ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 2, 1982 Математика

Э. К. ДИЛАНЯН

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ М. М. ДЖРБАШЯНА

1. Первоначально в работе [1], а затем в монографии [2] М. М. Джрбашяном была построена теория гармонического анализа в собственно комплексной плоскости, а именно, на конечной системе лучей, исходящих из точки $z=0$. Основой для этого послужили замечательные асимтотические свойства целой функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}\ (\rho>0,\ \mu\in C).$$

Эта теория послужила основой для установления общих теорем типа теорем Винера-Пэли — о параметрическом представлении широких классов как целых функций произвольного порядка и нормального типа, так и для классов функций, аналитических в угловых областях (см., напр., [2]).

Поскольку в данной работе мы существенно опираемся на один из этих результатов, приведем здесь его формулировку.

Пусть $\frac{1}{2}<\alpha<+\infty$,

$$\Delta(\alpha;\ 0)=\left\{z;\ |\arg z|<\frac{\pi}{2\alpha},\ 0<|z|+\infty\right\}$$

— угловая область на конечной комплексной плоскости C. Обозначим через L_α границу угловой области $\Delta(\alpha;\ 0)$, а через $L_{2,-\omega}(L_\alpha)\,(-1<\omega<1)$ — класс функций $V(\xi)$, измеримых на L_α и удовлетворяющих условию

$$\|V\|_{2,-\omega}=\left\{\int_{L_\alpha}|V(\xi)|^2|\xi|^{-\omega}\,|d\xi|\right\}^{1/2}<+\infty,$$

Следующая теорема была установлена М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [3] (см. также [2], стр. 431) и является существенным обобщением теоремы Винера-Пэли о параметрическом представлении класса H_2 в полуплоскости.

Теорема А. *Пусть*

$$\frac{1}{2}<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1,\ \rho\geqslant\frac{\alpha}{2\alpha-1},$$

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\ \text{и}\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

1°. *Класс $H_2[\alpha; \omega]$ функций $F(z)$, голоморфных в угловой области $\Delta(\alpha; 0)$ удовлетворяющих условию*

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega} dr \right\} < +\infty,$$

совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\gamma} E_\rho(z\xi; \mu) V(\xi) d\xi; \quad z \in \Delta(\alpha; 0), \tag{1}$$

где $V(\xi)$ — произвольная функция из класса $L_{2, -\omega}(L_\gamma)$.

2°. *Если $F(z) \in H_2[\alpha; \omega]$, то справедлива формула*

$$L_2(z; F) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\gamma} E_\rho(z\xi; \mu) V(\xi; F) d\xi = F(z); \tag{2}$$

$$z \in \Delta(\alpha; 0),$$

где $V(\xi; F)$ также принадлежит классу $L_{2, -\omega}(L_\gamma)$ и почти всюду на $(0; +\infty)$ определяется формулами

$$V(e^{\pm i \frac{\pi}{2\gamma}} \tau; F) = \tau^{\rho(\mu-1)} \frac{e^{\mp i \frac{\pi}{2}\left(2 + \frac{1}{\gamma} - \mu\right)}}{\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\mp i\tau\rho t} - 1}{\mp it} \times$$

$$\times F(e^{\mp i \frac{\pi}{2\alpha}} t^{1/\rho}) t^{\mu-1} dt. \tag{3}$$

3°. *Формула*

$$L_2^*(re^{i\varphi}; F) \equiv \frac{r^{1-\rho\mu}}{2\pi\rho i} \frac{d}{dr} r^{\rho\mu} \int_{L_\gamma} E_\rho(re^{i\varphi}\xi; \mu+1) V(\xi; F) d\xi = F(re^{i\varphi})$$

$$\left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}, \ 0 < r < +\infty\right) \tag{4}$$

справедлива для всех r при $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ и почти для всех r при $\varphi = \pm \frac{\pi}{2\alpha}$.

Замечание. Отметим, что когда $\rho > \frac{\alpha}{2\alpha - 1}$, в представлении (1) функция $V(\xi) \in L_{2, -\omega}(L_\gamma)$ не определяется единственным образом, она определяется из условия

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\gamma; 0)} \frac{V(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\gamma; 0)} \frac{V(\xi; F)}{\xi - z} d\xi; \tag{5}$$

$$z \in \Delta(\gamma; 0)$$

(см. теоремы 7.6 и 7.9 монографии [2], стр. 419, 446). Ниже приводим одну лемму и теорему, которые нами будут использованы в дальнейшем.

Лемма А. (см. [4], лемму 1). *Пусть* $f \in L_{2,-\omega}(\Gamma(\nu))$, *где* $\Gamma(\nu)$ — *луч, исходящий из начала координат:* $\Gamma(\nu) = \{re^{i\nu};\ 0 \leqslant r < +\infty\}$; *причем* $\Gamma(\nu)$ *пробегается в направлении возрастания* r. *Тогда функция*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\nu)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi;\quad z \in \mathbf{C} \setminus \Gamma(\nu),$$

аналитична в области $\mathbf{C} \setminus \Gamma(\nu)$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{\nu < \varphi < \nu + 2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2\, r^{-\omega}\, dr \right\}^{1/2} \leqslant B_{2,\omega} \|f\|_{2,-\omega},$$

где $B_{2,\omega} \in (0; +\infty)$ *не зависит от* f. *Более того, функция* F *почти всюду на* $\Gamma(\nu)$ *имеет угловые граничные значения* $F^{(-)}(\xi)$ *и* $F^{(+)}(\xi)$, $\xi \in \Gamma(\nu)$, *соответственно слева и справа от луча* $\Gamma(\nu)$, *причем* $F^{(\pm)}(re^{i\nu})\, r^{-\omega/2} \in L_2(0, +\infty)$ *и*

$$f(\xi) = F^{(-)}(\xi) - F^{(+)}(\xi)\ \text{п.в. на}\ \Gamma(\nu). \tag{6}$$

Пусть $\Delta(\alpha; \nu)$ — угловая область на плоскости $\mathbf{C}$, определяемая таким образом:

$$\Delta(\alpha; \nu) = \begin{cases} |\operatorname{Arg} z - \nu| < \dfrac{\pi}{2\alpha}, & \text{при}\ \dfrac{1}{2} < \alpha < +\infty; \\ \arg z = \nu, & \text{при}\ \alpha = +\infty. \end{cases}$$

$H_{2,\omega}[\Delta(\alpha; \nu)]$ — класс голоморфных в $\Delta(\alpha; \nu)$ $\left(\dfrac{1}{2} < \alpha < +\infty\right)$ функций F, для которых

$$\|F\|_{H_{2,\omega}[\Delta(\alpha;\nu)]} = \sup_{\nu - \frac{\pi}{2\alpha} < \varphi < \nu + \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega}\, dr \right\}^{1/2} < +\infty. \tag{7}$$

Справедлива следующая теорема (см. [11], теорему 7.5).

Теорема В. *Если* $F(z) \in H_{2,\omega}[\Delta(\alpha; \omega)]$, *то*

1°. *Почти всюду на* $\partial\Delta(\alpha; \nu)$ *функция* F *имеет некасательные значения* $F(\xi)$, *причем*

$$\|F\|_{H_{2,\omega}[\Delta(\alpha;\nu)]} = \left\{ \int_{\partial\Delta(\alpha;\nu)} |F(\xi)|^2 |\xi|^{\omega} |d\xi| \right\}^{1/2} < +\infty$$

и справедливы равенства

$$\lim_{\varphi \to \nu \pm \frac{\pi}{2\alpha}} \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi}) - F(re^{i\left(\nu \pm \frac{\pi}{2\alpha}\right)})|^2 r^{\omega}\, dr = 0.$$

2°. *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha;\nu)} \frac{F(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \begin{cases} F(z), & \text{при}\ z \in \Delta(\alpha; \nu); \\ 0, & \text{при}\ z \in \mathbf{C} \setminus \overline{\Delta(\alpha; \nu)}, \end{cases}$$

где $\partial\Delta(\alpha; \nu)$ пробегается в положительном относительно $\Delta(\alpha; \nu)$ направлении.

2. М. М. Джрбашяном были также введены весьма общие классы функций, определенных на конечной системе лучей и угловых областей, имеющих общую вершину—начало координат (см. [1], а также [2], гл. VII). Им же были даны параметрические представления этих классов. В данной работе мы дадим другие параметрические представления таких классов. В частности, нами будет получена также одна теорема единственности, которая иным способом была установлена А. Е. Аветисяном [5]. Чтобы определить эти классы функций, введем обозначения.

Предположим, что совокупности чисел

$$\{\nu_k\}_1^N;\ 0<\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_N\leqslant 2\pi,$$

$$\{\alpha_k\}_1^N;\ \frac{1}{2}<\alpha_k\leqslant+\infty\ (k=1,\cdots,N)\ (N\geqslant 1), \tag{8}$$

таковы, что всевозможные пересечения $\overline{\Delta(\alpha_{k_1}\cdot\nu_{k_1})}\cap\overline{\Delta(\alpha_{k_2};\nu_{k_2})}\ (k_1\neq k_2)$ замкнутых множеств $\overline{\{\Delta(\alpha_k;\nu_k)\}}_1^N$ содержат лишь единственную точку—начало координат.

Легко заметить, что это условие эквивалентно следующей цепочке неравенств:

$$\nu_{k+2}-\nu_k>\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_{k+1}}\right)\ (k=1,\cdots,N), \tag{9}$$

где $\nu_{N+1}=\nu_1\pm 2\pi$ и $\alpha_{N+1}=\alpha_1$.

В принятых условиях на плоскости C рассмотрим, далее, точечное множество

$$M\{\nu_1,\cdots,\nu_N;\alpha_1,\cdots,\alpha_N\}\equiv M\{\nu;\alpha\}=\bigcup_{k=1}^{N}\Delta(\alpha_k;\nu_k),$$

компонентами которого служат лучи, исходящие из начала координат (если среди чисел α_k имеются равные $+\infty$), и угловые области с вершиной в той же точке $z=0$ (если среди чисел имеются отличные от $+\infty$).

Условимся через $\tilde{\Delta}(\alpha_k;\nu_k)$ обозначать множества точек угла $\Delta(\alpha_k;\nu_k)$ или пустое множество, если соответственно $\frac{1}{2}<\alpha_k<+\infty$ или $\alpha_k=+\infty$.

Если хотя бы одно из чисел $\{\alpha_k\}_1^N$ отлично от $+\infty$, то открытое множество

$$\tilde{M}\{\nu;\alpha\}=\bigcup_{k=1}^{N}\tilde{\Delta}(\alpha_k;\nu_k)$$

содержит совокупность всех внутренних точек множества $M\{\nu;\alpha\}$. Обозначим через

$$e_k^* = \begin{cases} \left\{\varphi;\ |\varphi - \nu_k| < \dfrac{\pi}{2\alpha_k}\right\}, & \text{при} \quad \dfrac{1}{2} < \alpha_k < +\infty, \\ \{\varphi;\ \varphi = \nu_k\}, & \text{при} \quad \alpha_k = +\infty \ (k = 1, \cdots, N), \end{cases}$$

$$\mathrm{E}^*\{\nu;\ \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{N} e_k^*.$$

Условимся говорить, что функция $F(z)$ принадлежит классу $H_2^{(\nu_1,\cdots,\nu_N)}[\alpha_1,\cdots,\alpha_N;\ \omega] \equiv H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$ $(-1 < \omega < 1)$, если она определена на множестве $M\{\nu;\ \alpha\}$ и удовлетворяет условию

А) при $\varphi \in \mathrm{E}^*\{\nu,\ \alpha\}$

$$I_F(\varphi) = \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega}\, dr \leqslant A_F < +\infty,$$

где A_F не зависит от φ. В том случае, когда множество $\widetilde{M}\{\nu;\ \alpha\}$ не пусто, функция $F(z)$ должна удовлетворять также дополнительному условию

Б) $F(z)$ голоморфна на каждой компоненте $\widetilde{M}\{\nu;\ \alpha\}$, т. е. в каждой угловой области $\Delta(\alpha_k;\ \nu_k)$ такой, что $\left(\dfrac{1}{2} < \alpha_k < +\infty\right)$.

Обозначим через

$$\delta_n = \frac{1}{2}(\nu_{n+1} + \nu_n) + \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) + \pi \tag{10}$$

и

$$\frac{\pi}{\beta_n} = (\nu_n - \nu_{n+1}) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) + 2\pi, \quad n = 1, \cdots, N,$$

где

$$\nu_{N+1} = \nu_1 + 2\pi \ \text{и} \ \alpha_{N+1} = \alpha_1.$$

Легко заметить, что δ_n является биссектрисой угловой области $\Delta_n^* = \mathbf{C} \setminus \Delta_n$, где

$$\Delta_n = \left\{ z;\ \nu_n + \frac{\pi}{2\alpha_n} < \arg z < \nu_{n+1} - \frac{\pi}{2\alpha_{n+1}} \right\}, \quad (n = 1, \cdots, N),$$

а $\dfrac{\pi}{\beta_n}$ — раствором этого угла.

Теперь уже мы можем сформулировать и доказать следующую теорему о параметрическом представлении класса $H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$.

Теорема 1. *Пусть* $-1 < \omega < 1$, *параметры* $\{\nu_k\}_1^N$ *и* $\{\alpha_k\}_1^N$ *определены по* (8) *и удовлетворяют условию* (9),

$$\rho_k > \frac{\beta_k}{2\beta_k - 1}, \quad \frac{1}{\gamma_k} = \frac{1}{\beta_k} + \frac{1}{\rho_k}, \quad \mu_k = \frac{1 + \omega + \rho_k}{2\rho_k} \ (k = 1, \cdots, N),$$

где β_k *и* δ_k *определены по* (10). *Имеют место следующие утверждения:*

1°. *Класс* $H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$ *совпадает с множеством функций, допускающих представление вида*

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k)}E_{\rho_k}(z\xi;\ \mu_k)\,V_k(\xi)\,d\xi, \tag{11}$$

$$z\in\widetilde{M}\{\nu;\ \alpha\},$$

где $V_k(\xi)$ — *произвольные функции из класса* $L_{2,-\infty}(\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k))$, $(k=1,\cdots,\ N)$.

2°. *Если* $F(z)\in H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$, *то справедлива формула*

$$F(re^{i\varphi})=\sum_{k=1}^{N}\frac{1^{-\rho_k\mu_k}}{2\pi\rho_k i}\frac{d}{dr}r^{\rho_k\mu_k}\int\limits_{\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k)}E_{\rho_k}(e^{i\varphi}r\xi;\ \mu_{k+1})\,V_k(\xi;\ F)\,d\xi, \tag{12}$$

$$\left(|\varphi-\delta_k|\leqslant\frac{\pi}{2\beta_k},\ k=1,\cdots,\ N\right),$$

где $V_k(\xi;\ F)$ — *функции из класса* $L_{2,-\infty}(\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k))$ *и почти всюду на* $(0;\ +\infty)$ *определяются формулами*

$$V_k\left(e^{i\left(-\delta_k\pm\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)}\tau;\ F\right)=\tau^{\rho_k(\mu_k-1)}\frac{e^{\mp i\frac{\pi}{2}\left(2+\frac{1}{\gamma_k}-\mu_k\mp\delta_k\right)}}{\rho_k}\frac{d}{dr}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{\mp i\tau\rho t}-1}{\mp it}\times \tag{13}$$

$$\times F\left(e^{i\left(\delta_k\mp\frac{\pi}{2\beta_k}\right)}t^{1/\rho_k}\right)dt\quad(k=1,\cdots,\ N).$$

При этом формула (12) *справедлива для всех* $r\in(0,\ +\infty)$, *если* $|\varphi-\delta_k|<\frac{\pi}{2\beta_k}$ *и почти для всех* $r\in(0,\ +\infty)$, *если* $\varphi=\delta_k\pm\frac{\pi}{2\beta_k}$ $(k=1,\cdots,\ N)$.

Если $\widetilde{M}\{\nu;\ \alpha\}$ *не пусто, то справедлива также формула*

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k)}E_{\rho_k}(z\xi;\ \mu_k)\,V_k(\xi;\ F)\,d\xi, \tag{14}$$

$$z\in\widetilde{M}\{\nu;\ \alpha\}.$$

Доказательство 2°. Пусть $F(z)\in H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$. Если $\alpha_k=+\infty$, то по определению класса $H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$ $F(re^{i\nu_k})\in L_{2,-\infty}(\Gamma(\nu_k))$. А если $\alpha_k<+\infty$, то существуют некасательные граничные значения $F\left(\nu_k\pm\frac{\pi}{2\alpha_k}\right)\in L_{2,-\infty}\left(\Gamma\left(\nu_k\pm\frac{\pi}{2\alpha_k}\right)\right)$ $(k=1,\cdots,\ N)$ (см. теорему В). Воспользуемся теперь некоторыми рассуждениями из работы [6].

Рассмотрим следующие множества индексов

$$J_N=\{n,\ \text{если}\ \alpha_n<+\infty\}$$

и

$$\overset{*}{J}_N=\{n,\ \text{если}\ \alpha_n=+\infty\}.$$

Ясно, что при этом $J_N\cup\overset{*}{J}_N=\{n\}_1^N$ и $J_N\cap\overset{*}{J}_N=\varnothing$. Кроме того,

$$\{\bigcup_{n\in J^*_N}\Gamma(\nu_n)\}\cup(\bigcup_{n\in J_\Gamma}\Delta(\alpha_n;\ \nu_n))\equiv M\{\nu;\ \alpha\}.$$

Если $k\in J_N$, то обозначим

$$\Phi_k^{(\pm)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\left(\nu_k\pm\frac{\pi}{2\alpha_n}\right)}\frac{F(\xi)}{\xi-z}\,d\xi, \tag{15}$$

$$z\in\mathbf{C}\setminus\Gamma\left(\nu_k\pm\frac{\pi}{2\alpha_k}\right),$$

а если $k\in J^*_N$, то положим

$$\Psi_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\nu_k)}\frac{F(\xi)}{\xi-z}\,d\xi,\ z\in\mathbf{C}\setminus\Gamma(\nu_k). \tag{16}$$

Пусть $\Psi_k^{(-)}$ и $\Psi_k^{(+)}$ — некасательные граничные значения $\Psi_k(z)$ на $\Gamma(\nu_k)$ соответственно слева и справа от этого луча. Если взять

$$\varphi_k^{(+)}(z)=\begin{cases}\Psi_k(z);\ z\in\mathbf{C}\setminus\Gamma(\nu_k)\\ \Psi_k^{(+)}(z);\ z\in\Gamma(\nu_k),\end{cases}$$

$$\varphi_k^{(-)}(z)=\begin{cases}\Psi_k(z);\ z\in\mathbf{C}\setminus\Gamma(\nu_k)\\ \Psi_k^{(-)}(z);\ z\in\Gamma(\nu_k),\end{cases}$$

то по лемме А имеет место следующее равенство:

$$\sum_{k\in J^*_N}[\varphi_k^{(-)}(z)-\varphi_k^{(+)}(z)]=F(z),\ z\in\bigcup_{k\in J^*_N}\Gamma(\nu_k).$$

Имея ввиду это и теорему В можем написать, что

$$\sum_{k\in J_N}[\Phi_k^{(-)}(z)-\Phi_k^{(+)}(z)]+\sum_{k\in J^*_N}[\varphi_k^{(-)}(z)-\varphi_k^{(+)}(z)]=F(z) \tag{17}$$

$$z\in M\{\nu;\ \alpha\}.$$

Положим

$$G^{(\pm)}(z)=\begin{cases}\Phi_k^{(\pm)}(z),\ \text{если } k\in J_N\\ \varphi_k^{(\pm)}(z),\ \text{если } k\in J^*_N\end{cases}$$

и

$$F_k(z)=G_{k+1}^{(-)}(z)-G_k^{(+)}(z).$$

Легко заметить, что $F_k(z)\in H_{2,-\infty}[\Delta\,\beta_k;\ \delta_k)]$. Тогда из (17) заключаем, что имеет место равенство

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}F_k(z),\ z\in M\{\nu;\ \alpha\}, \tag{18}$$

где $F_k(z)\in H_{2,\infty}\ [\Delta(\beta_k;\ \delta_k)]\ (k=1,\cdots,N)$.

Рассмотрим функции $\tilde{F}_k(z)=F_k(ze^{i\delta_k})$. Легко проверить, что $\tilde{F}_k(z)\in H_2[\beta_k;\ \omega]$. По формуле (4) теоремы А имеет место представление

$$\tilde{F}_k(re^{i\varphi}) = \frac{r^{1-\rho_k\mu_k}}{2\pi\rho_k i} \frac{d}{dr} r^{\rho_k\mu_k} \int\limits_{L_{\gamma_k}} E_{\rho_k}(re^{i\varphi}\xi;\ \mu_k+1)\ \tilde{V}_k(\xi; F)\, d\xi \tag{19}$$

$$|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\beta_k},\ k=1,\cdots, N,$$

где $\tilde{V}_k(\xi; F)$ — функции из класса $L_{2,-\omega}(L_{\gamma_k})(k = 1,\cdots, N)$. В этой формуле заменим $re^{i\varphi}$ через $re^{i\varphi}e^{-i\delta_k} = re^{i(\varphi-\delta_k)}$. Тогда получим

$$F_k(re^{i\varphi}) = -\frac{r^{1-\rho_k\mu_k}}{2\pi\rho_k i} \frac{d}{dr} r^{\rho_k\mu_k} \int\limits_{L_{\gamma_k}} E_{\rho_k}(e^{-i\delta_k}e^{i\varphi}r\xi;\ \mu_k+1)\ \tilde{V}_k(\xi; F)\, d\xi. \tag{20}$$

Если заменить тут $e^{-i\delta_k}\ \xi \sim \xi$, то получим

$$F_k(re^{i\varphi}) = \frac{r^{1-\rho_k\mu_k}}{2\pi\rho_k i} \frac{d}{dr} r^{\rho_k\mu_k} \int\limits_{\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k)} E_{\rho_k}(re^{i\varphi}\xi;\ \mu_k+1)\ V_k(\xi; F)\, d\xi,$$

$$\left(|\varphi-\delta_k| \leqslant \frac{\pi}{2\beta_k},\ k=1,\cdots, N\right),$$

где уже $V_k(\xi; F) \in L_{2,-\omega}(\partial\Delta(\gamma_k;\ -\delta_k))$.

Имея в виду (20) и (18) окончательно получится представление (12). В силу (19) и формулы (3) теоремы А, получим обращение (13). Утверждение 2° доказано. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично. Теорема доказана.

Следует отметить, что при $\rho_k > \dfrac{\beta_k}{2\beta_k - 1}$ $(k=1,\cdots, N)$ представление вида (11) не определяется единственным образом по функции $F(z)$. Это видно из доказательства теоремы и из замечания, приведенного после теоремы A. Если для данного индекса к $\rho_k > \dfrac{\beta_k}{2\beta_k - 1}$, то в представлении (19) функция $F_k(z)$ в области $\Delta(\beta_k; \delta_k)$ не представляется единственным способом. Значит для единственности представления (11) необходимо нарушение этого условия для всех k. А еще точнее, числа $\{\nu_k\}_1^N$ и $\{\alpha_k\}_1^N$ должны быть таковы, чтобы для любого n кроме условий (9) имели место и следующие условия:

а) все числа α_n конечны;

б) $$\nu_{n+1} - \nu_n - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_n}\right) = \text{const}\ (n = 1,\cdots, N). \tag{21}$$

Постоянную в (21) обозначим $\dfrac{\pi}{\rho}$.

Имея в виду вышесказанное, можно условие (21) принять как необходимое и достаточное условие единственности представления (11). Именно справедлива следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть параметры* $\{\nu_k\}_1^N$ *и* $\{\alpha_k\}_1^N$ *определены по* (8), *удовлетворяют условиям* (9), (22), $\{\delta_k\}_1^N$ *и* $\{\beta_k\}_1^N$ *определены по* (10),

$$\mu=\frac{1+\rho+\omega}{2\rho},\ \frac{1}{\gamma_k}=\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\beta_k};\ k=1,\cdots,N;$$

и пусть $F(z)$ — произвольная функция из $H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$. При этих условиях $F(z)$ единственным образом можно представить в виде

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)}E_\rho(z\zeta;\ \mu)\,V_k^*(\zeta)\,d\zeta,\tag{22}$$

$$z\in\overline{M}\{\nu;\ \alpha\},$$

где $V_k^*(\zeta)$ — функции из $L_{2,-\omega}\left(\Gamma\left(-\delta_k+\dfrac{\pi}{2\gamma_k}\right)\right)$ $(k=1,\cdots,N)$.

Имеет место и формула обращения

$$V_k^*\left(e^{i\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)}\tau\right)=\tau^{\rho(\mu-1)}\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(2+\frac{1}{\gamma_k}-\mu+\delta_k\right)}}{\rho}\frac{d}{dr}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{it^\rho t}-1}{it}\times$$

$$\times F\left(e^{i\left(\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)}t^{1/\rho}\right)t^{\mu-1}\,dt-\tau^{\rho(\mu-1)}\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\left(2+\frac{1}{\gamma_k}-\mu-\delta_k\right)}}{\rho}\times$$

$$\times\frac{d}{dr}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-i\tau^\rho t}-1}{-it}F\left(e^{i\left(\delta_k-\frac{\pi}{2\beta_k}\right)}t^{1/\rho}\right)t^{\mu-1}\,dt.\tag{23}$$

Доказательство. Пусть $F(z)\in H_2^{(\nu)}[\alpha;\ \omega]$. Прежде чем убедиться в единственности представления (22), докажем единственность представления (18)

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}F_k(z),$$

где $F_k(z)\in H_2[\Delta(\beta_k;\ \delta_k)]$ $(k=1,\cdots,N)$.
Пусть

$$F_1(z)+F_2(z)+\cdots+F_N(z)=0\ \text{п.в. на}\ M\{\nu;\ \alpha\}.$$

Отсюда, в частности, можем написать

$$F_1(z)=-\sum_{n=2}^{N}F_n(z).\tag{24}$$

Так как $F_1(z)\in H_{2,\omega}[\Delta(\beta_1,\ \delta_1)]$, то в силу теоремы В имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1)}\frac{F_1(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=0,\ z\in\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1),\tag{25}$$

где $\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1)=\mathbf{C}\setminus\overline{\Delta(\beta_1;\ \delta_1)}$.

С другой стороны, $\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1)\subset\bigcap\limits_{k=2}^{N}\Delta(\beta_k;\ \delta_k)$ и $F_k\in H_{2,\omega}[\Delta(\beta_k;\ \delta_k)]$. Значит сужение каждой функции $F_k\,(k=2,\cdots,N)$ на область $\Delta^*(\beta_1;\ \delta_1)$

принадлежит классу $H_{2,\omega}[\Delta^*(\beta_1;\delta_1)]$. Следовательно $F_2+\cdots+F_N\in H_{2,\omega}[\Delta^*(\beta_1;\delta_1)]$ и по теореме В

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta^*(\beta_1;\delta_1)}\frac{-(F_2(\xi)+\cdots+F_N(\xi))}{\xi-z}d\xi=-\sum_{n=2}^{N}F_n(z);\ z\in\Delta^*(\beta_1;\delta_1).$$

Из этого на основании (24) и (25) получаем, что $F_1(\xi)=0$ почти всюду на $\partial\Delta(\beta_1;\delta_1)\equiv\partial\Delta^*(\beta_1;\delta_1)$. В области $\Delta(\beta_1;\delta_1)$ F_1 представима интегралом Коши по своим значениям на границе $\partial\Delta(\beta_1;\delta_1)$. Значит $F_1(z)=0$ при $z\in\Delta(\beta_1;\delta_1)$. Из этого тождества, включения $M\{\nu;\alpha\}\subset\Delta(\beta_1;\delta_1)$, окончательно получаем, что $F_1(z)=0$ на $M\{\nu;\alpha\}$. Аналогично можно доказать, что $F_n(z)=0$ $(n=2,\cdots,N)$ почти всюду на $M\{\nu;\alpha\}$. Отсюда следует единственность представления (18). Так как $F(z)\in H_2^{(\nu)}[\alpha;\omega]$, то в силу теоремы 1 имеет место представление (11), где $V_k(\xi)\in L_{2,-\omega}(\partial\Delta(\gamma_k;-\delta_k))$. Поскольку

$$\partial\Delta(\gamma_k;-\delta_k)\equiv\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)\cup\Gamma\left(-\delta_k-\frac{\pi}{2\gamma_k}\right),$$

то обозначая

$$V_k^{(+)}(\xi)=V_k(\xi)\Big|_{\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)}$$

$$V_k^{(-)}(\xi)=V_k(\xi)\Big|_{\Gamma\left(-\delta_k-\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)},$$

получим сужение V_k соответственно на $\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)$ и на $\Gamma\left(-\delta_k-\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)$. Легко заметить, что при условии (22) область $\Delta(\gamma_k;-\delta_k)$ обращается в плоскость с разрезом, границей которой служит дважды пробегаемый луч $\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)\equiv\Gamma\left(-\delta_k-\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)$.

Обозначим $$V_k^*(\xi)=V_k^{(-)}(\xi)-V_k^{(+)}(\xi);\ \xi\in\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right).$$

Отсюда и из (11) получим представление (22).

Отметим, что наряду с (11) имеет место представление (14), где $V_k(\xi;F)$ определяются по формуле (13). Аналогично $V_k^*(\xi)$ определяем и $V_k^*(\xi;F)$. По теореме 7.8 (см. [1], стр. 446)

$$\int\limits_{\partial\Delta(\gamma_k;-\delta_k)}\frac{V_k(\xi)}{\xi-z}d\xi=\int\limits_{\partial\Delta(\gamma_k;-\delta_k)}\frac{V_k(\xi;F)}{\xi-z}d\xi;\ z\in\Delta(\gamma_k;\delta_k). \tag{26}$$

Покажем, что $V_k^*(\xi)=V_k^*(\xi;F)$ почти всюду на $\Gamma=\bigcup_{k=1}^{N}\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)$.

В силу

$$\partial\Delta(\gamma_k;-\delta_k)\equiv\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)\cup\Gamma\left(-\delta_k-\frac{\pi}{2\gamma_k}\right),$$

а также (26) и определения $V_k^*(\xi)$ и $V_k^*(\xi;F)$, заключаем, что

$$\int\limits_{\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)} \frac{V_k^*(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int\limits_{\Gamma\left(-\delta_k+\frac{\pi}{2\gamma_k}\right)} \frac{V_k^*(\xi; F)}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \Gamma\left(-\delta_k + \frac{\pi}{2\gamma_k}\right), \quad k = 1, \cdots, N. \tag{27}$$

Отсюда по известным теоремам о граничных свойствах аналитических функций заключаем, что $V_k^*(\xi) = V_k^*(\xi;\ F)$ почти всюду на

$$\Gamma\left(-\delta_k + \frac{\pi}{2\gamma_k}\right) (k = 1, \cdots, N).$$

Отсюда и из единственности суммы (18) вытекает, что представление (22) единственно.

Имея в виду обозначение V_k^* и формулу (13) теоремы 1, получим обращение (23). Теорема доказана.

Отметим, что эта теорема другим способом была установлена в работе А. Е. Аветисяна [5].

Автор приносит благодарность кандидату физ.-мат. наук В. М. Мартиросяну за руководство при выполнении работы.

Армянский сельскохозяйственный институт

Поступила 26.VI.1981

Է. Կ. ԴԻԼԱՆՅԱՆ. Մ. Մ. Ջրբաշյանի ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսության մի կիրառության մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկված են անկյունային տիրույթներից և ճառագայթներից բաղկացած բազմությունների վրա որոշված Մ. Մ. Ջրբաշյանի դասերի ինտեգրալ ներկայացման հարցերը։ Ելնելով Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից զարգացված հարմոնիկ անալիզի տեսությունից, ստացվել են այդ դասերի նոր ինտեգրալ ներկայացումներ։ Ապացուցված է նաև միակության մի թեորեմ, որը նախկինում այլ եղանակով ստացվել է Ա. Ե. Ավետիսյանի կողմից։

E. K. DILANIAN. *An application of the M. M. Djrbashian integral transformations theory* (summary)

The paper considers integral representations of M. M. Djrbashian classes of functions on systems of rays and angular domains. Basing upon M. M. Djrbashian's harmonic analysis, new integral representations of these classes are given. A uniqueness theorem which was earlier established by A. E. Avetisian in a different way is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах (обобщение интеграла Фурье), Изв. АН СССР, сер. матем., 18, 1954, 427—448.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
3. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.

4. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.
5. *А. Е. Аветисян.* К теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна, ДАН Арм. ССР, 65, № 5, 1977, 266—270; Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 376—388.
6. *В. М. Мартиросян.* О замыкании, минимальности и базисности систем простейших рациональных дробей на системе лучей, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XV, № 4, 1980, 276—291.