ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 2, 1980 Математика

В. Я. ЭЙДЕРМАН

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В работах И. В. Ушаковой [2], С. Я. Хавинсона [4] и Н. Н. Меймана [7] рассмотрен вопрос об убывании мероморфных функций ограниченного вида на последовательности точек. Эти результаты развивали работу А. А. Шагиняна [1], рассмотревшего аналогичный вопрос для убывания вдоль линии. В статье И. В. Ушаковой [3] получена оценка скорости убывания произвольной мероморфной функции, когда аргумент стремится к границе области вне некоторого исключительного множества.

В настоящей работе также рассматривается убывание произвольной мероморфной функции на последовательности точек. Полученный результат применяется к функциям ограниченного вида.

Прежде чем привести формулировки названных теорем, введем некоторые обозначения:

G—односвязная область с жордановой границей, содержащей более одной точки;

$g(z, z_0, G)$—функция Грина области G с полюсом в точке z_0;

G_ρ—область, определяемая неравенством $g(z, z_0, G)>\rho$;

$\omega(z, \alpha, G_\rho)$—значение гармонической меры множества $\alpha\subset\partial G_\rho$ относительно области G_ρ в точке z;

$P_{z_0}(z, \xi, G_\rho)$—ядро Пуассона области G_ρ (см. [5]):

$$P_{z_0}(z, \xi, G_\rho)=\lim\frac{\omega(z, \xi\xi_1, G_\rho)}{\omega(z_0, \xi\xi_1, G_\rho)} \quad \text{при} \quad \omega(z, \xi\xi_1, G_\rho)\to 0. \tag{1}$$

В области G_ρ имеет место формула Пуассона—Иенсена:

$$\ln|f(z)|=\int\limits_{\partial G_\rho}\ln|f(\xi)|\cdot P_{z_0}(z, \xi, G_\rho)\,\omega(z_0, d\xi, G_\rho)+$$

$$+\sum_{b_\nu\in G_\rho} g(b_\nu, z, G_\rho)-\sum_{a_\nu\in G_\rho} g(a_\nu, z, G_\rho), \tag{2}$$

где $\{a_\nu\}$ и $\{b_\nu\}$—соответственно нули и полюсы функции $f(z)$.

Определим характеристическую функцию $T_\rho(f, z_0)$ симметричным образом $(f(z_0)\neq 0, \infty)$:

$$T_\rho(f, z_0)=\int\limits_{\partial G_\rho}\ln^+|f(\xi)|\,\omega(z_0, d\xi, G_\rho)+\sum_{b_\nu\in G_\rho} g(b_\nu, z_0, G_\rho)+\ln^-|f(z_0)|. \tag{3}$$

Положив в (2) $z_0 = z$, из (1) получим $P_z(z, \xi, G_\rho) \equiv 1$, и (2) перепишется в виде:

$$\ln|f(z)| = \int\limits_{\partial G_\rho} \ln|f(\xi)|\,\omega(z, d\xi, G_\rho) + \sum_{b_\nu \in G_\rho} g(b_\nu, z, G_\rho) -$$

$$- \sum_{a_\nu \in G_\rho} g(a_\nu, z, G_\rho),$$

откуда следует, что

$$T_\rho(f, z_0) = T_\rho(1/f, z_0) =$$

$$= \int\limits_{\partial G_\rho} \ln^-|f(\xi)|\,\omega(z_0, d\xi, G_\rho) + \sum_{a_\nu \in G_\rho} g(a_\nu, z_0, G_\rho) + \ln^+|f(z_0)|. \tag{4}$$

Обозначим $\theta_0 = \varliminf\limits_{\rho \to 0} \theta_{0,\rho}$,

$$0 \leqslant \theta_{0,\rho} = \left[\sum_{a_\nu \in G_\rho} g(a_\nu, z_0, G_\rho) + \ln^+|f(z_0)|\right] \Big/ T_\rho(f, z_0) \leqslant 1; \tag{5}$$

$$T_0 = \lim_{\rho \to 0} T_\rho(f, z_0);\ \textstyle\sum_1 = \max(\sum, 1);\ g(z) = g(z, z_0, G).$$

Если область G—круг $|z| < 1$, для характеристики будем использовать также обозначение $T(r) = T_{-\ln r}(f, 0)$.

Теорема 1. [2]. Пусть $\{z_n\}$—последовательность точек единичного круга, лежащих внутри сектора с вершиной в точке $z=1$, образованнного двумя хордами окружности $|z| = 1$, причем $z_n \to 1$ и выполнены условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) = \infty, \tag{6}$$

$$\left|\frac{1+z_k}{1-z_k}\right| - \left|\frac{1+z_{k+1}}{1-z_{k+1}}\right| \geqslant \delta > 0, \tag{7}$$

где δ не зависит от k. Если для голоморфной и ограниченной внутри единичного круга D функции $f(z)$ справедливо соотношение

$$\lim_{k \to \infty} |1 - z_k| \cdot \ln|f(z_k)| = -\infty, \tag{8}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Теорема 2. [4]. Пусть последовательность $\{z_n\}$, $|z_n| < 1$, удовлетворяет условию (6) и

$$\frac{|z_k| - |z_{k-1}|}{(1 - |z_k|)\cdot(1 - |z_{k-1}|)} \geqslant \delta > 0, \tag{9}$$

где δ не зависит от k. Если голоморфная и ограниченная в D функция $f(z)$ такова, что

$$\lim_{k\to\infty} (1-|z_k|)\cdot\ln|f(z_k)| = -\infty, \tag{10}$$

то $f(z)\equiv 0$.

Теоремы 1 и 2 справедливы и для функций ограниченного вида.

Теорема 3 [7]. Пусть $f(z)$ — функция ограниченного вида и последовательность $\{z_n\}$ такова, что для некоторого $\sigma>0$ существует такое число M, что любой неэвклидов диск радиуса $\chi\leqslant\sigma$ содержит не более M точек $\{z_n\}$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(z_k) = \infty. \tag{11}$$

Если при этих условиях для некоторого $\varepsilon>0$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\; g(z_k)\cdot\ln|f(z_k)| < -2(1-\theta_0+\varepsilon)\cdot T_0, \tag{12}$$

то $f(z)\equiv 0$.

Под неэвклидовой здесь, как обычно, понимается метрика, определяемая формулой

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\exp[-g(z_1, z_2, G)]}{1-\exp[-g(z_1, z_2, G)]}. \tag{13}$$

Как показывает пример функции $f(z)=\exp(i/z)$ в $G=\{z\colon \operatorname{Im} z>0\}$, приведенный в [7], неравенство (12) точное.

Для доказательства теоремы 3 вначале показывается, что нули функции $f(z)$ можно поместить в некоторую совокупность C неэвклидовых дисков, вне которых справедливо неравенство, обратное (12), причем условия на последовательность $\{z_n\}$ гарантируют существование подпоследовательности, лежащей вне C. Отсюда, очевидно, следует заключение теоремы.

В работе [3] строится иное исключительное множество.

Теорема 4. [3]. Пусть $\sigma(r)$ — такая монотонная функция, что

$$\int_0^1 T(r)\sigma(r)\,dr < M.$$

Положим

$$x(t) = \int_t^1 \sigma(\tau)\,d\tau;\quad \mu(t) = \int_t^1 x(\tau)\,d\tau.$$

Найдется множество C, состоящее из кружков с конечной суммой неэвклидовых радиусов, такое что

$$\ln|f(z)| > -\frac{N_\theta}{\mu(|z|+\theta(1-|z|))}\quad (z\,\overline{\in}\, C,\ 0<\theta<1).$$

Если последовательность $\{z_n\}$, $|z_n|<1$, такова, что ее нельзя поместить ни в какое множество C такое, что $\sum\mu(R_i)<\infty$ (R_j — модули центров кружков C_j, составляющих C), то из соотношения

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \mu(|z_k|+\theta(1-|z_k|))\cdot\ln|f(z_k)|=-\infty$$

при каком-нибудь $\theta\in(0, 1)$ следует, что $f(z)\equiv0$.

В [3] приводится несколько конкретных примеров условий на последовательность $\{z_n\}$, достаточных для выполнения указанного свойства; это условие $\sum\limits_k\mu(|z_k|)=\infty$ в сочетании с каким-либо из приведенных ниже условий несгущаемости последовательности:

$$\chi(z_n, z_m)\geqslant\delta\,|n-m|\quad(\delta>0);\tag{14}$$

$$\frac{|z_n-z_m|}{\sqrt{(1-|z_n|)(1-|z_m|)}}\geqslant\delta\sqrt{|n-m|}\quad(\delta>0);\tag{15}$$

$$\left[\frac{1}{\mu(|z_{k+1}|)}-\frac{1}{\mu(|z_k|)}\right]\cdot\frac{\mu(|z_k|)}{(1-|z_k|)\cdot(-\mu'(|z_k|))}\geqslant\delta>0.$$

Последнее условие обобщает теорему 2, так как указывается в [3], для функций ограниченного вида можно положить $\mu(|z|)=1-|z|$. В [3] замечено также, что выбрав $\sigma(t)=T^{-1}(t)\cdot(1-t)^{\varepsilon-1}$, будем иметь оценку $|f(z)|$ прямо через ее характеристику:

$$\ln|f(z)|>-\frac{N_{0,\varepsilon}\cdot T(|z|+\theta(1-|z|))}{(1-|z|)^{1+\varepsilon}}\,(z\,\overline{\in}\,C).\tag{16}$$

При доказательстве нашей теоремы мы поступим аналогично: оценим $|f(z)|$ вне некоторого исключительного множества C и наложим на $\{z_n\}$ условия, влекущие существование подпоследовательности, лежащей вне C. Полученная оценка будет точнее (16), но сумма неэвклидовых радиусов дисков, составляющих C, будет не обязательно конечной.

Теорема 5. *Пусть $\{a_\nu\}$, как и раньше, последовательность нулей мероморфной в области G функции $f(z)$, а числа M, $\sigma_0<\infty$, δ_1, $\delta_2\in(0, 1)$ и последовательность $\{z_n\}$, $z_n\in G$, таковы, что*

1. *В любом диске с неэвклидовым центром z и радиусом $\sigma<\sigma_0$ содержится не более*

$$M\cdot\left[\frac{\sigma}{g(z)}\cdot\sum_{a_\nu\in O_{\delta_1 g(z)}}g(a_\nu)+1\right]\tag{17}$$

точек последовательности $\{z_n\}$ (M не зависит от z);

2. $$\overline{\lim_{\rho\to0}}\left[\sum_{z_n\in O_\rho}g(z_n)\Big/\sum_{a_\nu\in O_{\delta_2\rho}}g(a_\nu)\right]=\infty.\tag{18}$$

(Если $f(z)$ не имеет нулей или имеет их конечное число, достаточно потребовать $g(z_n)\to0$).

Тогда для любого числа $0<\delta_3<\delta_1$ найдется число $0<A<\infty$, такое, что если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,[g(z_n)\cdot\ln|f(z_n)|/T_{\delta_3 g(z_n)}(f, z_0)]<-A,\tag{19}$$

то $f(z) \equiv 0$, *причем для* A *справедлива оценка:*

$$A < \frac{4}{\sigma_1 \cdot (\delta_1 - \delta_3)} + \frac{4}{1-\delta_1}, \quad \sigma_1 = \min\left(\sigma_0, \delta_1, \frac{1-\delta_1^{1/m}}{5}, \frac{1-\delta_2}{5}\right),$$

$$m = \left[\, 2 \ln \frac{1}{\delta_1} \Big/ \ln \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_3} \right] + 1, \tag{20}$$

где [ ] *означает целую часть.*

Замечание. *Для* любой последовательности $\{a_\nu\}$ и любых чисел M, σ_0, $\delta_1 \leqslant \delta_2$, δ_1, $\delta_2 \in (0, 1)$ нетрудно построить последовательность $\{z_n\}$, удовлетворяющую условиям (17), (18).

В случае, когда G есть единичный круг, теорема 5 примет вид:

Теорема 5'. *Пусть числа* M, $\sigma_0 < \infty$; $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ *и последовательность* $\{z_n\}$, $|z_n| < 1$, *таковы что:*

1. *В любом диске с неэвклидовым центром* z *и радиусом* $\sigma < \sigma_0$ *содержится не более*

$$\left[M \cdot \frac{\sigma}{1-|z|} \cdot \sum_{|a_\nu| < |z| + \theta_1 (1-|z|)} (1-|a_\nu|) + 1 \right] \tag{17'}$$

точек последовательности $\{z_n\}$;

2. $$\overline{\lim_{r\to 1}} \left[\sum_{|z_n|<r} (1-|z_n|) \Big/ \sum_{|a_\nu|<r+\theta_2(1-r)} (1-|a_\nu|) \right] = \infty. \tag{18'}$$

Тогда для любого числа $1 > \theta_3 > \theta_1$ *найдется число* $0 < A < \infty$, *такое, что если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[(1-|z_n|) \ln |f(z_n)| / T(|z_n| + \theta_3 (1-|z_n|)) \right] < -A, \tag{19'}$$

то $f(z) \equiv 0$, *причем для* A *справедлива оценка*

$$A < \frac{4}{\sigma_1 (\theta_3 - \theta_1)} + \frac{4}{\theta_1}, \quad \sigma_1 = \min\left(\sigma_0, 1-\theta_1, \frac{1-(1-\theta_1)^{1/m}}{5}, \frac{\theta_2}{5}\right),$$

$$m = \left[\, 2 \ln \frac{1}{1-\theta_1} \Big/ \ln \frac{2(1-\theta_1)}{2-\theta_1-\theta_3} \right] + 1. \tag{20'}$$

Пример. $f(z) = \exp[-1/(1-z)^2]$, тогда $T(r) = O(1/1-r)$. На действительной оси $\ln |f(z)|$ убывает как $-1/(1-r)^2$. Отсюда видно, что в (19') нельзя $T(|z| + \theta_3 (1-|z|))$ заменить на более медленно растущую величину.

Перейдем к доказательству теоремы 5, после чего обсудим ее применение к функциям ограниченного вида.

Наряду с метрикой χ, определяемой (13), будем рассматривать метрику $d(z_1, z_2) = \exp[-g(z_1, z_2, G)]$. Тогда $\chi = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+d}{1-d}$. Так как

$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\sim x$ при $x\to 0$, то для любого числа $\sigma_0<\infty$ можно подобрать такие числа k_1, k_2 и $\theta<1$, что при $\chi(z_1, z_2)<\sigma_0$

$$k_1 d(z_1, z_2)<\chi(z_1, z_2)<k_2 d(z_1, z_2),\ d(z_1, z_2)<\theta.$$

Поэтому под неэвклидовой в теоремах 5 и 5′ можно понимать как метрику χ, так и метрику d (в последнем случае надо положить $\sigma_0<1$ вместо $\sigma_0<\infty$). Для доказательства будет использоваться метрика d.

Лемма 1. *Пусть точки z_1 и z_2 лежат в диске с неэвклидовым радиусом $\sigma<1$ и $g(z_1)<\rho$, $g(z_2)<\rho$. Тогда найдутся числа a_1, a_2, зависящие от ρ, σ, такие, что $a_1 g(z_1)<g(z_2)<a_2 g(z_1)$.*

Доказательство. Отобразим G на $D=\{z: |z|<1\}$ так, чтобы точка z_0 перешла в 0. Пусть ω_1, ω_2 — образы точек z_1, z_2. Тогда $-\ln|\omega_1|=g(z_1)$; $-\ln|\omega_2|=g(z_2)$. При $|\omega_1|\to 1$ также и $|\omega_2|\to 1$. Так как $-\ln|\omega|\sim 1-|\omega|$ при $|\omega|\to 1$, то достаточно доказать существование чисел a_1, a_2, таких, что $a_1(1-|\omega_1|)<1-|\omega_2|<a_2(1-|\omega_1|)$. Будем полагать для определенности $|\omega_1|>|\omega_2|$. Легко показать, что $|\omega_1-\omega_2|\leqslant 2\sigma(1-|\omega'|^2)/(1-\sigma^2|\omega'|^2)$, где ω' — центр неэвклидова диска, содержащего ω_1, ω_2. Достаточно рассмотреть случай $|\omega_1|\leqslant|\omega'|$.

$$1-|\omega_2|\leqslant 1-|\omega_1|+|\omega_1-\omega_2|\leqslant(1-|\omega_1|)\,[1+2\sigma(1+|\omega'|)/(1-\sigma^2|\omega'|^2)]<$$

$$<(1-|\omega_1|)\left(1+\frac{4\sigma}{1-\sigma^2}\right)=a_2(1-|\omega_1|),\ a_2=1+\frac{4\sigma}{1-\sigma^2}\cdot$$

Теперь предположение $|\omega_1|>|\omega_2|$ можно отбросить, если положить $a_1=\frac{1}{a_2}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\delta\in(0,1)$, $\sigma=\frac{1-\delta}{5}\cdot$ Найдется такое $\rho>0$, что неэквклидов диск радиуса σ не может содержать точек z и z_1, таких что*

$$g(z)<\rho \text{ и } g(z_1)\leqslant\delta\cdot g(z).$$

Доказательство. Отобразим G на D так, чтобы z_0 перешла в 0. Тогда множества точек $\{\omega: g(\omega)=g(z)\}$ и $\{\omega_1: g(\omega_1)=g(z_1)\}$ перейдут в концентрические окружности с радиусами r и r_1, для которых $-\ln r=g(z)$, $-\ln r_1=g(z_1)\leqslant-\delta\ln r$. Очевидно, для любого $\varepsilon>0$ найдется $R<1$, такое, что при $r>R$ $(1-\delta-\varepsilon)(1-r)<r_1-r$. Выберем ε достаточно малым, чтобы выполнялось неравенство $4(1-\delta)/[(1-\delta-\varepsilon)(4+\delta)]<1$. Тогда

$$r_1-r>\frac{4(1-\delta)(r_1-r)}{(1-\delta-\varepsilon)(4+\delta)}=\frac{4\sigma(r_1-r)}{(1-\delta-\varepsilon)(1-\sigma)}>\frac{4\sigma}{1-\sigma}(1-r)>\frac{2\sigma(1-r^2)}{1-r^2\cdot\sigma^2}.$$

Нетрудно убедиться, что правая часть последнего неравенства равна эвклидовому диаметру диска неэвклидового радиуса σ с центром в точке r. Так как эвклидово расстояние между образами точек z и z_1

не меньше, чем $r_1 - r$, то из полученного неравенства следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть* σ_0, δ_1, $\delta_3 < \delta_1$ — *любые фиксированные числа из интервала* (0,1); $\{a_\nu\}$, $a_\nu \in G$ — *последовательность, не имеющая предельных точек в* G. *Тогда найдется система неевклидовых дисков* C *в области* G *и числа* $1 < M_1 < \infty$, $\rho_1 > 0$ *и* $A_1 > 0$, *такие, что при* $z \in G \setminus C$, $g(z) < \rho_1$

$$\text{а)}\quad g(z) \cdot \sum_{a_\nu \in G_{\delta_3 g(z)}} g(z, a_\nu, G_{\delta_3 g(z)}) < A_1 \cdot \sum_{a_\nu \in G_{\delta_3 g(z)}} g(z_0, a_\nu, G_{\delta_3 g(z)}), \tag{21}$$

$$A_1 < \frac{4}{(\delta_1 - \delta_3)\cdot\sigma_3} + \frac{2}{1-\delta_1}, \quad \sigma_3 = \min\left(\sigma_0,\ \delta_1,\ \frac{1-\delta_1^{1/m}}{5}\right), \tag{22}$$

m определяется в (20);

б) *в каждом диске множества* C *с радиусом* σ *и центром* z *содержится не менее*

$$M_1 \cdot \frac{\sigma}{g(z)} \cdot \sum_{g(a_\nu) > \delta_1 g(z)}{}_1\ g(a_\nu)$$

точек последовательности $\{a_\nu\}$, *причем каждая точка учитывается не более, чем трижды;*

в) *радиусы дисков, составляющих* C, *не превосходят* σ_0.

Доказательство. Возьмем $\delta_4 = (\delta_1 + \delta_3)/2$, $\delta_5 = \delta_1^{1/m}$, где m определено в (20). Нетрудно убедиться, что $\delta_5^{m+2} \geqslant \delta_4$. Построим последовательность точек $\{\omega_n\}$ следующим образом: $g(\omega_1) = \delta_5$; $g(\omega_{n+1}) = \delta_5 \cdot g(\omega_n)$. Множество $\{z\colon g(\omega_l) \geqslant g(z) > g(\omega_{l+1})\}$ будем называть l-м слоем. В силу (22) и леммы 2 диск радиуса σ_3 может пересекаться не более чем с двумя слоями. Приступим к построению множества C.

Возьмем любое $l > 2$. Согласно теореме Н. Н. Меймана [6], для любого заданного $H_l \in (0, 1/2)$ существует исключительное множество C_l, состоящее из совокупности неевклидовых дисков $C_{l,k}$, с суммой радиусов $\leqslant 2H_l$, такое что при $z \in G \setminus C_l$

$$\sum_{g(a_\nu) > g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G) \leqslant n_{g(\omega_{l+m+1})} \cdot (1 - \ln H_l) \tag{23}$$

(здесь и далее n_ρ — количество точек $\{a_\nu\}$ в области G_ρ). Возьмем

$$2H_l = \sigma_3 \frac{n_{g(\omega_{l+m+1})} \cdot g(\omega_{l+m+1})}{\sum\limits_{g(a_\nu) > g(\omega_{l+m+1})}{}_1\ g(a_\nu)}. \tag{24}$$

Согласно [6] радиус любого диска $C_{l,k} \subset C_l$ равен $2H_l \cdot \lambda_{l,k}/n_{g(\omega_{l+m+1})}$, где $\lambda_{l,k}$ не превосходит числа точек из $\{a_\nu\}$, лежащих в $C_{l,k} \cap G_{g(\omega_{l+m+1})}$, причем $\lambda_{l,k}$ выбирается так, что точки, находящиеся в нескольких дисках из C_l, учитываются лишь однажды. Применяя (24) получим, что радиус $\sigma_{l,k}$ диска $C_{l,k}$ равен

$$\sigma_{l,k}=\frac{2H_l\cdot\lambda_{l,k}}{n_{g(\omega_{l+m+1})}}=\sigma_3\cdot\frac{\lambda_{l,k}\cdot g(\omega_{l+m+1})}{\sum_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})}^{1} g(a_\nu)}. \tag{25}$$

Из множества C_l присоединим к C те диски, которые пересекаются с $(i-1)$-м слоем. Применяя эту конструкцию для любого i, получим искомое множество C. Покажем, что C удовлетворяет условиям а), б) (условие в) выполнено, так как в силу (25) и (22) $\sigma_{l,k}<$ $<\sigma_3<\sigma_0$). Возьмем любой диск $C_{l,k}$. Из (25) получаем

$$\lambda_{l,k}=\frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_3\cdot g(\omega_{l+m+1})}\cdot\sum_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})}^{1} g(a_\nu). \tag{26}$$

Так как диск $C_{l,k}$ пересекается с $(i-1)$-м слоем, то он не пересекается с $(i+1)$-м слоем. Следовательно, $\forall z\in C_{l,k}$ (в частности, для центра) $g(z)>g(\omega_{l+1})$, и $\delta_1\, g(z)>\delta_1\cdot g(\omega_{l+1})=\delta_5^m\cdot g(\omega_{l+1})=g(\omega_{l+m+1})$. Отсюда и из (26) следует, что в каждом диске множества C содержится не менее точек $\{a_\nu\}$, чем указано в условии б), если положить $M_1=\delta_1/\sigma_3>1$. Возьмем любую точку $a_n\in\{a_\nu\}$. Пусть она лежит в $(i-1)$-м слое. Тогда она может принадлежать дискам из множеств C_{l-1}, C_l и C_{l+1} (включенные в множество C диски из остальных множеств C_j с $(i-1)$-м слоем не пересекаются). Так как в число $\lambda_{l,k}$ при фиксированном i каждая точка из $\{a_\nu\}$ входит однажды, то всего мы можем ее учесть не более трех раз. Осталось показать выполнимость условия а).

Возьмем любую точку z. Пусть она лежит в $(i-1)$-м слое. Так как все диски из множества C_l, пересекающиеся с $(i-1)$-м слоем, лежат в C, то из условия $z\in G\setminus C$ следует, что $z\in G\setminus C_l$. Поэтому справедливо (23), откуда получим, заметив, что

$$g(z)\leqslant g(\omega_{l-1})=g(\omega_{l+m+1})/\delta_5^{m+2};$$

$$g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(z,a_\nu,G)}{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(a_\nu)}<\frac{g(\omega_{l+m+1})\cdot n_{g(\omega_{l+m+1})}}{\delta_5^{m+2}\cdot\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})}^{1} g(a_\nu)}\times$$

$$\times\ln\frac{e}{H_l}=\frac{2H_l}{\sigma_3\cdot\delta_5^{m+2}}\cdot\ln\frac{e}{H_l}<\frac{2}{\sigma_3\cdot\delta_5^{m+2}}<\frac{2}{\sigma_3\cdot\delta_4}=A_2. \tag{27}$$

$$g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{a_\nu\in O_{\delta_3}g(z)} g(z,a_\nu,G_{\delta_3\cdot g(z)})}{\sum\limits_{a_\nu\in O_{\delta_3}g(z)} g(z_0,a_\nu,G_{\delta_3\cdot g(z)})}=$$

$$=g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G_{\delta_3 g(z)})+\sum\limits_{g(\omega_{l+m+1})>g(a_\nu)>\delta_3 g(z)} g(z, a_\nu, G_{\delta_3 g(z)})}{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(z_0, a_\nu, G_{\delta_3 g(z)})+\sum\limits_{g(\omega_{l+m+1})>g(a_\nu)>\delta_3 g(z)} g(z_0, a_\nu, G_{\delta_3 g(z)})}<$$

$$<g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G_{\delta_3\cdot g(z)})}{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(z_0, a_\nu, G_{\delta_3\cdot g(z)})}+$$

$$+g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{g(\omega_{l+m+1})>g(a_\nu)>\delta_3\cdot g(z)} g(z, a_\nu, G_{\delta_3\cdot g(z)})}{\sum\limits_{g(\omega_{l+m+1})>g(a_\nu)>\delta_3\cdot g(z)} g(z_0, a_\nu, G_{\delta_3\cdot g(z)})}. \tag{28}$$

Оценим в (28) каждое слагаемое отдельно. Первое слагаемое не превосходит

$$g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G)}{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(a_\nu)-n_{g(\omega_{l+m+1})}\cdot\delta_3\cdot g(z)}.$$

Так как $\delta_5^{m+2}\geqslant\delta_4$, то $g(\omega_{l+m+1})>\delta_5^{m+2}\cdot g(z)\geqslant\delta_4\cdot g(z)$, следовательно, при $g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})$ $g(a_\nu)>\delta_4\cdot g(z)$, поэтому

$$n_{g(\omega_{l+m+1})}\cdot\delta_3\cdot g(z)<\frac{\delta_3}{\delta_4}\cdot\sum_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(a_\nu).$$

Будем полагать $\sum g(a_\nu)=\infty$ и $g(z)$ достаточно малым, чтобы в (27) $\sum_1=\sum$ (случай $\sum g(a_\nu)<\infty$ разобран в замечании в конце доказательства). Отсюда и из (27) получим, что первое слагаемое в (28) не превосходит

$$g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G)}{\left(1-\frac{\delta_3}{\delta_4}\right)\sum\limits_{g(a_\nu)>g(\omega_{l+m+1})} g(a_\nu)}<\frac{\delta_4}{\delta_4-\delta_3}\cdot A_2=\frac{4}{\sigma_3\cdot(\delta_1-\delta_3)}. \tag{29}$$

Так как $\delta_1\cdot g(z)\geqslant g(\omega_{l+m+1})$, то для оценки второго слагаемого в (28) достаточно показать, что $\forall\varepsilon>0$ найдется $\rho_1>0$, такое что при

$$g(z)<\rho_1,\ \delta_1\cdot g(z)\geqslant g(a)>\delta_3\cdot g(z)$$

справедливо неравенство

$$g(z)\cdot g(z, a, G_{\delta_3\cdot g(z)})<\left(\frac{2}{1-\delta_1}+\varepsilon\right)\cdot g(z_0, a, G_{\delta_3\cdot g(z)}). \tag{30}$$

Отобразим область G на единичный круг D так, чтобы точка z_0 перешла в 0, а z—в действительную точку r. Тогда область $G_{\delta_3\cdot g(z)}$

отобразится на область $\{\omega: -\ln|\omega| > -\delta_3\cdot\ln r\}$, то есть на круг $|\omega| < r^{\delta_3}$, $G_{\delta_1, g(z)}$ отобразится на круг $|\omega| < r^{\delta_1}$. Множество $\{a: g(z, a, G_{\delta_3 \cdot g(z)}) = \text{const}\}$ очевидно, также переходит в окружность с центром на действительной оси. Поэтому при фиксированной const точка a, для которой $g(z_0, a, G_{\delta_3 \cdot g(z)})$ минимально, должна переходить также в действительную точку x. Если обозначить z' и a' образы точек z и a при отображении G на D, то

$$g(z, a, G_{\delta_3, g(z)}) = \ln\left|\frac{|z'|^{2\delta_3} - \bar{a}'\cdot z'}{|z'|^{\delta_3}\cdot(z'-a')}\right|.$$

В силу сказанного выше достаточно доказать (30) при $z' = r$, $a' = x$, r и x—действительные числа, $r^{\delta_1} \leqslant x < r^{\delta_3}$. Для единичного круга неравенство (30) примет вид

$$\ln\frac{1}{r}\cdot\ln\frac{r^{2\delta_3} - xr}{r^{\delta_3}\cdot(x-r)} < \left(\frac{2}{1-\delta_1} + \varepsilon\right)\cdot\ln\frac{r^{\delta_3}}{x}.$$

В дальнейшем удобно положить $x = r^{\delta}$, $\delta_1 \geqslant \delta > \delta_3$. Тогда для доказательства (30) достаточно показать, что найдется $r_1 < 1$, такое что в прямоугольнике $r_1 < r < 1$, $\delta_3 < \delta \leqslant \delta_1$

$$\Phi(r, \delta) = \ln\frac{1}{r}\cdot\ln\frac{r^{2\delta_3} - r^{1+\delta}}{r^{\delta_3}(r^{\delta} - r)} \Big/ \ln\frac{r^{\delta_3}}{r^{\delta}} < \frac{2}{1-\delta_1} + \varepsilon. \tag{31}$$

Элементарными преобразованиями находим, что

$$\Phi(r, \delta) < \frac{2}{r^{\delta+\delta_3}}\cdot\frac{1}{\delta-\delta_3}\cdot\frac{1-r^{\delta-\delta_3}}{1-r^{1-\delta}} = \Phi_1(r, \delta).$$

Из разложения функции Φ_1 в ряд Тейлора по r, δ в точке $(1, \delta_0)$, $\delta_1 \geqslant \delta_0 \geqslant \delta_3$, видно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность точки $(1, \delta_0)$ такая, что в ней Φ не превосходит $\dfrac{2}{1-\delta_1} + \varepsilon$. Отсюда следует справедливость неравенства (31), следовательно и (30). Объединяя (30) с (29), получим (21) и (22).

Замечания. 1. В случае, если $\sum\limits_{\nu} g(a_\nu) < \infty$, условие а) можно уточнить, а именно:

а′) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\rho > 0$, такое что при $z \in G \setminus C$ и $g(z) < \rho$

$$g(z)\cdot\sum_{a_\nu \in G_{\delta_3, g(z)}} g(z, a_\nu, G) < \varepsilon.$$

Действительно, в этом случае $\rho\cdot n_\rho \to 0$ при $\rho \to 0$, следовательно, $H_l \to 0$ при $l \to \infty$, и из (27) получим

$$g(z)\cdot\sum_{g(a_\nu) > g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G) \to 0 \quad \text{при } g(z) \to 0.$$

$$\sum_{a_\nu \in G_{\sigma_3 \cdot g(z)}} g(z, a_\nu, G) = \sum_{g(a_\nu) > g(\omega_{l+m+1})} g(z, a_\nu, G) +$$

$$+ \sum_{g(\omega_{l+m+1}) > g(a_\nu) > \sigma_3 \cdot g(z)} g(z, a_\nu, G).$$

Так как $g(z) > g(\omega_l)$, то в силу выбора σ_3 вторая сумма не превосходит $n_{\sigma_3 g(z)} \cdot \ln \frac{1}{\sigma_3}$. Заметив теперь, что $g(z) \cdot n_{\sigma_3 \cdot g(z)} \to 0$ при $g(z) \to 0$, получим оценку a′).

2. Из (25) следует, что при $\sum_\nu g(a_\nu) < \infty$ сумма радиусов дисков, составляющих C, будет конечной. В общем случае нетрудно построить последовательность $\{a_\nu\}$, для которой не существует системы дисков C с конечной суммой радиусов, удовлетворяющей условию а).

Доказательство теоремы 5. Возьмем σ_1, определенное в (20). Согласно лемме 2 неевклидов диск радиуса $\sigma < \sigma_1$, пересекающийся с областью G_ρ, целиком лежит в области $G_{\sigma,\rho}$. Покажем теперь, что при $z \in G \setminus C$, $g(z) < \rho_1$ справедливо неравенство, обратное неравенству (19). Здесь C—исключительное множество, построенное в лемме 3. При получении оценки $|f(z)|$ используются рассмотрения работы [7].

Из (2) следует неравенство:

$$\ln|f(z)| > -\int_{\partial G_\rho} P_{z_0}(z, \xi, G_\rho) \cdot \ln^-|f(\xi)|\, \omega(z_0, d\xi, G_\rho) -$$

$$- \sum_{a_\nu \in G_\rho} g(a_\nu, z, G_\rho). \tag{32}$$

Согласно [7]

$$P_{z_0}(z, \xi, G) \leqslant \frac{1 + \exp[-g(z, z_0, G)]}{1 - \exp[-g(z, z_0, G)]}.$$

Отсюда и из (4)

$$-\int_{\partial G_\rho} P_{z_0}(z, \xi, G_\rho) \cdot \ln^-|f(\xi)|\, \omega(z_0, d\xi, G_\rho) \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1 + \exp[-g(z, z_0, G_\rho)]}{1 - \exp[-g(z, z_0, G_\rho)]} \cdot \int_{\partial G_\rho} \ln^-|f(\xi)|\, \omega(z_0, d\xi, G_\rho) =$$

$$= -\frac{1 + \exp[-g(z, z_0, G_\rho)]}{1 - \exp[-g(z, z_0, G_\rho)]} \cdot \Bigg[T_\rho(f, z_0) -$$

$$- \sum_{a_\nu \in G_\rho} g(a_\nu, z_0, G_\rho) - \ln^+|f(z_0)| \Bigg].$$

Возьмем $\rho = \delta_3 g(z)$. Тогда $g(z, z_0, G_\rho) = g(z) - \rho = (1-\delta_3)\cdot g(z)$. Так как $(1+e^{-x})/(1-e^{-x}) \sim 2/x$ при $x \to 0$, то

$$\frac{1+\exp[-g(z, z_0, G_\rho)]}{1-\exp[-g(z, z_0, G_\rho)]} > -\frac{2(1+\varepsilon)}{(1-\delta_3)\cdot g(z)}$$

при любом $\varepsilon > 0$ для достаточно малого ρ.

Таким образом, для интеграла в (32) получаем оценку

$$-\int\limits_{\partial G_\rho} > -\frac{2(1+\varepsilon)(1-\theta_0)}{(1-\delta_3)\cdot g(z)}\cdot T_{\delta_3 g(z)}(f, z_0). \qquad (33)$$

Положив в лемме 3 $\sigma_0 = \sigma_1$, из свойства а) получим

$$g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{a_\nu \in G_{\delta_3 g(z)}} g(a_\nu, z, G_{\delta_3 g(z)})}{T_{\delta_3 g(z)}(f, z_0)} <$$

$$< g(z)\cdot\frac{\sum\limits_{a_\nu \in G_{\delta_3 g(z)}} g(a_\nu, z, G_{\delta_3 g(z)})}{\sum\limits_{a_\nu \in G_{\delta_3 g(z)}} g(a_\nu, z_0, G_{\delta_3 g(z)})} < A_1.$$

Отсюда, из (32) и (33) заключаем: для любого $\varepsilon > 0$ найдется ρ, такое что при $g(z) < \rho$, $z \in G \setminus C$

$$g(z)\cdot\ln|f(z)| > -\left[\frac{2(1+\varepsilon)(1-\theta_0)}{1-\delta_3} + A_1\right]\cdot T_{\delta_3 g(z)}(f, z_0). \qquad (34)$$

Итак, вне C неравенство, обратное (19), установлено. Покажем, что условия (17), (18) влекут существование подпоследовательности $\{z_n\}$, лежащей вне C. Пусть это неверно, т. е. $\{z_n\}$ удовлетворяет (17), (18) и лежит целиком в C. Из сравнения (17) и условия б) леммы 3 видно, что в каждом диске множества C содержится не более чем в $2M$ раз больше точек $\{z_n\}$, чем точек $\{a_\nu\}$, причем каждая точка $\{a_\nu\}$ учитывается не более, чем трижды. Поэтому можно построить соответствие между точками $\{z_n\}$ и $\{a_\nu\}$, такое, что каждой точке z_n будет соответствовать по крайней мере одна точка из $\{a_\nu\}$, лежащая в том же диске, и каждой точке a_ν будет соответствовать не более $6M$ точек из $\{z_n\}$. Возьмем произвольное $0 < \rho < \rho_1$. В силу выбора σ_1 и условия в) леммы 3 все точки из $\{a_\nu\}$, соответствующие точкам из $\{z_n\}$, лежащим в G_ρ, будут лежать в $G_{\delta_2 \rho}$. Применяя лемму 2, получим

$$\sum_{z_n \in G_\rho} g(z_n) < 6\cdot M\cdot a_2 \cdot \sum_{a_\nu \in G_{\delta_2 \rho}} g(a_\nu),\ \rho < \rho_1,\ n > N,$$

что противоречит (18). Теорема 5 доказана.

Перейдем к применению теоремы 5 к функциям ограниченного вида.

Теорема 6. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция ограниченного вида в области G, а числа M, σ_0 и последовательность $\{z_n\}$ таковы, что*

1) *в любом неэвклидовом диске с центром z и радиусом $\sigma < \sigma_0$ содержится не более*

$$M \cdot \left[\frac{\sigma}{g(z)} + 1\right] \tag{34}$$

точек последовательности $\{z_n\}$;

2) $$\sum_n g(z_n) = \infty. \tag{35}$$

Если при некотором $\varepsilon > 0$

$$g(z_n) \cdot \ln |f(z_n)| < -2(1 - \theta_0 + \varepsilon) \cdot T_0,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Для функций ограниченного вида $\sum g(a_\nu) < < \infty$, поэтому в силу сделанного замечания число A_1 может быть выбрано сколь угодно малым. Взяв в неравенстве (34) число δ_3 достаточно малым, получим утверждение теоремы.

Условие 1 теоремы 6 означает, что максимальное число точек из $\{z_n\}$, находящихся в диске, зависит не только от радиуса диска, но и от его положения в области G.

Очевидно, выполнение условий теоремы 3 влечет выполнение условий теоремы 6.

Если G есть единичный круг, условия (34), (35) примут вид:

$$M \cdot \left[\frac{\sigma}{1 - |z|} + 1\right] \tag{34'}$$

$$\sum_n (1 - |z_n|) = \infty. \tag{35'}$$

Сравним условие (34) с условиями (7), (9), (14), (15).

1. Пусть последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условию (9). Подсчитаем, сколько точек может находиться в этом случае в круге D' радиуса $\sigma < \sigma_0$. Так как D' есть также и эвклидов круг, а условие (9) накладывает ограничение только на модули z_n, то максимальное число точек будет лежать в D' в том случае, если все они будут находиться на прямой, содержащей центр D', без ограничения общности, на действительной прямой. В этом случае (9) примет вид:

$$z_n - z_{n-1} \geqslant \delta (1 - z_n)(1 - z_{n-1}), \ \delta > 0, \ \operatorname{Im} z_n = 0.$$

Эвклидов диаметр круга D' равен $2\sigma(1 - z^2)/(1 - \sigma^2 z^2)$, где z — неэвклидов центр D'. Поэтому в D' может находиться не более

$$2\sigma \cdot \frac{1 - z^2}{1 - \sigma^2 z^2} \cdot \frac{1}{\delta(1 - z_n)(1 - z_{n-1})} + 1 \text{ точек } \{z_n\}.$$

Согласно леме 1 $(1-z_n)(1-z_{n-1}) > a_1^2 \cdot (1-z)^2$. Поэтому в D' находится не более $\frac{4}{(1-\sigma_0^2)\,\delta\cdot a_1^2}\cdot\frac{\sigma}{1-z}+1$ точек $\{z_n\}$. Таким образом, условие (34′) выполнено.

II. Пусть последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условию (7). Линии $l_n = z$: $|1+z|/|1-z| = |1+z_n|/|1-z_n|\}$ являются дугами окружностей, перпендикулярных кругу $|z|=1$ и симметричных относительно действительной оси. Результат этот легко получить, если заметить, что $\omega = (1+z)/(1-z)$ есть отображение D на правую полуплоскость, на которой $\{\omega\colon \omega = \text{const}\}$ есть полукруг, и воспользоваться свойствами дробно-линейных отображений. Возьмем теперь кружок D' с неэвклидовым радиусом σ и центром z'. Очевидно, эвклидов радиус D' убывает при движении z' к границе $|z|=1$ по линиям $\{\omega = \text{const}\}$. Отсюда ясно, что число линий l_n, с которыми пересекается D' (а значит, и число точек $\{z_n\}$, лежащих в D') не превосходит числа линий l_n, с которыми пересекается кружок радиуса σ с центром r, $\operatorname{Im} r = 0$, $(1+r)/(1-r) = (1+|z'|)/(|1-|z'|)$. Для оценки этого числа следует положить в (7) $\operatorname{Im} z_k = 0$, и (7) сведется к (9). Аналогично предыдущему примеру получим, что в D' находится не более $M\cdot\frac{\sigma}{1-r}+1$ точек $\{z_n\}$. Так как $1-r \geqslant 1-|z'|$, то (34) выполнено.

III. Последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условию

$$\frac{|z_n - z_m|}{|1 - z_n\cdot\bar z_m|\cdot(1-|z_n|)} \geqslant \delta\cdot|n-m|,\ \delta>0. \tag{36}$$

Возьмем произвольный кружок D' с неэвклидовым центром z и радиусом $\sigma<\sigma_0$. Выберем точки z_n, $z_m \in D'$ с наибольшей разностью номеров. Тогда в D' содержится не более $|n-m|$ точек последовательности $\{z_n\}$. Из неравенства треугольника для метрики d следует, что

$$|z_n - z_m|/|1 - z_n\cdot\bar z_m| < 2\sigma. \text{ Отсюда}$$

$$|n-m| \leqslant \frac{2}{\delta}\cdot\frac{\sigma}{1-|z_n|} < \frac{2}{\delta\cdot a_1}\cdot\frac{\sigma}{1-|z|}.$$

IV. Пусть выполнено (14). Тогда для любых z_n, $z_m \in D'$ $\chi(z_n, z_m) < \chi_0 = \chi_0(\sigma_0)$. Поэтому в (14) метрику χ можно заменить на d. Очевидно, тогда из (14) следует (36), следовательно, и (34′). Заметим, что неравенство (14) означает, что в D' может находиться не более M точек, где M не зависит от σ, z.

V. Пусть выполнено (15). Тогда $\forall z_n$, $z_m \in D'$

$$|z_n - z_m| \leqslant \frac{2\sigma\,(1-|z|^2)}{1-\sigma^2|z|^2} \leqslant \frac{4\sigma_0}{1-\sigma_0}(1-|z|) < \frac{4\sigma_0\,a_2}{1-\sigma_0}(1-|z_n|),$$

и аналогично для $1-|z_m|$. Из (15) получим, что

$$|n-m| < \left[\frac{(4\sigma_0 \cdot a_3}{(1-\sigma_0)\cdot\delta}\right]^2 = M.$$

Следовательно, в D' может содержаться не более M точек $\{z_n\}$.

Таким образом, теоремы 1, 2 и теоремы единственности с условиями (14), (15) для функций ограниченного вида могут быть легко получены из теоремы 6, причем в теореме 1 можно опустить условие о нахождении $\{z_n\}$ внутри сектора, если условие (8) заменить на (10) (очевидно, если $\{z_n\}$ лежит внутри сектора, эти условия эквивалентны).

Можно указать и другие условия несгущаемости типа (7), (9), (14), (15) (например, условие (36)).

В заключение покажем, что условие (34′) является в некотором смысле точным.

Теорема 7. *Пусть $\varphi_1(x)$ — непрерывная функция на интервале (0,1), такая что $\varphi_1(x) > 0$ и $\varphi_1(x) \to 0$ при $x \to 0$. Тогда найдутся ограниченная аналитическая функция $B(z) \not\equiv 0$, последовательность точек $\{z_n\}$, $|z_n| < 1$, и число $M < \infty$, такие что:*

1. $\sum\limits_n (1-|z_n|) = \infty$;

2. *в круге радиуса $\sigma < \sigma_0$ с центром z содержится не более*

$$M\cdot\left[\frac{\sigma}{(1-|z|)\cdot\varphi_1(1-|z|)}+1\right] \text{ точек } \{z_n\};$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (1-|z_n|)\cdot\ln|B(z_n)| = -\infty$.

Доказательство. Возьмем функцию $\varphi(x)$, такую что $\varphi(x) > \varphi_1(x)$, $\varphi(x)$ непрерывна на интервале (0,1), $\varphi(x) \to 0$ при $x \to 0$, $\varphi(x)$ выпукла вверх, $\varphi(x)\nearrow$. Очевидно, подобрать такую $\varphi(x)$ всегда можно. Достаточно доказать теорему для $\varphi(x)$, так как $\varphi(x) \geqslant \varphi_1(x)$. Возьмем произвольную последовательность чисел $\{p_i\}$, $p_i > 0$, $p_i \nearrow \infty$ и $\{\omega_i\} \nearrow 1$, такую что

а) $\sum\limits_i \dfrac{p_i}{-\ln\varphi(1-\omega_i)} < \infty$; б) $\sum\limits_i (1-\omega_i) < \infty$;

в) расстояния (неэвклидовы) между дисками C_i с центрами в точках ω_i и радиусами $\sigma_i = \varphi(1-\omega_i)$ были больше σ_0.

Обозначим $h_i = p_i/-\ln\varphi(1-\omega_i)$. Поместим в точку ω_i $[h_i/(1-\omega_i)]+1$ точек $a_\nu^{(i)}$ (здесь и далее [ ] означает целую часть); полученную последовательность обозначим $\{a_\nu\}$.

$$\sum_\nu (1-a_\nu) = \sum_i\left(\left[\frac{h_i}{1-\omega_i}\right]+1\right)(1-\omega_i) \leqslant \sum_i h_i + \sum_i (1-\omega_i) < \infty.$$

Поэтому произведение Бляшке $B(z)$ по нулям $\{a_\nu\}$ будет ограниченной аналитической функцией $\not\equiv 0$. Возьмем теперь в каждом диске C_i действительные точки z_n так, чтобы любой диск с неэвклидовым радиусом $\sigma < \sigma_i$ и центром ω_i содержал

$\left[\dfrac{\sigma}{(1-\omega_l)\cdot\varphi(1-\omega_l)}\right]+1$ точку $\{z_n\}$. Покажем, что тогда и любой диск D' с центром z и радиусом $\sigma<\sigma_0$ содержит не более

$$M\cdot\left\{\frac{\sigma}{(1-|z|)\cdot\varphi(1-|z|)}+1\right\} \text{ точек } \{z_n\}.$$

Очевидно, достаточно рассмотреть лишь те диски, для которых $\operatorname{Im} z=0$. Пусть d_l — неэвклидова длина отрезка действительной оси, лежащего в пересечении $C_l\cap D'$, $d_l<2\sigma$. На этом отрезке может находиться не более $\dfrac{d_l}{(1-\omega_l)\cdot\varphi(1-\omega_l)}+1$ точек $\{z_n\}$. По построению C_l, D' может пересекаться не более чем с двумя дисками, пусть с C_j и C_k, $\omega_j<z<\omega_k$. По лемме 1 $1-\omega_k>a_1^2\cdot(1-z)$. Так как точки z_n могут лежать лишь на отрезках действительной оси их число в D' не превосходит

$$\frac{d_j}{(1-\omega_j)\cdot\varphi(1-\omega_j)}+1+\frac{d_k}{(1-\omega_k)\cdot\varphi(1-\omega_k)}+$$
$$+1\leqslant 2+\frac{2\sigma}{(1-z)\cdot\varphi(1-z)}+\frac{2\sigma}{a_1^2\cdot(1-z)\cdot\varphi(a_1^2\cdot(1-z))}<$$
$$<\frac{\sigma}{(1-z)\cdot\varphi(1-z)}\cdot\left(2+\frac{2}{a_1^4}\right)+2$$

(мы воспользовались свойством выпуклости вверх: $\varphi(\delta\cdot x)>\delta\cdot\varphi(x)$, $\delta<1$). Таким образом, условие 2 в формулировке теоремы выполнено. Проверим выполнимость условия 1. Так как по лемме 1

$$\forall z_n\in C_j\ 1-z_n>a_1\cdot(1-\omega_j), \text{ то}$$
$$\sum_n(1-z_n)>a_1\cdot\sum_l\left\{\left[\frac{\sigma_l}{(1-\omega_l)\cdot\varphi(1-\omega_l)}\right]+1\right\}\cdot(1-\omega_l)\geqslant$$
$$\geqslant a_1\cdot\sum_l\frac{\sigma_l}{\varphi(1-\omega_l)}=a_1\cdot\sum_l 1=\infty.$$

Осталось проверить выполнимость условия 3. Пусть $z_n\in C_l$.

$$\ln|B(z_n)|=\sum_\nu\ln\left|\frac{z_n-a_\nu}{1-z_n\cdot a_\nu}\right|<\sum_{a_\nu\in C_l}\ln\left|\frac{z_n-a_\nu}{1-z_n\cdot a_\nu}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\left[\frac{h_l}{1-\omega_l}\right]+1\right\}\cdot\ln\sigma_l\leqslant\frac{p_l}{-\ln\varphi(1-\omega_l)}\cdot\frac{1}{1-\omega_l}\cdot\ln\varphi(1-\omega_l)=$$
$$=-\frac{p_l}{1-\omega_l}<-\frac{p_l}{a_2\cdot(1-z_n)}.$$

Теорема доказана.

Автор искренне благодарен С. Я. Хавинсону за обсуждение работы.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила 26.VII.1977

Վ. Յա. ԷՅԴԵՐՄԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների միակության թեորեմ *(ամփոփում)*

Ենթադրենք f (z)-ը մերոմորֆ ֆունկցիա է միակապ բաց բազմության վրա, T_p-ն f(z)-ի Նևանլիննայի խարակտերիստիկան է, g-ն Գրինի ֆունկցիա է։

Ցույց է տրված, ինչպիսի բավարար պայմաններ կարելի է դնել $\{z_n\}$ հաջորդականության վրա, որ հետևյալ անհավասարությունից՝

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ g(z_0, z_n, G)\ln|f(z_n)|/T_{\delta,\, g(z_0, z_n)} < -A,\ 0<\delta<1,$$

հետևի, որ $f(z) \equiv 0$, A-ն գնահատված է։

Սահմանափակ ֆունկցիաների համար ստացված է թեորեմ, որը ընդգրկում է [1]—[4], [7]-ը։

Հետազոտվում է այդ թեորեմների ճշգրտությունը։

V. Ja. AJDERMAN. *Uniqueness theorem for meromorphic functions*

(summary)

Let $f(z)$ be a meromorphic function in a single-connected domain G, T_l be Nevanlinna's characteristic of $f(z)$, g be Green's function.

Sufficient conditions on the sequence $\{z_n\}$ are found which garantee that

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ [g(z_0, z_n, G)\cdot \ln|f(z_n)|/T_{\delta g(z_0, z_n)}] < -A,\ 0<\delta<1,$$

implies $f(z) \equiv 0$. The value of A is estimated. For functions of bounded characteristic a theorem, which includes results from [1]—[4], [7], is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Л. Шагинян.* Об одном основном неравенстве в теории функций и ее приложениях, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, XII, № 1, 1959, 3—25.
2. *И. В. Ушакова.* Теорема единственности для функций, голоморфных и ограниченных в единичном круге, ДАН СССР, 130, № 1, 1960, 29—32.
3. *И. В. Ушакова.* Некоторые теоремы единственности для функций, субгармонических и мероморфных в единичном круге, ДАН СССР, 137, № 6, 1961, 1319—1322.
4. *С. Я. Хавинсон.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН, XVIII, вып. 2 (110), 1964, 25—98.
5. *Н. Н. Мейман.* Интеграл Пуассона—Стилтьеса для конечносвязной жордановой области, ДАН СССР, 197, № 6, 1971, 1272—1275.
6. *Н. Н. Мейман.* Об оценке сверху потенциала плоского электростатического поля, ДАН СССР, 202, № 6, 1972, 1268—1270.
7. *Н. Н. Мейман.* К теории функций ограниченного вида, ДАН СССР, 204, № 1, 1972, 34—37.