2k-1},\cdots,N_{2k}:\ k=1,2,\cdots,$$

$$\lim_{k\to\infty}(N_{2k}-N_{2k-1})=\infty\},\tag{1}$$

(где $\{W_m(x)\}$ — система Уолша—Пэли).

Доказывается следующая

Теорема. *Пусть даны: подсистема* (1), *положительное число* $\varepsilon>0$. *Тогда существует измеримое множество* E_ε; $|E_\varepsilon|>1-\varepsilon$ *со свойством: для любой функции* $f(x)\in L$ *можно найти такую функцию* $g(x)\in L[0,1]$, *что* $g(x)=f(x)$ *на* E_ε *и ряд Фурье функции* $g(x)$ *по системе* (1) *сходится к ней почти всюду.*

Здесь же отметим, что а) подсистема (1) является системой представления функций класса $S_{[0,1]}$; ($S_{[0,1]}$ — класс почти везде конечных измеримых функций), сходящимися почти всюду рядами $\sum_{k=1}^{\infty}a_k W_{n_k}(x)$ (см. [6]),

б) подсистема (1) является системой представления функций класса $L^p[0,1]$, $0<p<1$, сходящимися в той же метрике рядами $\sum_{k=1}^{\infty}a_k W_{n_k}(x)$ (см. [8]).

§ 2. Доказательства основных лемм

Сначала приведем определение системы Уолша-Пэли $\{W_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (см. [9])

$$W_0(x)\equiv 1;\ W_n(x)=\prod_{s=1}^{k}r_{m_s}(x),\ n=\sum_{s=1}^{k}2^{m_s}:\ m_s>m_{s+1},\tag{2}$$

где $\{r_k(x)\}$ — система Радемахера

$$r_0(x)=\begin{cases}1;\ x\in[0,\ 1/2]\\-1;\ x\in(1/2,\ 1]\end{cases}$$

$$r_0(x+1)=r_0(x);\ r_k(x)=r_0(2^k\cdot x)\ k=1,2,\cdots.$$

Введем некоторые обозначения. Разобьем сегмент [0,1] на 2^m равных частей и обозначим эти отрезки через $\Delta_m^{(i)}$, $i\leqslant 2^m$. Положим

$$S_n(x,f)=\sum_{k=1}^{n}a_k W_k(x),\ \text{где}\ a_k(f)=\int_0^1 f(x)\cdot W_k(x)\,dx\tag{3}$$

и

$$\delta_k(x,f)=S_{2^{k+1}}(x,f)-S_{2^k}(x,f).\tag{4}$$

Мы будем пользоваться следующими свойствами системы $\{W_k(x)\}$ (см. [10] и [11])

$$S_n(x,f)\cdot W_n(x)=\delta_{m_1}(x,W_n\cdot f)+\cdots\delta_{m_k}(x;W_m f),\tag{5}$$

$$\text{если}\ n=2^{m_1}+\cdots+2^{m_k},\ m_1>m_2>\cdots),$$

$$S_{2^k}(x, f) = \frac{1}{|\Delta_k^{(i)}|} \int_{\Delta_k^{(i)}} f(t)\,dt, \text{ при } x \in \Delta_k^{(i)};\ i \leqslant 2^k. \tag{6}$$

Учитывая соотношения (4)—(6) для $\delta > 0$, $f(x) \equiv 0$, $x \overline{\in} \Delta_k^{(i)}$, получим

$$|S_n(x, f)| < \frac{2}{\delta} \int_{\Delta_{k_1}^{(i)}} |f(x)|\,dx;\ x \overline{\in} \left[\frac{i-1}{2^{k_1}} - \delta;\ \frac{i}{2^{k_1}} + \delta\right] \tag{7}$$

$$(n = 1, 2, \cdots;\ k = 1, 2, \cdots,\ 1 \leqslant i \leqslant 2^k);\ f(x) \in L.$$

Лемма 1. *Пусть даны: интервал* $\Delta = [\alpha, \beta] \equiv \Delta_m^{(i)}$, *действительные числа* $\gamma \neq 0$, $\delta > 0$, *натуральные числа* $l > 1$, $\{p_k\}_{k=1}^{\nu}$, $p_1 > 2^m$, $p_k > 3\,p_{k-1}$, $k = 1, 2, \cdots, \nu$. *Тогда существуют измеримое множество* G *и полином* $\sum_{k=1}^{m_0} a_k W_k(x)$ *по системе Уолша такие, что*

1. $$\sum_{k=1}^{m_0} a_k W_k(x) \equiv 2^{\nu} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta_\nu'}(x),\ x \in [0,1],$$

2. $$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k W_k(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} 2^l \cdot |\gamma|, \text{ при } x \in G \\ 2 \cdot \delta^{-1} \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|, \text{ при } x \overline{\in} [\alpha - \delta, \beta + \delta] \end{cases},\ n = 1, 2, \cdots,$$

3. $$\Delta_\nu' \subset G \subseteq [0,1];\ |G| > |\Delta|\,(1 - 2^{-l}),\ G \equiv \Delta \text{ при } \nu \leqslant l,$$

если $\nu > l$, *то множество* G *зависит только от чисел* $p_1 < \cdots < p_l$ *и не зависит от* $p_{l+1}, \cdots, p_\nu$.

Доказательство. Положим

$$g(x) = 2^{\nu} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta_\nu'}(x), \tag{8}$$

$$a_k = \int_0^1 g(x)\, W_k(x)\,dx,\ m_k = [\log_2 p_k],\ k = 1, \cdots, \nu. \tag{9}$$

Ясно, что начиная с некоторого номера m_0, $a_k \equiv 0$, $k > m_0$, следовательно

$$S_{m_0}(x, g) = \sum_{k=1}^{m_0} a_k W_k(x) \equiv 2^{\nu} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta_\nu'}(x). \tag{10}$$

Так как $|\Delta_\nu'| = 2^{-\nu} \cdot |\Delta|$, из (8) будем иметь

$$\int_{\Delta} g(x)\,dx = \gamma \cdot |\Delta| = \gamma \cdot 2^{-m}.$$

Отсюда и из (7) вытекает

---

* $\Delta_\nu' = \Delta_1^- \cap \cdots \cap \Delta_\nu^-$, где $\Delta_k^- = \{x \in \Delta,\ W_{p_k}(x) = -1\}$ и $\chi_{\Delta_\nu'}(x)$ — характеристическая функция множества Δ_ν'.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k W_k(x)\right| < \frac{2|\gamma||\Delta|}{\delta}, \quad x\in[\alpha-\delta, \beta+\delta]; \ n=1, 2, \cdots.$$

Пусть $\Delta_\nu' = \sum_{s=1}^{2^q} \Delta_{m_\nu}^{(l_s)}$ и $\{\Delta_N^{(j_s)}\}_{s=1}^{2^q}$ — интервалы, которые удовлетворяют условиям

$$\Delta_N^{(j_s)} \supset \Delta_{m_\nu}^{(l_s)}, \ s=1, 2, \cdots, 2^q, \tag{11}$$

где

$$N=q+m+l. \tag{12}$$

Положим

$$G=\Delta \setminus \sum_{s=1}^{2^q} \Delta_N^{(j_s)}. \tag{13}$$

Ясно, что

$$\Delta_\nu' \subset G \subset \Delta, \ |G| > |\Delta|\cdot[1-2^q\cdot 2^{-q-l}] = 2^{-m}[1-2^{-l}]. \tag{14}$$

Докажем, что на множестве G частичные суммы $S_n(x, g)$ удовлетворяют условию 2. леммы. Для этого нам нужно оценить частичные суммы вида $S_{2^k}(x, W_n g)$.

Из определения функции $g(x)$ следует, что

если $g(x) \not\equiv 0$ на $\Delta_{m_s}^{(l)}$, то $\int\limits_{\Delta_{m_s}^{(l)}} g(t)\,dt = \int\limits_{\Delta_{m_s-1}^{(j)}} g(t)\,dt$, где $\Delta_{m_s-1}^{(j)} \supset \Delta_{m_s}^{(l)}$. (15)

Отсюда и из (8) вытекает, что при $m_{s-1} \leqslant k < m_s$ выполнено одно из следующих условий:

$$\frac{1}{|\Delta_k^{(l)}|}\int\limits_{\Delta_k^{(l)}} g(t)\,dt = 2^{s-1}\cdot\gamma \tag{16}$$

или

$$\int\limits_{\Delta_k^{(l)}} g(t)\,dt = 0,$$

следовательно, ввиду того, что

$$W_n(x+j\cdot 2^{-k}) = W_n(x),$$

при $x\in\Delta_k^{(l)}$, $j=1, 2, \cdots$ (17)

или

$$W_n(x+j\cdot 2^{-k}) = -W_n(x),$$

имеем

$$\left|\frac{1}{\Delta_k^{(l)}}\right|\left|\int\limits_{\Delta_k^{(l)}} g(t)\cdot W_n(t)\,dt\right| = 2^{s-1}\cdot|\gamma| \tag{18}$$

или

$$\int\limits_{\Delta_k^{(l)}} g(t)\, W_n(t)\,dt = 0,$$

и если удовлетворяется второе равенство при $g(x) \not\equiv 0$ на $\Delta_k^{(i)}$, то для всех $k' \leqslant k$ и $i \leqslant 2^{k'}$

$$\int\limits_{\Delta_{k'}^{(i)}} g(t)\, W_n(t)\, dt = 0. \tag{19}$$

Пусть i_0 и k_0 — наименьшие из тех чисел i, k, для которых

$$\left| \int\limits_{\Delta_k^{(i)}} g(t)\, W_n(t)\, dt \right| > 0.$$

Из условий (6), (8), (17) и из выбора i_0 и k_0 имеем

a) $\left| \int\limits_{\Delta_{k_0}^{(i)}} W_n(x)\, g(x)\, dx \right| = \left| \int\limits_{\Delta_{k_0}^{(i_0)}} W_n(x)\, g(x)\, dx \right| > 0$, если $g(x) \not\equiv 0$ на $\Delta_{k_0}^{(i)}$,

в) $S_{2^{k_2}}(x, W_n g) = S_{2^{k_1}}(x, W_n g)$, $x \in \Delta_{k_1}^{(i)}$, $k_2 > k_1 > k_0$,

$$(m_s > k_2 > k_1 \geqslant m_{s-1})$$

c) $S_{2^{k_1}}(x, W_n g) \equiv 0$, при $x \in [0, 1]$, для $k < k_0$.

Учитывая соотношения (5), (18), в) с), при $n = 2^{s_1} + \cdots + 2^{s_p}$ получим

$$|S_n(x, g)| = \left| \sum_{j=1}^{p} \delta_{s_j}(x, W_n g) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s_j < k_0 - 1} |S_{2^{s_j+1}}(x, W_n g) - S_{2^{s_j}}(x, W_n g)| + |S_{2^{k_0}}(x, W_n g) -$$

$$- S_{2^{k_0-1}}(x, W_n g)| +$$

$$+ \sum_{s_j \in \{m_k - 1\}_{k=1}^{\nu}} |S_{2^{s_j+1}}(x, W_n g) - S_{2^{s_j}}(x, W_n g)| + \sum_{k=1}^{\nu} |\delta_{m_k - 1}(x, W_n g)| =$$

$$= 0 + 0 + |\delta_{k_0}(x, W_n g)| + \sum_{s_j < N} |\delta_{s_j}(x, W_n g)| + \sum_{s_j > N} |\delta_{s_j}(x, W_n g)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{l} 2^{j-1} |\gamma| + \sum_{s_j > N} |\delta_{s_j}(x, W_n g)|. \tag{20}$$

Ввиду того, что при $k \geqslant N$ интервалы $\Delta_k^{(i)}$ либо лежат на G либо на $\Delta \setminus G$ (см. (12), (13)), то из условий (4), (6), (8) будем иметь

$$\delta_k(x, W_n g) = 0 \text{ для } x \in G,$$

следовательно, учитывая (20), получим

$$|S_n(x, g)| < 2^l |\gamma|, \text{ при } x \in G,\ n = 1, 2, \cdots.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть даны: интервал* $\Delta=[\alpha,\beta]\equiv\Delta_m^{(i)}$, *числа* $\gamma\neq0$, k_0, $\varepsilon>0$, $\delta>0$, $l>2$. *Тогда сутествуют множества* G *и* E *и полином по системе* (1) *вида*

$$\sum_{k=k_0}^{q_0} c_k\,W_{n_k}(x),$$

которые удовлетворяют условиям

1) $$\sum_{k=1}^{q} c_k\,W_{n_k}(x)=\begin{cases}\gamma, & \text{при } x\in E\\ 0, & \text{вне } [\alpha,\beta],\end{cases}$$

2) $$\int_\alpha^\beta\left|\sum_{k=k_0}^{q_0} c_k\,W_{n_k}(x)\right|dx\leqslant|\gamma|\cdot|\Delta|,$$

3) $$\left|\sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x)\right|\leqslant\begin{cases}2^{l+1}\cdot|\gamma|, & x\in G\\ \dfrac{2|\gamma|\,|\Delta|}{\delta}, & x\overline{\in}[\alpha-\delta,\beta+\delta]\end{cases},\quad k_0\leqslant s\leqslant q_0,$$

4) $$G\subset E\subset[\alpha,\beta],\ |G|>|\Delta|\,(1-2^{-l}),\ |E|>(1-\varepsilon)\,|\Delta|.$$

Доказательство. Возьмем натуральное число ν_0 настолько большим, чтобы

$$2^{-\nu_0}<\min\{\varepsilon,\ 2^{-l}\}. \tag{21}$$

Коэффициенты Фурье—Уолша функции $\gamma\cdot\chi_\Delta(x)$ обозначим через a_k. Очевидно, что существует натуральное число m_0 такое, что $a_k=0$ при $k>m_0$, следовательно

$$S_n(x,\ \gamma\chi_\Delta(x))=\sum_{k=1}^{n} a_k\,W_k(x)\equiv\gamma\cdot\chi_\Delta(x),\ n>m_0. \tag{22}$$

Легко видеть, что (см. (4)—(6))

$$S_n(x,\ \gamma\cdot\chi_\Delta(x))<4\,|\gamma|\ \text{для всех } n, \text{ и } x\in[0,1]. \tag{23}$$

Из определения системы Уолша и из того, что $\lim\limits_{k\to\infty}(N_{2k}-N_{2k-1})=+\infty$ следует существование натуральных чисел m_1, k_1, для которых имеют место соотношения

$$W_{m_1}(x)\cdot W_k(x)=W_{m_1+k}(x),\ n_{k_0}<N_{2k_1-1}<m_1+k\leqslant N_{2k_1},\ k\leqslant m_0. \tag{24}$$

Определим действительные числа $\{b_j\}_{j=N_{2k_1-1}}^{N_{2k_1}}$ следующим образом;

$$b_j=\begin{cases}a_k, & \text{если } j=m_1+k,\ k=1,\cdots,m_0\\ 0, & \text{при } j\overline{\in}[m_1,\ m_1+m_0].\end{cases} \tag{25}$$

Из (22), (23) имеем

$$W_{m_1}(x)\cdot\sum_{k=1}^{m_0} a_k\,W_k(x)\equiv\sum_{j=N_{2k_1-1}}^{N_{2k_1}} b_j\,W_j(x)=\gamma\cdot\chi_{\Delta_1^+}(x)-\gamma\chi_{\Delta_1^-}(x), \tag{26}$$

$$\left| \sum_{j=N_{2k_i-1}}^{s} b_j W_j(x) \right| < 4|\gamma|, \quad N_{2k_i-1} < s \leqslant N_{2k_i} \tag{27}$$

где

$$\Delta_1^{+} = \{x \in \Delta, \ W_{m_1}(x) = +1\}; \ \Delta_1^{-} = \{x; \ W_{m_1}(x) = -1\}.$$

Предположим, что определены числа $m_1 < \cdots < m_\nu$; $\nu < \nu_0$, полиномы

$$\sum_{j=N_{2k_i}-1}^{N_{2k_i}} b_j W_j(x), \ i = 1, \cdots, \nu$$

и множества G_j, Δ_j^{+}, Δ_j^{-}, $j \leqslant \nu$, для которых справедливы

$$\sum_{j=N_{2k_i}-1}^{N_{2k_i}} b_j W_j(x) = 2^{i-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta_i'}(x) \cdot W_{m_i}(x), \ i < \nu, \tag{28}$$

$$\left| \sum_{j=N_{2k_i}-1}^{s} b_j \cdot W_j(x) \right| \leqslant \begin{cases} 2^{i-1} \cdot |\gamma|, & x \in G_i \\ \dfrac{2|\gamma|\,|\Delta|}{\delta}, & x \overline{\in} [\alpha - \delta, \beta + \delta]) \end{cases} N_{2k_i-1} < s \leqslant N_{2k_i}, \tag{29}$$

$$G_i \equiv [0,1], \text{ при } i \leqslant l, \ G_i \equiv G_l, \text{ при } i > l, \tag{30}$$

где

$$\Delta_i' = \Delta_1^{-} \cap \cdots \cap \Delta_i^{-}, \ |\Delta_i'| = 2^{-i}|\Delta|. \tag{31}$$

Согласно лемме 1 определяются измеримое множество G_ν и полином $\sum_{k=1}^{s_\nu} a_k^{(\nu)} W_k(x)$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{s_\nu} a_k^{(\nu)} W_k(x) = 2^{\nu-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_\nu}(x), \ x \in [0,1], \tag{32}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{s} a_k^{(\nu)} \cdot W_k(x) \right| \leqslant \begin{cases} 2^{l} \cdot |\gamma|, & x \in G_\nu \\ \dfrac{2|\gamma|\,|\Delta|}{\delta}, & x \overline{\in} [\alpha - \delta, \beta + \delta], \end{cases} 1 < s \leqslant S_\nu, \tag{33}$$

$$G_\nu \equiv G_l, \text{ при } \nu > l, \ |G_l| > |\Delta|(1 - 2^{-l}). \tag{34}$$

Существуют натуральные числа $m_\nu > 3m_{\nu-1}$, $k_\nu > k_{\nu-1}$ и действительные числа $\{b_j\}_{j=N_{2k_\nu}-1}^{N_{2k_\nu}}$ такие, что

$$W_{m_\nu}(x) \cdot \sum_{k=1}^{s_\nu} a_k^{(\nu)} W_k(x) \equiv \sum_{j=N_{2k_\nu}-1}^{N_{2k_\nu}} b_j W_j(x); \ b_j = \begin{cases} a_k^{(\nu)}; & j = m_\nu + k \\ 0 & j \overline{\in} [m_\nu, m_\nu + s_\nu]. \end{cases}$$

Отсюда и из условий (32), (33) вытекает

$$\sum_{j=N_{2k_\nu}-1}^{N_{2k_\nu}} b_j W_j(x) = 2^{\nu-1} \cdot \gamma \cdot W_{m_\nu}(x) \cdot \chi_{\Delta'_{\nu-1}}(x), \tag{35}$$

$$\left|\sum_{j=N_{2k_\nu-1}}^{s} b_j W_j(x)\right| < \begin{cases} 2^l \cdot |\gamma|; & \text{при } x \in G \\ \dfrac{2|\gamma||\Delta|}{\delta}; & x \bar{\in} [\alpha-\delta, \beta+\delta] \end{cases}, \quad N_{2k_\nu-1} < s \leqslant N_{2k_\nu}. \tag{36}$$

Положим

$$\Delta_\nu^- = \{x \in \Delta,\ W_{m_\nu} = -1\},\ \Delta_\nu^+ = \{x \in \Delta,\ W_{m_\nu}(x) = +1\},\ \Delta_\nu' = \Delta_{\nu-1}' \cap \Delta_\nu^-. \tag{37}$$

Из условия $m_\nu > 3m_{\nu-1}$ вытекает, что на интервалах постоянства функции $W_{m_{\nu-1}}(x)$ множества Δ_ν^+, Δ_ν^- имеют одинаковые порции, следовательно

$$\Delta_\nu' = 2^{-\nu}|\Delta|. \tag{38}$$

Таким образом, будут определены полиномы

$$\sum_{j=N_{2k_\nu-1}}^{N_{2k_\nu}} b_j W_j(x),\ \nu=1, 2, \cdots, \nu_0,$$

числа $m_1, \cdots, m_{\nu_0}$, $m_\nu > 3m_{\nu-1}$, множества $\{G_\nu\}_{\nu=1}^{\nu_0}$ и $\{\Delta_\nu'\}_{\nu=1}^{\nu_0}$, такие, что для каждого ν, $1 \leqslant \nu < \nu_0$ удовлетворяются условия (34)—(38).

Очевидно, что для каждого ν имеет место равенство

$$\gamma \cdot \chi_\Delta(x) = \sum_{l=1}^{\nu} 2^{l-1}\gamma \cdot W_{m_l}(x)\,\chi_{\Delta_{l-1}'}(x) + 2^\nu \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta_\nu'}(x). \tag{39}$$

Покажем, что множества $E = \Delta \setminus \Delta_{\nu_0}'$; $G = G_l$ и полином

$$\sum_{k=k_0}^{q_0} c_k W_{n_k}(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \sum_{j=N_{2k_\nu}-1}^{N_{2k_\nu}} b_j W_j(x)\ (q_0 = N_{2k_{\nu_0}}) \tag{40}$$

удовлетворяют условиям леммы 2.

В самом деле, из условий (21), (32), (39) и (40) получим

$$\sum_{k=1}^{q_0} c_k W_{n_k}(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{при } x \in E \\ 0, & \text{вне } \Delta. \end{cases}$$

Из (35), (39) и (40) следует

$$\sum_{k=1}^{q_0} c_k W_{n_k}(x) = \gamma \cdot \chi_\Delta(x) - 2^{\nu_0}\gamma \cdot \chi_{\Delta_{\nu_0}'}(x).$$

Отсюда, поскольку $|\Delta_{\nu_0}'| = 2^{-\nu_0}|\Delta|$ (см. (38)) вытекает

$$\int_\alpha^\beta \left|\sum_{k=1}^{q_0} c_k W_{n_k}(x)\right| dx \leqslant \int_\alpha^\beta |\gamma \cdot \chi_\Delta(x)| dx + \int_\alpha^\beta |2^{\nu_0} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta_{\nu_0}'}(x)|\, dx \leqslant 2|\gamma||\Delta|,$$

т. е. условия 1) и 2) леммы 2 выполнены.

Теперь проверим выполнение условия 3) леммы 2. Пусть $1 \leqslant s \leqslant q_0$, тогда для некоторых ν', s', $1 \leqslant \nu' \leqslant \nu_0$, $N_{2k_{\nu'}-1} \leqslant s' \leqslant N_{2k_{\nu'}}$ имеем

$$\sum_{k=k_0}^{s'} c_k W_{n_k}(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu'-1} \sum_{j=N_{2k_\nu}-1}^{N_{2k_\nu}} b_j W_j(x) + \sum_{j=N_{2k_{\nu'}}-1}^{s'} b_j W_j(x). \qquad (41)$$

Учитывая условия (35), (36), (39) и (41) при $x \in G$, получим

$$\left| \sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x) \right| = \left| \gamma \cdot \chi_\Delta(x) - 2^{\nu'-1} \gamma \cdot \chi_{\Delta'_{\nu'-1}}(x) + \sum_{j=N_{2k_{\nu'}}-1}^{s'} b_j W_j(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\gamma| + 2^{\nu'-1} |\gamma| \cdot \chi_{\Delta'_{\nu'-1}}(x) + 2^l |\gamma|.$$

Отсюда, ввиду того, что $\Delta'_\nu \subset \Delta \setminus G$, если $\nu > l$, при $x \in G$ будем иметь

$$\left| \sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x) \right| < 2^{l+1} \cdot |\gamma|.$$

Из (35), (36), (41) вытекает

$$\left| \sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x) \right| < 2^{\delta-1} |\gamma| \cdot |\Delta|.$$

В силу (21), (34), (38) имеем

$|G| > |\Delta|(1-2^{-l})$, $|E| > |\Delta|(1-\varepsilon)$ (так как $G \equiv G_l$, $E = \Delta \setminus \Delta'_{\nu_0}$).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть даны: ступенчатая функция* $f(x) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \cdot \chi_{\Delta_k}(x)$ $\left(\textit{где } \Delta_k \textit{ имеют вид } \Delta_m^{(l)} \textit{ и } \int_0^1 |f| < 4^{-1} \right)$, *числа* $k_0 > 2$, $\varepsilon > 0$. *Тогда существуют множества* G, E *и полином по системе* (1) *вида* $\sum_{l=k_0}^{q} c_l W_{n_l}(x)$, *которые удовлетворяют условиям*

1. $$\sum_{k=k_0}^{q} c_k W_{n_k}(x) = f(x), \text{ при } x \in E,$$

2. $$\int_0^1 \left| \sum_{k=k_0}^{q} c_k W_{n_k}(x) \right| dx \leqslant 2 \int_0^1 |f(x)|\, dx,$$

3. $$\left| \sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x) \right| < \left[\int_0^1 |f(x)|\, dx \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot |f(x)| + \sqrt{\int_0^1 |f(x)| dx},$$

$$(x \in G; \quad k_0 < s \leqslant q),$$

4. $$|G| > 1 - \sqrt{\int_0^1 |f(x)|\, dx}, \quad |E| > 1 - \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть

$$\Delta_k=[b_k;\ b_{k+1}],\ \delta_k=\frac{1}{2}\left[\int_0^1|f(x)|\,dx\right]^{-1/2}\int_{\Delta_k}|f(x)|\,dx,\ k=1,\cdots,p, \tag{42}$$

$$l=2-\log_2\sqrt{\int_0^1|f(x)|\,dx}. \tag{43}$$

Положим

$$F=[0,1]\setminus\sum_{k=2}^{p}[b_k-\delta_k;\ b_k+\delta_{k+1}]. \tag{44}$$

Последовательным применением леммы 2 момно определить множества $G_k\subset E_k\subset\Delta_k$ и полиномы

$$\sum_{l=s_j}^{m_j}a_l W_{n_l}(x),\ 1\leqslant j\leqslant p,\ s_1=k_0,\ s_j<m_j, \tag{45}$$

$$s_{j+1}=1+m_j,$$

которые удовлетворяют условиям

$$\sum_{l=s_k}^{m_k}a_l W_{n_l}(x)=\begin{cases}\gamma_k, & \text{при } x\in E_k\\ 0, & \text{вне } \Delta_k\end{cases},\quad k=1,\cdots,p, \tag{46}$$

$$\int_0^1\left|\sum_{l=s_k}^{m_k}a_l W_{n_l}(x)\right|dx\leqslant 2\,|\gamma_k|\,|\Delta_k|, \tag{47}$$

$$\left|\sum_{l=s_k}^{s}a_l W_{n_l}(x)\right|\leqslant\begin{cases}2^l\cdot|\gamma_k|, & \text{при } x\in G_k\\ 2\cdot\delta_k^{-1}\cdot|\gamma_k|\cdot|\Delta_k|, & x\,\overline{\in}\,[b_k-\delta_k,\ b_{k+1}+\delta_k],\end{cases} \tag{48}$$

$$(s_k\leqslant s\leqslant m_k)$$

$$|G_k|>|\Delta_k|\,(1-2^{-l}),\ |E_k|>(1-\varepsilon)\,|\Delta_k|. \tag{49}$$

Положим

$$\sum_{k=k_0}^{q}c_k W_{n_k}(x)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=s_j}^{m_j}a_l W_{n_l}(x),\ q=m_p, \tag{50}$$

$$G'=\sum_{k=1}^{p}G_k;\ E=\sum_{k=1}^{p}E_k,\ F\cap G'=G. \tag{51}$$

Легко видеть, что полином (50) удовлетворяет условиям 1. и 2. леммы 3 (см. (46), (47) (51)). Из (44), (42), (49) и (51) следует

$$|G|>1-\sqrt{\int_0^1|f(x)|\,dx},\ |E|>1-\varepsilon. \tag{52}$$

Теперь проверим выполнение условия 3 леммы 3. Если $k_0<s\leqslant q$, то для некоторого j_0, $1<j_0\leqslant p$ имеем

$$\sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x) = \sum_{j=1}^{j_0-1} \sum_{l=s_j}^{m_j} a_l W_{n_l}(x) + \sum_{l=s_{j_0}}^{s} a_l W_{n_l}(x). \tag{53}$$

Ввиду того, что $G \subset E$ из условий (48), (46), (51), (53) при $x \in G$ получим

$$\left|\sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x)\right| = \left|\sum_{j=1}^{j_0-1} \gamma_j \cdot \chi_{\Delta_j}(x) + \sum_{l=s_{j_0}}^{s} a_l W_{n_l}(x)\right| <$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{j_0-1} |\gamma_j| \chi_{\Delta_j}(x) + 2^l \cdot |\gamma_{j_0}| \cdot \chi_{\Delta_{j_0}}(x) + 2\delta_{j_0}^{-1} \cdot |\gamma_{j_0}| \cdot |\Delta_{j_0}| \cdot \chi_{\Delta_{j_0}^c}(x)^*. \tag{54}$$

Учитывая соотношения (42), (43), (54), будем иметь

$$\left|\sum_{k=k_0}^{s} c_k W_{n_k}(x)\right| \leqslant \left[\int_0^1 |f(x)|\, dx\right]^{-1/2} \cdot |f(x)| + \sqrt{\int_0^1 |f(x)|\, dx}, \quad x \in G.$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы

Рассмотрим множество $[\gamma, \Delta]$, зависящее от друх параметров, где γ — пробегает множество всех рациональных чисел, а Δ — пробегает множество всех интервалов типа $\Delta_k^{(i)}$. Перенумеровав множество всех ступенчатых функций

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j \chi_{\Delta_j}(x), \text{ где } (\gamma_j, \Delta_j) \in [\gamma, \Delta],$$

мы можем представить его в виде последовательности

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x), \cdots. \tag{55}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число и $\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — подсистема Уолша вида (1).

Нетрудно видеть, что путем последовательного применения леммы 3 можно определить последовательности множеств $\{G_s\}_{s=1}^{\infty} \cdot \{E_s\}_{s=1}^{\infty}$ и полиномов

$$\sum_{k=m_s+1}^{m_{s+1}} c_k W_{n_k}(x), \quad s = 1, 2, \cdots,$$

которые обладают следующими свойствами

$$\sum_{k=m_s+1}^{m_{s+1}} c_k W_{n_k}(x) = f_s(x), \quad \text{при} \quad x \in E_s, \; s = 1, 2, \cdots, \tag{56}$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=m_s+1}^{m_{s+1}} c_k W_{n_k}(x)\right| dx < 2 \int_0^1 |f_s(x)|\, dx, \tag{57}$$

---

* $\Delta_{j_0}^c = [0, 1] \setminus [b_{j_0} - \delta_{j_0}; b_{j_0} + \delta_{j_0}]$.

$$\left|\sum_{k=m_s+1}^{m} c_k W_{n_k}(x)\right| < 4\left[\int_0^1 |f_s(x)|dx\right]^{-1/2} \cdot |f_s(x)| + \left[\int_0^1 |f_s(x)|\,dx\right]^{1/2} \tag{58}$$

(при $x \in G_s$, $m_s < m \leqslant m_{s+1}$)

$$|G_s| > 1 - \left[\int_0^1 |f_s(x)|\,dx\right]^{1/2}, \ |E_s| > 1 - \varepsilon \cdot 2^{-s}, \ G_s \subset E_s. \tag{59}$$

Положим

$$E = \bigcap_{s=1}^{\infty} E_s. \tag{60}$$

Очевидно, что

$$|E| > 1 - \varepsilon. \tag{61}$$

Покажем, что множество E удовлетворяет требованиям теоремы. В самом деле, пусть $f(x) \in L\,[0,1]$. Легко видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_s}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ из последовательности (55) такую, что

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{s=1}^{n} f_{k_s}(x) \overset{\text{п. в.}}{=} f(x), \tag{62}$$

$$\int_0^1 |f_{k_s}(x)|\,dx < 2^{-4s}, \ s \geqslant 2, \cdots. \tag{63}$$

Отсюда и из условий (56), (57) вытекает, что функция

$$F(x) = \sum_{s=1}^{\infty}\left[\sum_{k=m_{k_s}+1}^{m_{k_s}+1} c_l W_{n_l}(x)\right] = \sum_{l=1}^{\infty} b_l W_{n_l}(x) \tag{64}$$

суммируема и равна $f(x)$ на E после изменения на множестве нулевой меры. Покажем, что ряд Фурье функции $F(x)$ по системе (1) сходится к ней почти всюду. Обозначая через

$$\Omega_s = \{x \in [0,1], \ |f_{k_s}(x)| < 2^{-3s}\}, \ s=2, 3, \cdots, \tag{65}$$

будем иметь (см. 63))

$$2^{-4s} \geqslant \int_{C\Omega_s} |f_{k_s}(x)|\ dx > 2^{-3s}\,|C\Omega_s|,$$

следовательно

$$|\Omega_s| > 1 - 2^{-s}. \tag{66}$$

Положим

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{s=n} [\Omega_s \cap G_{k_s}]. \tag{67}$$

Отсюда и из того, что $|G_{k_s} \cap \Omega_s| > 1 - 2^{-s}$ (см. (59), (63), (66)) вытекает, что $|\Omega| = 1$.

Пусть $x \in \Omega$, тогда существует натуральное число s_0 такое, что $x \in \Omega_s \cap G_{k_s}$ при $s \geqslant s_0$.

Учитывая соотношения (58), (63), (66), будем иметь

$$\left| \sum_{l=m_{k_s}+1}^{m} c_l W_{n_l}(x) \right| < 4 \left[\int_0^1 |f_{k_s}(x)|\, dx \right]^{-1/2} \cdot |f_{k_s}(x)| +$$

$$+ \left[\int_0^1 |f_{k_s}(x)|\, dx \right]^{1/2} \leqslant 4\, (2^{-4s})^{-1/2} \cdot 2^{-3s} + 2^{-2s} < 2^{-s+1} \to 0.$$

Отсюда и из условия (64) следует, что

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{l=1}^{m} c_l W_{m_l}(x) = F(x) \text{ п. в.}$$

Очевидно, что ряд (64) есть ряд Фурье функции $F(x)$ по системе $\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема доказана.

Замечание. Можно установить существование функции $f_0(x) \in L[0,1]$, ряд Фурье которой по системе (1) расходится почти всюду.

Отметим, что существование функции $g_0(x) \in L$, ряд Фурье которой по системе Уолша $\{W_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится почти всюду, доказал Е. М. Стейн [11].

Ереванский государственный
университет

Поступила 13.IV.1982

Մ. Ժ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ Ինտեգրելի ֆունկցիաների Ֆուրյե-Ուոլշի շարքերի զուգամիտության մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը. $\forall \{N_k\}_{k=1}^{\infty}$; $\lim_{k\to\infty} (N_{2k} - N_{2k-1}) = +\infty$ *հաջորդականության և* ε *դրական թվի համար* $\exists\, G_\varepsilon \subset [0, 1]$ *չափելի բազմություն այնպիսին, որ*

1) $|G_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$

2) $\forall f(x) \in L\,[0, 1]\ \exists g(x) \in L$, $g(x) = f(x)$, $x \in G_\varepsilon$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը ըստ*

$$\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{W_m(x) : m = N_{2k-1}, \cdots, N_{2k} : k = 1, 2, \cdots\}$$

համակարգի զուգամիտում իրեն համարյա ամենուրեք:

M. G. GRIGORIAN *On a. e. convergence of Fourier—Walsh series of integrable functions* (summary)

Let $\varepsilon > 0$ and $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a subsequence of natural numbers such that

$$\lim_{k\to\infty} (N_{2k} - N_{2k-1}) = +\infty.$$

It is proved that there exists a measurable set $E_\varepsilon \subset [0, 1]$ with the property: for every $f(x) \in L$ there is $g(x) \in L\,[0, 1]$ such that $g(x) = f(x)$, $x \in E_\varepsilon$ and the Fourier series of $g(x)$ with respect to Walsh system $\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} \equiv \{W_m(x);\ m = N_{2k-1} \cdots N_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ converges to $g(x)$ a. e.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. Е. Меньшов*. Sur la representation des fonctions mesurabls par des series trigonometrives, М. С., 9 (51), 1941.
2. *Д. Е. Меньшов*. О рядах Фурье от суммируемых функций, ТММО, 1, 1952.
3. *Р. И. Осипов*. О сходимости рядов по системе Уолша, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 1, № 4, 1966.
4. *А. М. Зубаки*. О теоремах «исправления» Меньшова для одного класса мультипликативных ортонормированных систем функций, Изв. высш. учеб. зав., Матем., 1969, № 12, 1969.
5. *J. J. Price*. Walsch series and adjustment of fonctions on small sets, III, J. Math., 13, № 1, 1969.
6. *Ф. Г. Арутюнян*. Представление функций кратными рядами, ДАН Арм. ССР, 64, № 2, 1977.
7. *Ф. Г. Арутюнян*. Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами, Мат. сб., 90 (132), № 4, 1973.
8. *М. Ж. Григорян*. О сходимости ортогональных рядов в метриках L^p, $p > 1$. Кандидатская диссертация, Институт математики АН Арм. ССР, 1980.
9. *R. Peley*. A remarkable systems of ortogonal functions, Proc. London Math. Soc., 34, 1932.
10. *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз*. Теория ортогональных рядов, М., 1958.
11. *E. M. Stein*. On limits of sequences of operators, Ann. Math., 74, № 1, 1961.