ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա | XVIII, № 2, 1983 | Математика

УДК 519.63

Л. А. ОГАНЕСЯН

МЕТОД ФЕДОРЕНКО—БАХВАЛОВА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Для решения разностных уравнений, записанных для уравнения Пуассона, Р. П. Федоренко предложил итерационный метод, требующий $O(h^{-2}\ln\varepsilon^{-1})$ арифметических действий для получения решения с точностью до ε (здесь h — шаг сетки). Г. П. Астраханцев, используя прием Н. С. Бахвалова, доказал сходимость метода для вариационно-разностных схем, записанных для общего эллиптического уравнения второго порядка, заданного в произвольной области с гладкой границей (в случае третьей краевой задачи). В настоящей работе строится вариационно-разностная схема для первой краевой задачи. Для нее доказывается сходимость метода Федоренко-Бахвалова*.

Построение схемы. Направим ось x горизонтально (слева направо), y — вертикально (снизу вверх). Линиями, параллельными осям координат $x=x_i=hi$; $y=y_j=hj$; $i, j=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ разобьем плоскость (x, y) квадратной сеткой шага h. Каждый прямоугольник Π_{ij} $(x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},\ y_j\leqslant y\leqslant y_{j+1})$ диагональю, образующей угол $\pi/4$ с осью x разобьем на два треугольника: Δ'_{ij} и Δ''_{ij} — лежащий над Δ'_{ij}. Пусть в области Ω (x, y) с границей $\Gamma\in C^{(2)}$, имеющей лишь конечное число точек смены знака кривизны, дана задача: найти $u\,(x_1, x_2)$, удовлетворяющее уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x_m}\left(a_{mn}\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)+a_m\frac{\partial u}{\partial x_m}+au=f \tag{1}$$

и условию $u/_\Gamma=0$.

Здесь $f\in L_2$, $a_{mn}\in C^{(2)}$, $a_m\in C^{(1)}$, $a\in C^{(0)}$, $a>0$, $m, n=1, 2$**.

---

* Работа была доложена на конференции по вариационно-разностным методам в г. Новосибирске в 1977 году.

** В работе приняты следующие обозначения: x_1 и x_2 это то же, что x и y; через C, η обозначены различные положительные константы, зависящие лишь от области и коэффициентов уравнения; через $\widehat{\varphi}_k(x, y)$ обозначено $\widehat{\varphi}(x+kh, y)$, где $\widehat{\varphi}(x, y)$ — линейное восполнение по треугольникам триангуляции сеточной функции $\varphi(x_i, y_j)$; по повторяющимся индексам происходит суммирование от 1 до 2; через s и n обозначены координаты местной системы координат около Γ; для некоторой точки $M(x, y)$ число n — это расстояние от $M(x, y)$ до Γ, s — длина дуги линии $n=\mathrm{const}$ от фиксированной нормали к Γ до точки M; через $W_2^{(k)}$ обозначены пространства Соболева; через $A^{(2)}$ — класс функций с ограниченными вторыми производными; через $C^{(k)}$ — класс функций с непрерывными k-ыми производными; через ρ_x (x, y) обозна-

К сеточной области отнесем все треугольники, имеющие ненулевое пересечение с Ω. Вершины этих треугольников назовем узлами сетки, а их множество обозначим через R. Рассмотрим функцию $\chi(x, y)$, равную нулю на Γ, и вне Ω, положительную в Ω и равную единице на расстоянии большем δ от Γ (здесь δ — малое число), и такую, что $n/\chi(s, n)$, $\chi(s, n)/n \in A^{(2)}$; $(s, n) \in \Omega$. Класс функций $\bar{\varphi}$ вида $\chi\bar{\varphi}$ назовем H_h*. Будем искать приближенное решение $\tilde{v} \in H_h$ задачи (1) из интегрального тождества, справедливого при произвольной $\bar{\varphi} \in H_h$:

$$L(\tilde{v}, \bar{\varphi}) = \iint\limits_{\Omega} \left[a_{mn} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_m} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_n} + a_m \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_m} \bar{\varphi} + a \tilde{v} \bar{\varphi} \right] d\Omega = \iint\limits_{\Omega} f \bar{\varphi}\, d\Omega. \qquad (2)$$

Предположим, что $L(u, u) \geqslant c\, \|u\|^2_{W_2^1}$ для любого $u \in W_2^1$, удовлетворяющему условию $u|_\Gamma = 0$.

Пусть граница $\Gamma = \bigcup\limits_{p=1}^{P} \Gamma_p$, где Γ_p — открытые дуги, наклоненные в каждой точке под углом не более 60° к оси x (или y). Пусть

$$u = \sum_{p=1}^{P} w_p + z; \quad w_p,\ z \in W_2^2,$$

где $w_p \neq 0$ лишь в 3δ окрестности Γ и $w_p = 0$ в $\delta_1 \gg \delta$ окрестности $\Gamma \setminus \Gamma_p$, а $z = 0$ в 2δ окрестности Γ. Обозначим $\Omega_p = \operatorname{supp} p\, w_p$.

В с п о м о г а т е л ь н ы е   н е р а в е н с т в а. Докажем неравенства, которые используем позже.

Неравенство А:

$$\eta \leqslant \iint\limits_{\Omega} |\nabla(\chi\psi)|^2 d\Omega \Big/ \iint\limits_{\Omega} (|\chi\nabla\psi|^2 + \psi^2)\, d\Omega \leqslant C$$

для $\psi \in W_2^1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Правое неравенство элементарно

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla(\chi\psi)|^2 d\Omega = \iint\limits_{\Omega} (\chi\nabla\psi + \nabla\chi\psi)^2 d\Omega \leqslant C \iint\limits_{\Omega} (|\chi\nabla\psi|^2 + \psi^2)\, d\Omega.$$

(Мы воспользовались тем, что $|\nabla\chi| < C$).

Докажем левое неравенство А. Предварительно докажем неравенство

$$\iint\limits_{\Omega} \psi^2\, d\Omega \leqslant C \iint\limits_{\Omega} |\nabla(\chi\psi)|^2\, d\Omega. \qquad (3)$$

чается расстояние от точки $M(x, y)$ до Γ в направлении оси x, через $\rho_y(x, y)$ — то же для оси y; при заменах переменных функция в старых и новых переменных обозначается одной и той же буквой; $\|\varphi\|_k \overset{\text{def}}{=} \|\varphi\|_{W_2^{(k)}}$.

* Прием умножения на $\chi(x, y)$ функций, с целью получения в методе Ритца координатных функций, удовлетворяющих условию Дирихле, известен как прием Харрик.

Обозначим $q=\chi\psi$. Поскольку $q(s, n)$ обращается в нуль при $n=0$, для него верно неравенство Харди

$$\int_0^\delta \frac{q^2(s, n)}{n^2}dn \leqslant C\int_0^\delta\left(\left|\frac{\partial q(s, n)}{\partial n}\right|^2+q^2\right)dn.$$

Интегрируя это неравенство по s, обозначив ω_δ область $n\leqslant\delta$ и учитывая, что n/χ ограничено, имеем

$$\iint_{\omega_\delta}\frac{q^2}{\chi^2}dsdn\leqslant C\iint_{\omega_\delta}\frac{q^2}{n^2}dsdn\leqslant C_1\iint_\Omega(|\nabla q|^2+q^2)d\Omega.$$

Прибавив к обеим частям последнего неравенства $\iint_{\Omega\setminus\omega_\delta} q^2 d\Omega$ и учитывая, что $\chi=1$ при $n>\delta$, получаем

$$\iint_\Omega\frac{q^2}{\chi^2}d\Omega\leqslant C_2\iint_\Omega\left(|\nabla q|^2+q^2\right)d\Omega\leqslant C_3\iint_\Omega|\nabla q|^2 d\Omega,$$

т. е. неравенство (3). (Мы воспользовались здесь тем, что при $q|_\Gamma=0$ $\iint_\Omega q^2 d\Omega\leqslant C\iint_\Omega|\nabla q|^2 d\Omega$). Далее

$$\iint_\Omega|\nabla(\chi\psi)|^2 d\Omega=\iint_\Omega|\chi\nabla\psi+\nabla\chi\psi|^2 d\Omega\geqslant\eta\iint_\Omega|\chi\nabla\psi|^2 d\Omega-C\iint_\Omega\psi^2 d\Omega.$$

Перенося налево последнее слагаемое и заменяя его по (3), получим

$$\eta\iint_\Omega|\chi\nabla\psi|^2 d\Omega\leqslant C_4\iint_\Omega|\nabla(\chi\psi)|^2 d\Omega. \tag{4}$$

Из (4) и (3) следует левое неравенство А.

Неравенство В.

Если $f(0)=0$, то

$$\int_0^1\left|\left(\frac{f}{x}\right)'\right|^2dx\leqslant C\int_0^1|f''|^2dx.$$

Доказательство. Равенство

$$\left(\frac{f}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}\int_0^x tf''(t)\,dt$$

возведем в квадрат и проинтегрируем

$$\int_0^1 \left|\left(\frac{f}{x}\right)'\right|^2 dx = \int_0^1 \left|\int_0^x t f''(t)\,dt\right|^2 \frac{dx}{x^4} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x |f''(t)|\,dt\right)^2 \frac{dx}{x^2} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{x^2}\int_0^x |f''(t)|^2 t^{\mu}\, dt \int_0^x dt\, t^{-\mu} =$$

$$= \frac{1}{(1-\mu)}\int_0^1 dx\, x^{-\mu-1}\int_0^x |f''(t)|^2 t^{\mu}\, dt =$$

$$= \frac{1}{(1-\mu)}\int_0^1 |f''(t)|^2 t^{\mu}\, dt \int_t^1 x^{-\mu-1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(1-\mu)}\int_0^1 |f''(t)|^2 t^{\mu} \left(\frac{t^{-\mu}-1}{\mu}\right) dt \leqslant \frac{1}{\mu(1-\mu)}\int_0^1 |f''(t)|^2\, dt.$$

Аппроксимация. Оценку аппроксимации решения уравнения (1) функциями из H_h проведем, подобрав $\tilde\varphi$ для каждого w_p и для z в отдельности. Оценка аппроксимации для z стандартна (см. [1]). Оценим $w_p - \tilde\varphi$. Для определенности в качестве Γ_p возьмем участок, составляющий угол не более 60° с осью y. Пусть $x = x(y)$ — уравнение Γ вблизи Γ_p, причем $y_{p_1} \leqslant y \leqslant y_{p_2}$ для Γ_p и $\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| \leqslant \sqrt{3}$ для $y_{p_1} \leqslant \leqslant y \leqslant y_{p_2}$. Пусть Ω лежит правее Γ_p.

Вследствие условия $\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| \leqslant \sqrt{3}$ существует такое k, не зависящее от i и j, что если при некоторых i и j $(p_1 \leqslant j \leqslant p_2)$ Π_{ij} отстоит от Γ_p менее, чем на h, то $\Pi_{i+m,j}$ отстоит от Γ_p при всех $m \geqslant k$ более, чем на h. Обозначим сумму Π_{ij}, отстоящих от Γ_p менее, чем на h, через ω_p.

Оценим $\|w_p - \tilde\varphi\|^2_{W_2^1(\Delta'\cap\Omega)}$ где $\Delta' \subset \Pi_{ij} \subset \omega_p$. Обозначим $\vartheta \equiv w_p$. В качестве $\tilde\varphi$ для w_p возьмем $\chi\left(\frac{\vartheta}{\chi}\right)_k$. Оценим

$$J \equiv \iint_{\Delta'\cap\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\vartheta - \chi\widehat{\left(\frac{\vartheta}{\chi}\right)}_k\right)\right]^2 d\Omega:$$

$$J \leqslant 2\int_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int_{x(y)}^{x_r} dx\, \chi^2\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \hat v_k}{\partial x}\right)^2 + 2\int_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int_{x(y)}^{x_r} dx \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 (v - \hat v_k)^2 \equiv$$

$$\equiv J_1 + J_2,$$

где $v = \vartheta/\chi$, а x_r таково, что Π_{ij} удалено от Γ_p на величину $O(h)$, но не менее, чем на h. Рассмотрим функцию $I(x)$, такую, что $I(x) = 1$ при $x < x_r$ и $I(x) = \dfrac{x_{r+1} - x}{h}$ при $x > x_r$. Тогда

$$J_2 \leqslant C \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x(y)}^{x_{r+1}} dx\, [I(v-\widehat{v}_k)]^2 = C \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x(y)}^{x_{r+1}} dx \Big(\int\limits_{x}^{x_{r+1}} \frac{\partial}{\partial \xi} \times$$

$$\times [I(v-\widehat{v}_k)]\, d\xi \Big)^2 \leqslant 2C \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x(y)}^{x_{r+1}} dx \left[\int\limits_{x}^{x_{r+1}} \left| \frac{\partial v(\xi, y)}{\partial \xi} - \frac{\partial \widehat{v}_k}{\partial \xi} \right| d\xi \right]^2 +$$

$$+ 2C \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x(y)}^{x_{r+1}} dx \left[\int\limits_{x_r}^{x_{r+1}} |v-\widehat{v}_k| \left| \frac{\partial I}{\partial \xi} \right| d\xi \right]^2 \equiv 2C\, (J_{21} + J_{22}).$$

Пусть $0<\beta<1$. Оценим J_{21}:

$$J_{21} \leqslant \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x(y)}^{x_{r+1}} dx \int\limits_{x}^{x_{r+1}} d\xi \rho_\xi^{1+\beta}(\xi, y) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v_k}{\partial \xi} \right)^2 \int\limits_{x}^{x_{r+1}} \frac{d\xi}{\rho_\xi^{1+\beta}(\xi, y)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\beta} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x(y)}^{x_{r+1}} dx \frac{1}{\rho_x^\beta(x, y)} \int\limits_{x}^{x_{r+1}} d\xi \rho_\xi^{(1+\beta)} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial \widehat{v}_k}{\partial \xi} \right)^2 =$$

$$= \frac{C}{\beta} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x(y)}^{x_{r+1}} d\xi \rho_\xi^{1+\beta}(\xi, y) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial \widehat{v}_k}{\partial \xi} \right)^2 \int\limits_{x(y)}^{\xi} \frac{dx}{\rho_x^\beta(x, y)} \leqslant$$

$$\leqslant Ch^{1-\beta} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x(y)}^{x_{r+1}} d\xi \rho_\xi^{1+\beta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial \widehat{v}_k}{\partial \xi} \right)^2.$$

Последнее неравенство следует из оценки внутреннего интеграла: $\int\limits_{x(y)}^{\xi} dx/\rho_x^\beta \leqslant Ch^{1-\beta}$. Обозначим D_{jr} область $x(y)<x<x_{r+1}$, $y_j<y<y_{j+1}$; E_m — множество тех y, лежащих в интервале (y_j, y_{j+1}), для которых $(x_{m+1}, y) \in \Omega$ и $x_m(y) = \max(x_m, x(y))$. Тогда последний интеграл преобразуется так:

$$\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x(y)}^{x_{r+1}} d\xi \rho_\xi^{1+\beta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial \widehat{v}_k}{\partial \xi} \right)^2 = \sum_{m=q}^{r} \Big\{ \iint\limits_{D_{jr} \cap \Delta'_m} dy\, d\xi\, \rho_\xi^{1+\beta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial \widehat{v}_k}{\partial \xi} \right)^2 +$$

$$+ \iint\limits_{D_{jr} \cap \Delta''_{m,j}} dy\, d\xi \rho_\xi^{1+\beta} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial \widehat{v}_k}{\partial \xi} \right)^2 \Big\} \equiv \sum_{m=q}^{r} \{ i'_m + i''_m \}. \qquad (5)$$

Здесь q — наименьший индекс i, при котором $\Pi_{ij} \cap D_{jr} \neq 0$.

Займемся оценкой i'_m (i''_m оценивается аналогично):

$$i'_m \leqslant \int\limits_{E_m} dy \int\limits_{x_m(y)}^{x_{m+1}} d\xi \rho_\xi^{1+\xi} \left[\frac{1}{h} \int\limits_{x_{m+k}}^{x_{m+k+1}} dt \left(\frac{\partial v(\xi, y)}{\partial \xi} \frac{\partial v(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, y)}{\partial t} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial v(t, y_j)}{\partial t} \right|^2 \leqslant \frac{2}{h^2} \int\limits_{E_m} dy \int\limits_{x_m(y)}^{x_{m+1}} d\xi \rho_\xi^{1+\beta} \left[\int\limits_{x_{m+1}}^{x_{m+k+1}} dt \int\limits_{\xi}^{t} \left| \frac{\partial^2 v(\lambda, y)}{\partial \lambda^2} \right| d\lambda \right]^2 +$$

$$+ \frac{2}{h^2} \int\limits_{E_m} dy \int\limits_{x_m(y)}^{x_{m+1}} d\xi \rho_\xi^{1+\beta} \left[\int\limits_{x_{m+k}}^{x_{m+k+1}} dt \int\limits_{y_j}^{y} d\eta \left| \frac{\partial^2 v(t, \eta)}{\partial t \partial \eta} \right| \right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2h^2}{h^2} \int\limits_{E_m} dy \int\limits_{x_m(y)}^{x_{m+k+1}} d\xi \rho_\xi^{1+\beta} \int\limits_{\xi}^{x_{m+k+1}} \frac{d\lambda}{\rho_\lambda^2(\lambda, y)} \int\limits_{\xi}^{x_{m+k+1}} \left| \frac{\partial^2 v(\lambda, y)}{\partial \lambda^2} \right|^2 \rho_\lambda^2(\lambda, y)\, d\lambda +$$

$$+ \frac{C 2h^{1+\beta}}{h^2} \int\limits_{E_m} dy \int\limits_{x_m(y)}^{x_{m+1}} d\xi \int\limits_{x_{m+k}}^{x_{m+k+1}} dt \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} d\eta \rho_t^2(t, \eta) \left| \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \eta} \right|^2.$$

В последнем слагаемом воспользовались тем, что $\Pi_{m+k,j}$ отстоит от Γ_p не менее, чем на h, поэтому $\rho_\xi \leqslant C \rho_t$.

Продолжим оценку i'_m, учитывая, что $\int\limits_{\xi}^{x_{m+k+1}} d\lambda / \rho_\lambda^2 \leqslant \frac{C}{\rho_\xi}$. Переставляя интегралы по ξ и λ в первом слагаемом, получим

$$i'_m \leqslant 2C \int\limits_{E_m} dy \int\limits_{x_m(y)}^{x_{m+k+1}} d\lambda\, \rho_\lambda^2 \left| \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda^2} \right|^2 \int\limits_{x_m(y)}^{\lambda} \rho_\xi^{1+\beta} \frac{d\xi}{\rho_\xi} +$$

$$+ 2Ch^{1+\beta} \int\limits_{x_{m+k}}^{x_{m+k+1}} dt \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} d\eta\, \rho_t^2(t, \eta) \left| \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \eta} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant Ch^{1+\beta} \int\limits_{E_m} dy \int\limits_{x_m(y)}^{x_{m+k+1}} dx \rho_x^2 \left| \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \right|^2 + Ch^{1+\beta} \int\limits_{x_{m+k}}^{x_{m+k+1}} dx \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \rho_x^2 \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right|^2.$$

Учитывая еще (5) и конечность числа слагаемых в (5), получим

$$J_{21} \leqslant Ch^2 \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x(y)}^{x_{r+k+1}} dx \rho_x^2 \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

Интеграл J_1 можно свести точно к такому же виду, что J_{21}, взяв в (5) $\beta = 1$. Наконец, J_{22} оценивается так:

$$J_{22} \leqslant Ch^4 \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x_{k+l}}^{x_{k+l+1}} \left(\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|^2\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant C h^2 \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x_{k+l}}^{x_{k+l+1}} \rho_x^2 \left(\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|^2\right) dx.$$

Теперь оценим интеграл

$$Y = \iint\limits_{\Delta_{ij} \cap \Omega} \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\vartheta - \chi\left(\frac{\hat{\vartheta}}{\chi}\right)\right)\right]^2 d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x(y)}^{x_r} \chi^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial y}\right)^2 dx + 2C \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x(y)}^{x_r} (v - \hat{v}_k)^2 dx \equiv$$

$$\equiv 2(Y_1 + Y_2).$$

Член Y_2 уже оценен, оценим $Y_1 = \sum\limits_{m=q}^{r} (I'_m + I''_m)$, где

$$I''_m = \iint\limits_{D_{rj} \cap \Delta''_m} \chi^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{h} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial v(x_{m+k}, t)}{\partial t} dt\right)^2,$$

$$I'_m = \iint\limits_{D_{rj} \cap \Delta'_{mj}} \chi^2 \left[\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - \frac{1}{h} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dt \, \frac{\partial v(x_{m+k+1}, t)}{\partial t}\right]^2 dx dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{E_m} dy \int\limits_{x_m(y)}^{x_{m+1}} dx \, \chi^2(x, y) \left[-\int\limits_{x}^{x+kh} \frac{\partial^2 v(\xi, y)}{\partial \xi \partial y} d\xi - \frac{1}{h} \int\limits_{y_j} d t \int\limits_{y}^{t} d\mu \, \frac{\partial^2 v(x + kh, \mu)}{\partial \mu^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{h} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dt \int\limits_{x+kh}^{x_{k+m+1}} d\xi \, \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial \xi \partial t}\right]^2 \leqslant C \int\limits_{E_m} dy \int\limits_{x_m(y)}^{x_{m+k+1}} dx \chi^2 \int\limits_{x}^{x_{m+k+1}} \frac{d\xi}{\rho_\xi^2(\xi, y)} \times$$

$$\times \int\limits_{x}^{x_{m+k+1}} d\xi \left|\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial y}\right|^2 \rho_\xi^2 + Ch^4 \int\limits_{x_{m+k}}^{x_{m+k+1}} d\lambda \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} d\mu \left|\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2}\right|^2 + Ch^4 \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dt \times$$

$$\times \int\limits_{x_{m+k}}^{x_{m+k+1}} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial t}\right|^2 d\xi \leqslant Ch^2 \int\limits_{E_m} dy \int\limits_{x(y)}^{x_{m+k+1}} d\xi \left|\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial y}\right|^2 \rho_\xi^2 + Ch^2 \int\limits_{x_{m+k}}^{x_{m+k+1}} d\lambda \times$$

$$\times \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} d\mu \left|\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2}\right|^2 \rho_\lambda^2(\lambda, \mu) + Ch^2 \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dt \int\limits_{x_{m+k}}^{x_{m+k+1}} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial t}\right|^2 \rho_\xi(\xi, t) \, d\xi.$$

Член I'_m оценивается аналогично.

Во всех случаях дело свелось к оценке такого интеграла:

$$T = Ch^2 \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} dy \int\limits_{x(y)}^{x_{l+k+1}} dx \rho_x^2 \left[\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|^2 \right].$$

Перейдем к местной системе координат s, n, расширим область интегрирования для T так, чтобы в нее вместилась минимальная область вида $s' \leqslant s \leqslant s''$; $0 \leqslant n \leqslant 3\delta$; s', $s'' = \text{const}$ и $|s' - s''| = O(h)$. Учтем еще, что $\left|\frac{\rho_x}{\chi}\right| < C$. Тогда

$$T \leqslant Ch^2 \int\limits_{s'}^{s''} ds \int\limits_0^{3\delta} dn\, \chi^2(n, s) \left(\left|\frac{\partial^2 v}{\partial n^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|^2 \right) \leqslant Ch^2 \int\limits_{s'}^{s''} ds \int\limits_0^{3\delta} dn \left[\chi^2 \left|\frac{\partial^2}{\partial n^2}\right| \left(\frac{\vartheta}{\chi}\right) \right]^2 +$$

$$+ \chi^2 \left|\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial}{\partial s}\vartheta/\chi\right)\right|^2 + \left|\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\vartheta/\chi)\right|^2 + \chi^2 \left|\frac{\partial}{\partial n}\frac{\vartheta}{\chi}\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial s}\frac{\vartheta}{\chi}\right|^2 + v^2 \Bigg].$$

Воспользуемся неравенством В. Оценим с его помощью член

$$J_5 = Ch^2 \int\limits_{s'}^{s''} ds \int\limits_0^{3\delta} dn \chi^2 \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\vartheta}{\chi}\right)\right]^2.$$

Обозначив $\frac{\vartheta n}{\chi} = Q$ и учитывая, что $\frac{n}{\chi}$ и $\frac{\chi}{n}$ — гладкие функции, получим

$$J_5 = Ch^2 \int\limits_{s'}^{s''} ds \int\limits_0^{3\delta} \chi^2 \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{Q}{n}\right)\right]^2 dn \leqslant$$

$$\leqslant Ch^2 \int\limits_{s'}^{s''} ds \int\limits_0^{3\delta} \left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{Q}{n}\right]^2 dn \leqslant Ch^2 \int\limits_{s'}^{s''} ds \int\limits_0^{3\delta} \left[\frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}\right]^2 dn.$$

Заметим еще, что $\left(\frac{f}{x}\right)'' = \frac{f}{x} - \frac{2}{x}\left(\frac{f}{x}\right)'$, откуда получим

$$J_6 \equiv Ch^2 \int\limits_{s'}^{s''} ds \int\limits_0^{3\delta} \chi^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial n^2}\frac{\vartheta}{\chi}\right]^2 dn \leqslant$$

$$\leqslant Ch^2 \int\limits_{s'}^{s''} ds \int\limits_0^{3\delta} \left[\frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}\right]^2 dn + Ch^2 \int\limits_{s'}^{s''} ds \int\limits_0^{3\delta} \left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{Q}{n}\right]^2 dn.$$

Наконец

$$J_7 \equiv Ch^2 \int\limits_{s'}^{s''} ds \int\limits_0^{3\delta} dn\, \chi^2 \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial}{\partial s}\vartheta/\chi\right)\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant Ch^2\int\limits_{s'}^{s''}ds\int\limits_0^{3\delta}dn\left[\left|\frac{\partial^2 Q}{\partial n\partial s}\right|^2+\frac{1}{n^2}\left|\frac{\partial Q}{\partial s}\right|^2\right]\leqslant Ch^2\int\limits_{s'}^{s''}ds\int\limits_0^{3\delta}dn\left|\frac{\partial^2 Q}{\partial n\partial s}\right|^2.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Харди

$$\int\limits_{s'}^{s''}ds\int\limits_0^{3\delta}dn\frac{1}{n^2}\left|\frac{\partial Q}{\partial s}\right|^2\leqslant C\int\limits_{s'}^{s''}ds\int\limits_0^{3\delta}dn\left|\frac{\partial^2 Q}{\partial s\partial n}\right|^2,$$

так как $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial s}\right|_{n=0}=\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s}\dfrac{n}{\chi}+\vartheta\dfrac{\partial}{\partial s}\dfrac{n}{\chi}=0$. При оценках по всем Π_{ij}, удаленным от Γ_p меньше, чем на h, области $s'\leqslant s\leqslant s''$ перекрываются. Однако количество таких перекрытий не зависит от h. Поэтому получим

$$\sum_{\Pi_{ij}\subset\omega_p}\|w_p-\tilde{\varphi}\|^2_{W_2^1(\Pi_{ij}\cap\Omega)}\leqslant Ch^2\|w_p\|^2_{W_2^2(\Omega)}.$$

Оценим теперь $\|w_p-\tilde{\varphi}\|^2_{W_2^1(\Pi_{ij})}$ по остальным Π_{ij}, удаленным от Γ_p больше, чем на h, которые лежат в Ω_p.

Аналогично [1], учитывая, что $\tilde{\varphi}=\chi\widehat{\left(\dfrac{\vartheta}{\chi}\right)}_k$, получаем

$$\iint\limits_{\Delta_{ij}}\left|\nabla\left(\vartheta-\chi\widehat{\left(\frac{\vartheta}{\chi}\right)}\right)\right|^2dxdy\leqslant C\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}dy\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}dx\,\chi^2\left(\left|\frac{\partial(v-\hat{v}_k)}{\partial x}\right|^2+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\partial(v-\hat{v}_k)}{\partial y}\right|^2+(v-\hat{v}_k)^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant Ch^2\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}dy\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}dx\,\chi^2\left(\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|^2\right)+$$

$$+Ch^4\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}dy\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}dx\left(\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant Ch^2\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}dy\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}dx\left(\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|^2\right).$$

Сложив интегралы по таким треугольникам, получим

$$T_1\equiv\sum_{\Pi_{ij}\subset\Omega_p}\iint\limits_{\Pi_{ij}}\left|\nabla\left(\vartheta-\chi\widehat{\left(\frac{\vartheta}{\chi}\right)}_k\right)\right|^2dxdy\leqslant$$

$$\leqslant Ch^2 \int\limits_{s_1'}^{s_2'} ds \int\limits_0^{3\delta} \chi^2 \left(\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|^2 \right) dn,$$

где s_1 и s_2 — границы по s области Ω_p.

Перейдем как выше к системе s, n и оценив интегралы так же, как J_5, J_6, J_7, получим

$$T_1 \leqslant Ch^2 \int\limits_{s_1}^{s_2} ds \int\limits_0^{3\delta} dn \left(\left|\frac{\partial^2 Q}{\partial n^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 Q}{\partial s \partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial Q}{\partial s}\right|^2 + \left|\frac{\partial Q}{\partial n}\right|^2 + Q^2 \right).$$

Итак доказана (ср. [1])

Теорема 1. *Имеет место неравенство*

$$\|u - \tilde{v}\|_{W_2^1} < C \min_{\tilde{\varphi} \in H_h} \|u - \tilde{\varphi}\|_{W_2^1} \leqslant Ch \|u\|_{W_2^2}.$$

Стандартным способом (см. [1]) доказывается неравенство

$$\|u - \tilde{v}\|_{L_2} \leqslant Ch^2 \|u\|_{W_2^2}.$$

Обусловленность. Сопоставим каждой $\tilde{\varphi} \in H_h$ сеточную функцию φ по правилу: $\varphi_{ij} \equiv \varphi(x_i, y_j) = \hat{\varphi}(x_i, y_j)$.

Теорема 2. *Для произвольного* ψ *имеет место неравенство*:

$$C_1 (E_h \underline{\psi}, \underline{\psi}) \leqslant \iint\limits_{\Omega} |\nabla (\chi \hat{\psi})|^2 \, dxdy \leqslant C_2 (E_h \underline{\psi}, \underline{\psi})/h^2, \tag{6}$$

где

$$(E_h \underline{\psi}, \underline{\theta}) \equiv \sum_{x_i y_j \in R} e_{ij} \psi_{ij} \theta_{ij},$$

а e_{ij} *есть сумма по всем шести треугольникам* Δ_{ij}^k $(k = \overline{1, 6})$ *сеточной области, имеющим* (x_i, y_j) *своей вершиной, такого вида*

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{6} \left(\iint\limits_{\Delta_{ij}^k} \chi^2 \, d\Omega + h^2 \iint\limits_{\Delta_{ij}^k} |\hat{q}_{ij}|^2 \, d\Omega. \right.$$

Здесь q_{ij} — *функция, равная* 1 *в узле* (x_i, y_j) — *и нулю в остальных узлах.*

Доказательство. Правая часть неравенства (6) следует из правой части неравенства (A) и оценки для каждого треугольника: так как $\psi = \psi_1 q_1 + \psi_2 q_2 + \psi_3 q_3$, следовательно

$$\iint\limits_{\Delta \cap \Omega} [\chi^2 (\nabla \hat{\psi})^2 + \hat{\psi}^2] \, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{\Delta\cap\Omega} \chi^2 \frac{(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2)}{h^2}\, d\Omega + 3\iint\limits_{\Delta\cap\Omega} (\psi_1^2 q_1^2+\psi_2^2 q_2^2+\psi_3^2 q_3^2)\, d\Omega.$$

Здесь ψ_1, ψ_2, ψ_3 — значения $\widehat{\psi}$ в вершинах треугольника Δ, а q_1, q_2, q_3 — функции $\widehat{q_{ij}}$, равные 1 в вершинах Δ.

Произведем теперь вторую оценку. Будем доказывать неравенства для каждого треугольника. Сложив такие неравенства, получим левую часть неравенства (5). Рассмотрим варианты:

а) Пусть все три вершины треугольника лежат в области Ω. Если треугольник не пересекается с границей, то оценка очевидна (см. [1]):

$$\iint\limits_{\Delta} \widehat{\psi}^2\, d\Omega \geqslant (\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2)\frac{h^2}{24} \geqslant$$

$$\geqslant C\iint\limits_{\Delta} (\psi_1^2 q_1^2+\psi_2^2 q_2^2+\psi_3^2 q_3^2)\, d\Omega + C\,(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2)\iint\limits_{\Delta}\chi^2\, d\Omega. \tag{7}$$

Если же Δ задевает Γ, то нужно учесть, что в этом случае площадь области $\Delta\diagdown(\Delta\cap\Omega)$ будет $O(h^3)$, откуда

$$\iint\limits_{\Delta\cap\Omega} \widehat{\psi}^2\, d\Omega = \iint\limits_{\Delta} \widehat{\psi}^2\, d\Omega - \iint\limits_{\Delta\diagdown(\Delta\cap\Omega)} \widehat{\psi}^2\, d\Omega \geqslant$$

$$\geqslant \frac{h^2}{24}(\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2) - (\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2)\, O(h^3)$$

и далее как (7).

б) Пусть в треугольнике Δ две вершины A и B лежат внутри Ω, а C — вне. Тогда имеется треугольник Δ', прилегающий к AB, все три вершины которого лежат в Ω. Рассматривая оба треугольника вместе и обозначив D третью вершину примыкающего треугольника, получим

$$\iint\limits_{\Delta'\cap\Omega} \widehat{\psi}^2\, d\Omega + \iint\limits_{\Delta\cap\Omega} \widehat{\psi}^2\, d\Omega \geqslant Ch^2(\psi_A^2+\psi_B^2+\psi_D^2) +$$

$$+\eta\iint\limits_{\Delta\cap\Omega} q_C^2\psi_C^2\, d\Omega - C_1\eta\iint\limits_{\Delta\cap\Omega}(\psi_A^2+\psi_B^2)\, d\Omega \geqslant \eta h^2(\psi_A^2+\psi_B^2+\psi_D^2) +$$

$$+\frac{\eta}{2}\iint\limits_{\Delta\cap\Omega} \psi_C^2 q_C^2\, d\Omega + \psi_C^2\frac{\eta}{2}\iint\limits_{\Delta\cap\Omega}\chi^2\, d\Omega \geqslant \eta_1\iint\limits_{\Delta\cap\Omega}(\psi_A^2 q_A^2 + \tag{8}$$

$$+\psi_B^2 q_B^2 + \psi_C^2 q_C^2)\, d\Omega + \eta_1(\psi_A^2+\psi_B^2+\psi_C^2)\iint\limits_{\Delta\cap\Omega}\chi^2\, d\Omega$$

(в этом случае $\iint\limits_{\Delta\cap\Omega} q_C^2\, d\Omega \sim \iint\limits_{\Delta\cap\Omega}\chi^2\, d\Omega$).

в) Пусть у треугольника Δ только одна вершина A внутренняя в Ω. Будем этот треугольник рассматривать вместе с Δ'—соседним, в котором A—вершина, а треугольник Δ' лежит в Ω

$$\iint\limits_{\Delta'} \hat{\psi}^2\, d\Omega + \iint\limits_{\Delta\cap\Omega} \hat{\psi}^2\, d\Omega \geqslant \psi_A^2 \frac{h^2}{24} + \eta \iint\limits_{\Delta\cap\Omega} [(\psi_B q_B + \psi_C q_C)^2 - C\psi_A^2]\, d\Omega.$$

Пусть A—вершина прямого угла и A расположено в начале координат, точка B имеет координаты $(0, h)$, а $C(h, 0)$. Тогда, записав $y = y(x)$, уравнение Γ для случая $|y'(x)| < M$ (при $0 \leqslant x \leqslant h$, где M достаточно велико и не зависит от h), получим

$$\iint\limits_{\Delta\cap\Omega} (\psi_B q_B + \psi_C q_C)^2\, d\Omega = \int\limits_0^{\xi} dx \int\limits_0^{Y(x)} \left(\psi_B \frac{y}{h} + \psi_C \frac{x}{h}\right)^2 dy =$$

$$= \frac{1}{h^2}\int\limits_0^{\xi} x \left\{ \psi_B^2 \frac{Y^3(x)}{3} + \psi_C^2 \frac{Y(x)\, x^2}{2} + 2\psi_B \psi_C\, x\, \frac{Y^2(x)}{2} \right\} dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\eta}{h^2}\int\limits_0^{\xi} dx \left(\psi_B^2 \frac{Y^3(x)}{3} + \psi_C^2 \frac{Y(x)\, x^2}{2} \right) \geqslant C\eta \iint\limits_{\Omega\cap\Delta} (\psi_B^2 q_B^2 + \psi_C^2 q_C^2)\, d\Omega.$$

Здесь $Y(x) = \begin{cases} y(x), & \text{если } y(x) \geqslant 0 \\ 0, & \text{если } y(x) < 0 \end{cases}$; ξ — точка такая, что $y(x) \leqslant 0$ при $x > \xi$. Кроме того, так как $\chi(x, y) \sim \begin{cases} Y(x) - y, & \text{при } y \leqslant Y(x) \\ 0, & \text{при } y > Y(x) \end{cases}$, то

$$C_1(\psi_B^2 + \psi_C^2) \iint\limits_{\Delta\cap\Omega} \chi^2\, d\Omega \leqslant (\psi_B^2 + \psi_C^2) \int\limits_0^{\xi} dx \int\limits_0^{Y(x)} (Y(x) - y)^2\, dy =$$

$$= (\psi_B^2 + \psi_C^2) \int\limits_0^{\xi} \frac{Y^3(x)}{3}\, dx < \psi_B^2 \int\limits_0^{\xi} \frac{Y^3(x)}{3}\, dx + C\psi_C^2 \int\limits_0^{\xi} dx\, Y(x)\, x^2 \leqslant$$

$$\leqslant Ch^2 \iint\limits_{\Delta\cap\Omega} (\psi_B^2 q_B^2 + \psi_C^2 q_C^2)\, d\Omega$$

так, что окончательно

$$\iint\limits_{\Delta'} \hat{\psi}^2\, d\Omega + \iint\limits_{\Delta\cap\Omega} \hat{\psi}^2\, d\Omega \geqslant$$

$$\geqslant C\eta \left[\iint\limits_{\Delta\cap\Omega} (\psi_B^2 q_B^2 + \psi_C^2 q_C^2 + \psi_A^2 q_A^2)\, d\Omega + \frac{(\psi_A^2 + \psi_B^2 + \psi_C^2)}{h^2} \iint\limits_{\Delta\cap\Omega} \chi^2\, d\Omega \right]. \quad (9)$$

Если $|x'(y)| < M$ при $0 \leqslant y < h$, то то же можем сделать, заменив x на y. Если A—вершина острого угла, дело сводится к предыдущему случаю линейной заменой переменных.

г) Пусть у треугольника Δ с вершинами A, B, C все вершины лежат вне Ω, но AB пересекает Γ. Тогда площадь $\Delta \cap \Omega$ есть $O(h^3)$ и у Δ имеется соседний треугольник Δ' с вершинами A, B, D, такой что площадь $\Delta' \setminus (\Delta' \cap \Omega)$ есть $o(h^3)$. Тогда

$$\iint\limits_{\Delta' \cap \Omega} \hat{\psi}^2 \, d\Omega > \left(\frac{h^2}{24} - O(h^3)\right)(\psi_A^2 + \psi_B^2 + \psi_D^2), \tag{9'}$$

$$\iint\limits_{\Delta \cap \Omega} \hat{\psi}^2 d\Omega \geqslant \eta \iint\limits_{\Delta \cap \Omega} (\psi_C q_C)^2 \, d\Omega - C \iint\limits_{\Delta \cap \Omega} (\psi_A q_A + \psi_B q_B)^2 \, d\Omega =$$

$$= \eta \psi_C^2 \iint\limits_{\Delta \cap \Omega} q_C^2 \, d\Omega - O(h^3)(\psi_A^2 + \psi_B^2).$$

Пусть для определенности AB располагается по оси x и координаты A и B таковы — A (0,0), B (0, h) (другие расположения AB рассматриваются аналогично).

Как и в пункте в) введем $Y(x)$. Пусть C имеет координаты (0, h), а крайние точки пересечения AB кривой $y = y(x)$ суть ξ_1 и ξ_2. Тогда

$$\iint\limits_{\Delta \cap \Omega} q_C^2 \, d\Omega = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} dx \int\limits_0^{Y(x)} (h - y)^2 \, dy = \frac{1}{3} \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{h^3 - (h - Y)^3}{3} \, dx \geqslant \eta h^2 \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} Y dx.$$

Здесь мы учли, что $Y(x) = O(h^2)$.

С другой стороны

$$\iint\limits_{\Delta \cap \Omega} \chi^2 d\Omega = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} dx \int\limits_0^{Y(x)} (Y(x) - y)^2 \, dy =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} Y^3(x) \, dx \leqslant C h^4 \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} Y(x) \, dx.$$

Отсюда

$$\eta \psi_C^2 \iint\limits_{\Delta \cap \Omega} q_C^2 \, d\Omega > \eta_1 \frac{\psi_C^2}{h^2} \iint\limits_{\Delta \cap \Omega} \chi^2 d\Omega$$

и учитывая еще (9′), получаем

$$\iint\limits_{\Delta' \cap \Omega} \hat{\psi} \, d\Omega + \iint\limits_{\Delta \cap \Omega} \hat{\psi}^2 d\Omega > \eta \Bigg(\iint\limits_{\Delta \cap \Omega} (\psi_A^2 q_A^2 + \psi_B^2 q_B^2 + \psi_C^2 q_C^2) \, d\Omega +$$

$$+ \frac{\psi_A^2 + \psi_B^2 + \psi_C^2}{h^2} \iint\limits_{\Delta \cap \Omega} \chi^2 d\Omega.$$

Теорема 2 доказана.

Имеет место

Теорема 3. *В условиях и обозначениях теоремы* 2 *имеет место неравенство*:

$$C_1 \iint\limits_{\Omega} \chi^2 \hat{\psi}^2 \, d\Omega \leqslant (E_h \underline{\psi}, \underline{\psi}) \leqslant C_2 \left(\iint\limits_{\Omega} \chi^2 \hat{\psi}^2 \, d\Omega + h^2 \iint\limits_{\Omega} |\nabla (\chi^2 \hat{\psi})| \, d\Omega \right). \qquad (10)$$

Доказательство. Левое неравенство следует непосредственно из определения:

$$\iint\limits_{\Omega} \chi^2 \hat{\psi}^2 \, d\Omega \leqslant 3 \sum_{x_i, y_j \in R} \psi_{ij}^2 \sum_{k=1}^{6} \iint\limits_{\Omega \cap \Delta_{ij}^k} \chi^2 \, d\Omega \leqslant 3 \, (E_h \underline{\psi}, \underline{\psi}).$$

Неравенство в другую сторону получим, если всмотримся в (7)—(9). Там доказано для всех треугольников

$$\iint\limits_{\Delta' \cap \Omega} \hat{\psi}^2 \, d\Omega + \iint\limits_{\Delta \cap \Omega} \hat{\psi}^2 \, d\Omega > \eta \iint\limits_{\Delta \cap \Omega} (\psi_1^2 q_1^2 + \psi_2^2 q_2^2 + \psi_3^2 q_3^2) \, d\Omega.$$

Сложив такие неравенства по всем треугольникам, получим

$$\iint\limits_{\Omega} \hat{\psi}^2 \, d\Omega \geqslant \eta_1 \sum_{x_i, y_j \in R} \psi_{ij}^2 \sum_{k=1}^{6} \iint\limits_{\Delta_{ij}^k \cap \Omega} (\hat{q}_{ij}^k)^2 \, d\Omega. \qquad (11)$$

Так как

$$(E_h \underline{\psi}, \underline{\psi}) = \sum_{x_i, y_j \in R} \psi_{ij}^2 \left(\sum_{k=1}^{6} \Bigg[\iint\limits_{\Delta_{ij}^k \cap \Omega} \chi^2 \, d\Omega + h^2 \iint\limits_{\Delta_{ij}} |\hat{q}_{ij}^k|^2 \, d\Omega \right) \leqslant$$

$$< \sum_{x_i, y_j \in R} \left(\sum_{k=1}^{6} \iint\limits_{\Delta_{ij}^k \cap \Omega} \psi_{ij}^2 \chi^2 \, d\Omega \right) + h^2 \sum_{x_i, y_j \in R} \psi_{ij}^2 \sum_{k=1}^{6} \iint\limits_{\Delta_{ij}^k \cap \Omega} \hat{q}_{ij}^2 \, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{x_i, y_j \in R} \left(\sum_{k=1}^{6} \iint\limits_{\Delta_{ij}^k \cap \Omega} [\hat{\psi}(x, y) - (x - x_i) \hat{\psi}_x - (y - y_j) \hat{\psi}_y]^2 \chi^2 d\Omega + \right.$$

$$+ \frac{h^2}{\eta_1} \iint\limits_{\Omega} \hat{\psi}^2 \, d\Omega < C \sum_{x_i, y_j \in R} \left(\sum_{k=1}^{6} \Bigg| \iint\limits_{\Delta_{ij}^k \cap \Omega} \hat{\psi}^2 \chi^2 d\Omega + h^2 \iint\limits_{\Delta_{ij}^k \cap \Omega} |\nabla \hat{\psi}|^2 \chi^2 d\Omega \Bigg| \right) +$$

$$+ \frac{h^2}{\eta_1} \iint\limits_{\Omega} \hat{\psi}^2 d\Omega \leqslant C \left[\iint\limits_{\Omega} \hat{\psi}^2 \chi^2 d\Omega + h^2 \iint\limits_{\Omega} (\chi^2 |\nabla \hat{\psi}|^2 + \hat{\psi}^2) \, d\Omega \right] \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \left[\iint\limits_{\Omega} \hat{\psi}^2 \chi^2 \, d\Omega + \iint\limits_{\Omega} |\nabla (\chi \hat{\psi})|^2 \, d\Omega \right].$$

Теорема доказана.

Рассмотрим задачу по определению собственных векторов ψ_k и собственных чисел λ_k:

$$\lambda_k (E_h \underline{\psi}_k, \underline{\psi}) = [\underline{\psi}_k, \underline{\psi}] \text{ (Здесь } [\underline{z}, \underline{w}] \overset{\text{def}}{=} \iint_\Omega \nabla (\chi \bar{z}) \nabla (\chi \bar{\psi})\, d\Omega). \tag{13}$$

Из приведенной оценки (6) следует, что λ_k лежат в пределах: $C_1 \leqslant \leqslant \lambda_k \leqslant C_2/h^2$. Будем считать $\underline{\bar{\psi}}_k$ ортонормированными в смысле $(E_h \underline{\psi}_k, \underline{\psi}_l)$. Далее для простоты записи ограничимся случаем уравнения Пуассона.

Сходимость метода Федоренко—Бахвалова. Последующее изложение совпадает с [3]. Пусть требуется определить $\tilde{v}$ из вариационно-разностной системы

$$\iint_\Omega \nabla \tilde{v} \nabla \tilde{\varphi}\, d\Omega = \iint_\Omega \nabla q \nabla \tilde{\varphi}\, d\Omega, \quad \forall \tilde{\varphi} \in H_h.$$

Назовем невязкой приближенного решения $\tilde{v}^*$ число

$$\alpha (\tilde{v}^*) = \sup_{\tilde{\varphi} \in H_h} \frac{\left| \iint_\Omega \nabla (\tilde{v}^* - v) \nabla \tilde{\varphi}\, d\Omega \right|}{\|\tilde{\varphi}\|_1} = \sup_{\tilde{\varphi} \in H_h} \frac{\left| \iint_\Omega \nabla \tilde{v}^* \nabla \tilde{\varphi}\, d\Omega - \iint_\Omega \nabla q \nabla \tilde{\varphi}\, d\Omega \right|}{\|\tilde{\varphi}\|_1}.$$

Пусть шаг сетки h имеет вид $h_l = \dfrac{h_0}{2^l}$, где h_0— фиксированное число. Будем рассматривать последовательность задач, зависящих от $l = \overline{1, L}$. Метод Федоренко-Бахвалова заключается в следующем. Пусть имеется процедура p_l уменьшения невязки на сетке шага $h = \dfrac{h_0}{2^l}$ в ε раз, где ε достаточно мало. Требуется построить процедуру p_{l+1} уменьшения невязки на сетке шага $\hbar = \dfrac{h}{2}$.

Впредь будем обозначать сеточную функцию на сетке шага h через заглавные буквы, а на сетке шага $\hbar$ через прописные. Итак, имеется процедура, по которой для уравнения

$$\iint_\Omega \nabla \tilde{V} \nabla \tilde{\Phi}\, d\Omega = \iint_\Omega \nabla Q \nabla \tilde{\Phi}\, d\Omega, \quad \forall \tilde{\Phi} \in H_h \tag{14}$$

и приближенного решения $\tilde{V}^*$ можно указать θ такое, что $\alpha(\theta) \leqslant \leqslant \varepsilon\alpha(\tilde{V}^*)$. Построим такую процедуру для задачи на сетке шага $\hbar$:

$$\iint_\Omega \nabla \tilde{v} \nabla \tilde{\varphi}\, d\Omega = \iint_\Omega \nabla q \nabla \tilde{\varphi}\, d\Omega, \quad \forall \tilde{\varphi} \in H_{\hbar}. \tag{15}$$

Найдем θ такое, что $\alpha(\theta) \leqslant \delta \|v\|_1$ и δ достаточно мало. Будем обозначать

$$[[P]]_h = \sup_{\tilde\Phi\in H_h} \frac{\left|\iint \nabla\tilde\Phi\nabla\tilde P d\Omega\right|}{|\tilde\Phi|_1} \quad \text{и} \quad [[p]]_h = \sup_{\tilde\varphi\in H_h} \frac{\left|\iint \nabla p\nabla\tilde\varphi d\Omega\right|}{|\tilde\varphi|_1}, \; P, p \in W_2^1.$$

Заметим, что $[[\tilde\Phi]]_h = |\tilde\Phi|_1$, $[[\tilde\varphi]]_h = |\tilde\varphi|_1$. Вначале сделаем m итераций по формулам:

$$\left(E_h \frac{\overset{\nu+1}{\vartheta} - \overset{\nu}{\vartheta}}{\tau}, \; \underline{\varphi}\right) + \iint_\Omega \nabla\overset{\nu}{\tilde v}\nabla\tilde\varphi d\Omega = \iint_\Omega \nabla q\nabla\tilde\varphi d\Omega,$$

$$\overset{0}{\tilde v} = 0, \; \nu = \overline{0, m-1}, \; \tau = \gamma h^2, \; \gamma = \text{const}, \quad \forall\tilde\varphi \in H_h.$$

Заметим, что для $\overset{m}{\underline{v}} - \underline{v}$ имеет место разложение по собственным векторам задачи (13):

$$\overset{m}{\underline{v}} - \underline{v} = \sum_{\lambda_k} v_k (1 - \lambda_k\tau)^m \underline{\psi}_k, \; v_k = (E_h \underline{\psi}_k, \underline{v}) \tag{16}$$

и

$$[\overset{m}{\underline{v}} - \underline{v}, \underline{\varphi}] = \sum_{\lambda_k} \lambda_k (1 - \lambda_k\tau)^m v_k\varphi_k, \; \varphi_k = (E_h \underline{\psi}_k, \underline{v}).$$

Теперь по процедуре уменьшения невязки найдем $\tilde\vartheta$ для задачи

$$\iint_\Omega \nabla\tilde V\nabla\tilde\Phi \, d\Omega = \iint_\Omega \nabla (q - \overset{m}{\tilde v})\nabla\tilde\Phi d\Omega$$

и приближенного решения $\tilde V^* = 0$. Тогда $\tilde\vartheta$ удовлетворяет условию:

$$\alpha(\tilde\vartheta) = \sup_{\tilde\Phi\in H_h} \left|\iint_\Omega \nabla(\tilde\vartheta - \tilde V)\nabla\tilde\Phi d\Omega\right| / |\tilde\Phi|_1 < \varepsilon[[\tilde V^* - \tilde V]]_h = \varepsilon[[q - \overset{m}{\tilde v}]]_h.$$

В качестве $\tilde\theta$ возьмем $\tilde\vartheta + \overset{m}{\tilde v}$, учитывая, что каждая сеточная функция на сетке h может рассматриваться как сеточная функция на сетке $\tilde h$, если положить $\tilde v(x_i, y_j)|_{(x_i, y_j)\in R_h} = \vartheta(\tilde x_i, y_j)$.

Оценим невязку $\alpha(\theta)$

$$\alpha(\tilde\theta) = \sup_{\tilde\varphi\in H_h} \left|\iint_\Omega \nabla(\tilde\vartheta + \overset{m}{\tilde v} - \tilde v)\nabla\tilde\varphi d\Omega\right| / |\tilde\varphi|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\tilde\varphi\in H_h} \left|\iint_\Omega \nabla(\tilde\vartheta - \tilde V)\nabla\tilde\varphi d\Omega\right| / |\tilde\varphi|_1 + \sup_{\tilde\varphi\in H_h} \left|\iint_\Omega \nabla(\tilde V - \tilde v + \overset{m}{\tilde v})\nabla(\tilde\Phi - \tilde\varphi) d\Omega\right| / |\tilde\varphi|_1 \equiv$$

$$\equiv J_1 + J_2,$$

так как

$$\iint\limits_{\Omega} \nabla (\tilde{V} + \overset{m}{\tilde{v}} - \tilde{v}) \nabla \bar{\Phi}\, d\Omega = \iint\limits_{\Omega} \nabla q \nabla \bar{\Phi}\, d\Omega - \iint\limits_{\Omega} \nabla q \nabla \bar{\Phi}\, d\Omega = 0.$$

Выберем $\bar{\Phi}(\bar{\varphi})$ как решение вариационно-разностного уравнения

$$\iint\limits_{\Omega} \nabla \tilde{Q} \nabla \tilde{\Phi}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \nabla \tilde{Q} \nabla \bar{\varphi}\, d\Omega, \quad \forall \tilde{Q} \in H_h. \tag{17}$$

Взяв $\tilde{Q} = \bar{\Phi}$, получаем

$$\|\tilde{\Phi}\|_1 \leqslant C\, \|\bar{\varphi}\|_1. \tag{18}$$

Получим оценку $\|\tilde{\Phi} - \bar{\varphi}\|_0 \leqslant Ch\, \|\tilde{\varphi}\|_1$.

Введем произвольные Q и запишем (17) так

$$-\iint\limits_{\Omega} (\bar{\Phi} - \bar{\varphi})\, \Delta Q d\Omega = \iint\limits_{\Omega} \nabla (\Phi - \bar{\varphi}) \nabla Q d\Omega = \iint\limits_{\Omega} \nabla (Q - \tilde{Q}) \nabla (\Phi - \tilde{\varphi})\, d\Omega.$$

Взяв в качестве Q решение задачи $\Delta Q = (\tilde{\Phi} - \bar{\varphi})$ в Ω при $\theta|_\Gamma = 0$, а в качестве $\tilde{Q}$ — его приближение вариационно-разностным методом, получим

$$\int\limits_{\Omega} (\bar{\Phi} - \bar{\varphi})^2\, d\Omega \leqslant (\|\tilde{\Phi}\| + \|\tilde{\varphi}\|)_1\, h\, \|\bar{\Phi} - \bar{\varphi}\|_0 \leqslant Ch\, \|\bar{\varphi}\|_1 \|\Phi - \varphi\|_0,$$

т. е. требуемое неравенство.

Оценим

$$J_1 = \sup_{\tilde{\varphi} \in H_h} \frac{\left| \iint\limits_{\Omega} \nabla (\bar{\theta} - \tilde{V}) \nabla \tilde{\Phi} d\Omega \right|}{\|\bar{\varphi}\|_1} =$$

$$= \sup_{\varphi \in H_h} \frac{\left| \iint\limits_{\Omega} \nabla (\bar{\theta} - \tilde{V}) \nabla \bar{\Phi}\, d\Omega \right|}{\|\Phi\|_1} \frac{\|\Phi\|_1}{\|\varphi\|_1} \leqslant C\varepsilon \cdot [[\tilde{V}]]_h \leqslant C\varepsilon\, (\|q\|_1 + \|\overset{m}{\bar{v}}\|_1) \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon\, (\|q\|_1 + \|\tilde{v}\|_1) \leqslant C_1 \varepsilon\, \|q\|_1.$$

Здесь мы воспользовались (17) и (18).

В силу (17) имеем $\iint\limits_{\Omega} \nabla \tilde{V} \nabla (\bar{\Phi} - \tilde{\varphi})\, d\Omega = 0$. Поэтому

$$\left| \iint\limits_{\Omega} \nabla (\overset{m}{\tilde{v}} - v) \nabla (\tilde{\Phi} - \bar{\varphi})\, d\Omega \right| / \|\tilde{\varphi}\|_1 = \frac{1}{\|\tilde{\varphi}\|_1} \sum_{\lambda_k} \lambda_k v_k (1 - \lambda_k \tau)^m (\Phi - \varphi)_k$$

(см. (16)), где $(\Phi-\varphi)_k = (E_h(\underline{\Phi}-\underline{\varphi}), \underline{\psi}_k)$,

$$J_2 \leqslant \frac{1}{\|\tilde{\varphi}\|_1}\left\{\sum_{\lambda_k > \frac{\varkappa}{h^2}} v_k^2 \lambda_k (1-\varkappa)^m \sum_{\lambda_k > \frac{\varkappa}{h^2}} (\Phi-\varphi)_k^2 \lambda_k\right\}^{1/2} +$$

$$+\sqrt{\frac{\varkappa}{\tau}\frac{1}{\|\tilde{\varphi}\|_1}} \sum_{\lambda_k > \frac{\varkappa}{h^2}} |v_k| \sqrt{\lambda_k} (\Phi-\varphi)_k \leqslant$$

$$\leqslant (1-\varkappa)^m \frac{\|\tilde{v}\|_1 \|\tilde{\Phi}-\tilde{\varphi}\|_h}{\|\tilde{\varphi}\|_1} + \sqrt{\frac{\varkappa\gamma}{\tau}\frac{1}{\|\tilde{\varphi}\|_h}} \sqrt{\sum_{\lambda_k} v_k^2 \lambda_k} \sqrt{\sum (\Phi-\varphi)_k^2}$$

и так как по теореме 3

$$\sum (\Phi-\varphi)_k^2 = (E_h(\underline{\Phi}-\underline{\varphi}), \underline{\Phi}-\underline{\varphi}) \leqslant C\,(\|\tilde{\Phi}-\tilde{\varphi}\|_0^2 + h^2\|\tilde{\Phi}-\tilde{\varphi}\|_1^2),$$

то

$$J_2 < (1-\varkappa)^m C \|\tilde{v}\|_h + \sqrt{\frac{\varkappa\gamma}{\gamma h^2}} Ch \frac{\|\tilde{\varphi}\|_1}{\|\tilde{\varphi}\|_1}\|\tilde{v}\|_1 \equiv \delta \|\tilde{v}\|_h$$

(см. (18)), т. е. $J_1 + J_2 \leqslant (\delta + C_1\varepsilon)\|\tilde{v}\|_h \equiv \delta_1 \|\tilde{v}\|_h$, где δ мало, если m велико, а $\varkappa$ мало. Итак, $\alpha(\tilde{\theta}) \leqslant \delta_1 \|\tilde{v}\|_h$.

Взяв в качестве $q_1 = q - \tilde{\theta}$ и проделав всю описанную процедуру для $q_1 = q - \tilde{\theta}$, найдем $\tilde{\theta}^*$ такую, что

$$\alpha(\tilde{\theta}^*) = \sup_{\tilde{\varphi}\in H_h} \left|\iint_\Omega \nabla \tilde{\theta}^* \nabla \tilde{\varphi}\, d\Omega - \iint_\Omega \nabla (q-\tilde{\theta}) \nabla \tilde{\varphi}\right| / \|\tilde{\varphi}\|_1 < (\delta + C_1\delta_1)[[q-\tilde{\theta}]]_h \equiv$$

$$\equiv \delta_2 [[q-\tilde{\theta}]]_h = \delta_2 \sup_{\tilde{\varphi}\in H_h} \left|\iint_\Omega \nabla q \nabla \tilde{\varphi}\, d\Omega - \iint_\Omega \nabla\tilde{\theta} \nabla \tilde{\varphi}\, d\Omega\right| / \|\tilde{\varphi}\|_1 \leqslant \delta_2\delta_1 \|\tilde{v}\|_1.$$

Возьмем $\delta_1\delta_2 < \varepsilon$ (это можно сделать при малом ε).

Это неравенство и доказывает сходимость метода (см. [3]).

Институт социально-экономических
проблем АН СССР

Поступила 2.XII.1980

Լ. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Դիրիխլեի խնդրի դեպքում երկչափանի էլիպտիկ հավասարման համար Ֆեդորենկո–Բախվալովի մեթոդը (*ամփոփում*)

Աշխատանքում երկրորդ կարգի էլիպտիկ հավասարման մոտավոր լուծման համար կառուցված է վարիացիոն-տարբերական սխեմա։ Հավասարումը տրված է հարթ եզրագծով երկչափանի տիրույթում, իսկ եզրային պայմանը համապատասխանում է Դիրիխլեի խնդրին։ Որպես կոորդինատային ֆունկցիաներ վերցված են կանոնավոր ցանցում տրված ցանցային ֆունկցիաների կտոր առ կտոր գծային լրացումների և տիրույթում դրական, իսկ եզրագծի վրա զրո արժեքներ ընդունող հարթ ֆունկցիաների արտադրյալները։ Ապացուցված է սխեմայի զուգամիտությունը և այն փաստը, որ ցանցային հավասարումները կարելի է լուծել Ֆեդորենկո-Բախվալովի մեթոդով։

L. A. OGANESIAN. *The Fedorenko-Bakhvalov's method for Dirichlet's problem for elliptic equation in two dimensions* (summary)

In order to approximate the Dirichlet's problem for an elliptic equation in a two-dimensioned domain with smooth boundary a finite element scheme on the regular grid is constructed. The basis-functions are the product of two functions, of which one is picewise linear extension of the grid-function, and the other is a smooth function, which is zero on the boundary and positive in the domain.

In the present paper the convergence of the scheme is proved. It is also noted that Fedorenko-Bakhvalov's method can be used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Ереван, Изд-во АН Арм.ССР, 1979.
2. *Ю. К. Демьянович.* О сеточных аппроксимациях в негладких областях, в сб. «Вариационно-разностные методы в математической физике», Новосибирск, 1976.
3. *Г. П. Астраханцев.* Об одном итерационном методе решения сеточных эллиптических задач, ЖВМиМФ, 11, № 2, 1971.