ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 1, 1980 Математика

М. Ж. ГРИГОРЯН

О СХОДИМОСТИ В МЕТРИКЕ L_p, $0>p>1$, ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

Как известно, до сих пор остается нерешенной следующая задача:

Сходится ли в метрике L_p; $0<p<1$ или хотя бы по мере двойной ряд Фурье любой суммируемой функции (см. [1], стр. 34)3 В связи с этим в настоящей работе рассматривается вопрос о сходимости двойных рядов Фурье суммируемых функций $f(x;\ y)$ в зависимости от изменения их значений на множествах сколь угодно малой меры. При этом требуется, чтобы значения функций $f(x;\ y)$ сохранялись на одном и том же не зависящем от функции множестве.

Идея улучшения сходимости ряда Фурье путем изменения разлагаемой функции на множествах малой меры принадлежит Д. Е. Меньшову. Он рассматривал этот вопрос в двух постановках:

1) когда значения функций изменяются вне заданного совершенного нигде не плотного множества;

2) когда значения функции $f(x)$ изменяются на зависящем от функции множестве сколь угодно малой меры.

В соответствии с этими постановками им были установлены следующие теоремы (см. [3], стр. 448—471).

Теорема I. (Д. Е. Меньшов). *Пусть $f(x)$—любая суммируемая на $[0;\ 2\pi]$ функция и Q—любое совершенное нигде не плотное множество на $[0;\ 2\pi]$. Можно найти такую суммируемую функцию $g(x)$, что*

$$g(x)=f(x) \text{ на } Q$$

и ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду.

Теорема II. (Д. Е. Меньшов). *Пусть $f(x)$—измеримая функция, конечная почти всюду на $[0;\ 2\pi]$: каково бы ни было $\varepsilon>0$ можно построить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E, $\operatorname{mes} E>2\pi-\varepsilon$ и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0;\ 2\pi]$.*

В работах [3] и [4] отмечено, что теорема II в той же формулировке переносится на двойные тригонометрические ряды как в случае сходимости по Прингсгейму [3], так и при требовании сходимости сферических частных сумм [4].

Неизвестно, верен ли аналог теоремы I для двойных рядов при каком-нибудь понятии их сходимости (почти всюду, по Прингсхейму, по сферам или же по квадратам). Тем не менее, рассматривая аналогичный вопрос при требовании сходимости в метрике L_p, $0<p<1$ двойного ряда и используя некоторые элементы конструкции Меньшова, примененной им при доказательстве теоремы I, можно установить следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* Q_i; $Q_i \subset [0; 2\pi]$, $i = 1, 2$, *совершенные, нигде не плотные множества и* N_0 *натуральное число. Тогда для любой суммируемой на* $T = [0; 2\pi] \times [0; 2\pi]$ *функции* $f(x; y)$ *можно определить суммируемую на* T *функцию* $F(x; y)$ *такую, что*

1) $F(x; y) = f(x; y)$ на Q, $Q = Q_1 \times Q_2$;

2) *двойной ряд Фурье функции* $F(x; y)$ *сходится к ней по Принісхейму в метрике* L_p; $0 < p < 1$, *т. е.*

$$\lim_{n, m \to \infty} \iint_T |S_{n_m}[F] - F(x; y)|^p \, dxdy = 0; \; 0 < p < 1,$$

где

$$S_{n_m}[F] = \sum_{k=0, l=0}^{n, m} \lambda_{k_l} (a_{k_l} \cos kx \cdot \cos ly + b_{kl} \sin kx \cdot \cos ly +$$

$$+ c_{kl} \cos kx \cdot \sin ly + d_{kl} \sin kx \cdot \sin ly),$$

$$\lambda_{k_l} = \begin{cases} 1/4 & \textit{при } k = l = 0 \\ 1/2 & \textit{при } k = 0; \ l > 0 \text{ или } k > 0, \ l = 0 \\ 1 & \textit{при } k > 0; \ l > 0 \end{cases}$$

$$a_{k_l} = \frac{1}{\pi^2} \iint_T F(x; y) \cos kx \cos bydxdy,$$

$$b_{k_l} = \frac{1}{\pi^2} \iint_T F(x; y) \sin kx \cdot \cos lydx \cdot dy, \tag{1.1}$$

$$c_{k_l} = \frac{1}{\pi^2} \iint_T F(x; y) \cos kx \cdot \sin lydxdy,$$

$$d_{k_l} = \frac{1}{\pi^2} \iint_T F(x; y) \sin kx \sin lydxdy;$$

3) $a_{k_l} = b_{k_l} = c_{k_l} = d_{k_l} = 0$ *при* $\min(k; l) < N_0$.

Теорема 2. *Пусть* $f(x; y)$*—любая суммируемая функция и* $Q \subset T$ *— любое совершенное нигде не плотное множество. Тогда можно определить суммируемую функцию* $F(x; y)$ *такую, что*

1) $F(x; y) = f(x; y)$ *на* Q;

2) *двойной ряд Фурье функции* $F(x; y)$ *сходится к ней по квадратам в метрике* L_p, $0 < p < 1$, *т. е.*

$$\lim_{n \to \infty} \iint_T |S_{n_n}[F] - F(x; y)|^p \, dxdy = 0, \; 0 < p < 1.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими свойствами частных сумм (см. [2], стр. 595 и [5], стр. 455)

$$\int_0^{2\pi} |S_n[g]|^p\,dx \leqslant B(p)\left[\int_0^{2\pi} |g(x)|\,dx\right]^p;\quad 0<p<1;\ g(x)\in L_1[0;2\pi],$$

$$n=1,2,\cdots, \tag{1.2}$$

где $B(p)$ зависит только от p.

Если $F(x;y)=f(x)\cdot g(y)$, где $f(x);\ g(y)\in L_1[0;2\pi]$, то частную сумму

$$S_{nm}[F]=\frac{1}{4\pi^2}\iint_T F(t;\tau)\cdot\frac{\sin(n+1/2)(t-x)}{\sin 1/2\,(t-x)}\cdot\frac{\sin(m+1/2)(\tau-y)}{\sin 1/2\,(\tau-y)}\,dt\,d\tau$$

можно записать в виде

$$S_{nm}[F]=S_n(f)\cdot S_m(g). \tag{1.3}$$

§ 2. Доказательство основных лемм

Для краткости обозначим тригонометрическую систему

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},\cdots \text{ через } \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}.$$

Лемма 1. *Пусть даны отрезок* $[c;d]\subset[0;2\pi]$, *совершенное нигде не плотное множество* $Q\subset[0;2\pi]$, *действительное число* $\gamma\neq0$ *и натуральное число* N. *Тогда существует ограниченная функция* $\varphi(x)$ *такая, что*

а) $$\varphi(x)=\begin{cases}\gamma & \text{при } x\in Q\\ 0 & \text{при } x\overline{\in}[c;d],\end{cases}$$

б) $$\int_0^{2\pi}\varphi(x)\cdot\varphi_k(x)\,dx=0\quad k\leqslant N,$$

в) $$\int_c^d|\varphi(x)|\,dx<3|\gamma|(d-c).$$

Доказательство. Обозначим через $D[CQ;\varphi_1,\cdots,\varphi_N]$ определитель Грамма на множестве $CQ=[c;d]\setminus Q$ системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N}$, т. е.

$$D[CQ;\varphi_1,\cdots,\varphi_N]=\|\alpha_{kl}\|,\ \text{где } \alpha_{kl}=\int_{CQ}\varphi_k(x)\cdot\varphi_l(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Так как функции $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_N(x)$ линейно независимы на CQ, то (см. [6], стр. 77)

$$D[CQ;\varphi_1,\cdots,\varphi_N]>0. \tag{2.2}$$

Возьмем натуральное число m настолько большим, чтобы

$$\frac{2(d-c)}{m} < \frac{D[CQ;\varphi_1,\cdots,\varphi_N]}{(2\pi)^{N+1}\cdot(N+2)!}. \tag{2.3}$$

Пусть

$$c_s = c + s\cdot\frac{d-c}{m},\ s=0,\ 1,\cdots,\ m. \tag{2.4}$$

Так как Q — совершенное нигде не плотное множество, то как легко видеть (см. [2], стр. 460) можно найти интервалы $\{\delta_k\}_{k=1}^m$ одинаковой длины $|\delta_k| = \delta$, $k=1,\ \cdots,\ m$ такие, что

$$\delta_k \subset [c_{k-1};\ c_k],\ k=1,\cdots,\ m \ \text{ и } \ Q \cap \bigcup_{k=1}^{m} \delta_k = \varnothing. \tag{2.5}$$

Определим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \gamma & \text{при } x \in [c;\ d] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} \delta_k \\ \gamma\left(1-\dfrac{d-c}{m\cdot\delta}\right) & \text{при } x \in \bigcup\limits_{k=1}^{m} \delta_k \\ 0 & \text{вне } [c;\ d]. \end{cases} \tag{2.6}$$

Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in Q \\ f(x) - \sum\limits_{k=1}^{N} \beta_k\cdot\varphi_k(x) & \text{при } x \in CQ = [c;\ d] \setminus Q \\ 0 & \text{вне } [c;\ d] \end{cases} \tag{2.7}$$

и покажем, что константы β_k можно подобрать так, чтобы $\varphi(x)$ была ортогональна ко всем $\varphi_k(x)$; $k=1,\cdots,\ N$. Действительно, это равносильно равенствам

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\varphi_k\,dx = 0,\ k=1,\cdots,\ N \tag{2.8}$$

или

$$\int_Q f(x)\,\varphi_k(x)\,dx + \int_{CQ}\left[f(x) - \sum_{l=1}^{N}\beta_l\,\varphi_l(x)\right]\varphi_k(x)\,dx = 0,\ k=1,\cdots,\ N, \tag{2.9}$$

$$\sum_{l=1}^{N}\beta_l\cdot\int_{CQ}\varphi_l(x)\cdot\varphi_k(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\cdot\varphi_k(x)\,dx,\ k=1,\cdots,\ N. \tag{2.10}$$

В силу (2.2) и (2.10) имеем

$$\beta_l = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1l-1} & \varepsilon_1 & \alpha_{1l+1} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{N1} & \cdots & \alpha_{Nl-1} & \varepsilon_N & \alpha_{Nl+1} & \cdots & \alpha_{NN} \end{vmatrix}}{D[CQ;\ \varphi_1 - \varphi_N]}, \quad l = 1, \cdots, N, \tag{2.11}$$

где

$$\varepsilon_k = \int_0^{2\pi} f(x)\, \varphi_k(x)\, dx = \int_c^d f(x)\, \varphi_k(x)\, dx, \quad k = 1, \cdots, N. \tag{2.12}$$

Определенная равенствами (2.6) и (2.7) функция $\varphi(x)$ ограничена и очевидно удовлетворяет условиям а) и б) леммы 1. Остается проверить выполнение условия в).

Заметим, что

$$|\varepsilon_k| < \frac{|\gamma|}{(2\pi)^N \cdot (N+1)!} D[CQ\cdot \varphi_1, \cdots, \varphi_N], \quad k = 1, \cdots, N. \tag{2.13}$$

В самом деле, из (2.4), (2.6) имеем

$$\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\, dx = 0, \quad k = 1, \cdots, m. \tag{2.14}$$

Если $c < t \leqslant d$, то $c_{k_0} < t \leqslant c_{k_0+1}$ для некоторого $0 < k_0 \leqslant m - 1$. Из (2.6) и (2.14) следует

$$\left|\int_c^t f(x)\, dx\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{k_0} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\, dx\right| + \int_{c_{k_0}}^{t} |f(x)|\, dx < 2\,|\gamma|\, \frac{d-c}{m}, \tag{2.15}$$

откуда, учитывая (2.3), получаем

$$\left|\int_c^t f(x)\, dx\right| < \frac{|\gamma| \cdot D[CQ; \varphi_1, \cdots, \varphi_N]}{(2\pi)^{N+1} \cdot (N+2)!}, \quad t \in [c;\ d]. \tag{2.16}$$

Из (2.16) и из того, что

$$\int_{[c;\ d]} f(x)\, dx = 0 \ \text{ и } \ |\varphi_k'(x)| \leqslant N$$

при $k \leqslant N$ интегрированием по частям получим

$$|\varepsilon_k| = \left|\int_c^d f(x)\, \varphi_k(x)\, dx\right| \leqslant k\ 2\pi \cdot \max_{c<t<d} \left|\int_c^t f(x)\, dx\right| < \frac{|\gamma| \cdot D[CQ; \varphi_1, \cdots, \varphi_N]}{(2\pi)^N\ (N+1)!}. \tag{2.17}$$

С другой стороны, согласно (2.6) и (2.7) имеем

$$\int_c^d |\varphi(x)|\,dx \leqslant \int_c^d |f(x)|\,dx + \int_c^d \left|\sum_{k=1}^N \beta_k \varphi_k(x)\right| dx \leqslant 2\,|\gamma|\,(d-c) + (d-c)\cdot \sum_{k=1}^N |\beta_k|. \tag{2.18}$$

Из (2.11) и из того, что $|z_{kl}| \leqslant 2\pi$ следует, что

$$\beta_k \leqslant \frac{(2\pi)^N \cdot N! \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} |z_k|}{D[CQ; \varphi_1, \cdots, \varphi_N]}, \quad k = 1, \cdots, N. \tag{2.19}$$

Учитывая (2.17), (2.18) и (2.19) получаем

$$\int_c^d |\varphi(x)|\,dx < 3\,|\gamma|\,(d-c). \tag{2.20}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть даны квадрат* $\Delta = [a; b] \times [c; d] \subset T$, *совершенное нигде не плотное множество* $Q \subset \Delta$, *натуральное число* N, *действительное число* $\gamma \neq 0$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует ограниченная функция* $\varphi(x; y)$, *такая, что*

A) $$\varphi(x; y) = \begin{cases} \gamma & \text{при } (x; y) \in Q \\ 0 & \text{при } (x; y) \overline{\in} \Delta, \end{cases}$$

B) $$\iint_\Delta |\varphi(x; y)|\,dxdy \leqslant 2\,|\gamma| \cdot |\Delta|,$$

C) $$|S_{nn}[\varphi]| \leqslant \varepsilon, \quad n < N\ (x; y) \in T,$$

D) $$\iint |S_{nn}[\varphi]|^p\,dxdy \leqslant A(p)\,[\gamma| \cdot |\Delta|]^p, \quad 0 < p < 1; \ n = 1, 2, \cdots,$$

(*где* $A(p)$ *зависит только от* p).

Доказательство. Возьмем натуральное число m настолько большим, чтобы

$$|\gamma| \cdot \frac{|\Delta|}{m} < \frac{\varepsilon}{16 \cdot N}. \tag{2.21}$$

Пусть

$$c_s = c + s \cdot \frac{d-c}{m}; \quad a_s = a + s \cdot \frac{b-a}{m}, \quad s = 0, 1, \cdots, m. \tag{2.22}$$

Поскольку Q — совершенное нигде не плотное множество, то, как легко видеть, существуют интервалы $\delta_k^{(1)} \subset [a_{k-1}; a_k]$ и $\delta_k^{(2)} \subset [c_{k-1}; c_k]$, $k = 1, \cdots, m$ одинаковой длины $|\delta_k^{(i)}| = \delta$, $i = 1, 2$, $k = 1, \cdots, m$ такие, что

$$Q \cap \bigcup_{k,l=1}^{m} \delta_{kl} = \varnothing, \text{ где } \delta_{kl} = \delta_k^{(1)} \times \delta_l^{(2)}: \ k, \ l = 1, \cdots, m. \tag{2.23}$$

Обозначим через

$$\Delta_{kl} = [a_{k-1}; a_k] \times [c_{l-1}; c_l], \ k, \ l = 1, \cdots, m. \tag{2.24}$$

Положим

$$\varphi(x; y) = \begin{cases} \gamma & \text{при } (x; y) \in \Delta \setminus \bigcup_{k,l=1}^{m} \delta_{kl} \\ \gamma \left(1 - \dfrac{|\Delta|}{m^2 \cdot \delta^2}\right) & (x; y) \in \bigcup_{k,l=1}^{m} \delta_{kl} \\ 0 & \text{вне } \Delta. \end{cases} \tag{2.25}$$

Определенная равенством (2.25) функция $\varphi(x; y)$ удовлетворяет условию А) леммы 2. Из (2.24) и (2.25) следует

$$\iint_{\Delta} |\varphi(x; y)| dxdy = \sum_{k,l=1}^{m} \iint_{\Delta_{kl}} |\varphi(x; y)| \, dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k;l=1}^{m} \left[|\gamma| \, |\Delta_{kl}| + |\gamma| \frac{|\Delta|}{m^2 \delta^2} \delta^2 \right] = 2 \, |\gamma| \, |\Delta| \tag{2.26}$$

и, следовательно, условие В) тоже выполнено. Чтобы доказать утверждение C заметим, что для любой ограниченной функции $\varphi(x; y)$ справедливо неравенство

$$\left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t; \tau) \cdot f_1(t) \cdot f_2(\tau) \, dtd\tau \right| \leqslant (4\pi \cdot N)^2 \cdot \max_{0 < t, \tau < 2\pi} \left| \int_0^t \int_0^\tau \varphi(x; y) \, dxdy, \right. \tag{2.27}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(\tau)$ — дифференцируемые функции со следующими свойствами:

$$|f_k(x)| \leqslant 1, \ |f_k'(x)| < N, \ k = 1, 2, \ N > 1. \tag{2.28}$$

В самом деле, используя теорему Фубини и интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t; \tau) \cdot f_1(t) \cdot f_2(\tau) \, dtd\tau = \int_0^{2\pi} f_2(\tau) \left[\int_0^{2\pi} f_1(t) \, d\left(\int_0^t \varphi(x; \tau) \, dx \right) \right] d\tau =$$

$$= \int_0^{2\pi} f_2(\tau) \left[f_1(t) \cdot \int_0^t \varphi(x; \tau) \, dx \Big|_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^t \varphi(x; \tau) \, dx \right) \cdot f_1'(t) \, dt \right] d\tau =$$

$$= f_1(2\pi) \cdot \int_0^{2\pi} f_2(\tau) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \varphi(x; \tau) \, dx \right) d\tau - \int_0^{2\pi} f_1'(t) \times$$

$$\times\left[f_2(\tau)\cdot\left(\int_0^t\varphi(x;\tau)\,dx\right)d\tau\right]dt=f_1(2\pi)\times$$

$$\times\left[f_2(\tau)\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\,\Big|_{\tau=0}^{2\pi}-\int_0^{2\pi}f_2'(\tau)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\right)d\tau\right]-$$

$$-\int_0^{2\pi}f_1'(t)\left[f_2(\tau)\cdot\int_0^t\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\,\Big|_{\tau=0}^{2\pi}-\int_0^{2\pi}f_2'(\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^t\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\right)d\tau\right]dt. \qquad (2.29)$$

Откуда, учитывая (2.28), получаем (2.27). Из (2.27) и (1.1) при $k, l < N$ находим

$$|a_{kl}|+|b_{kl}|+|c_{kl}|+|d_{kl}|<4\cdot N^2\cdot\max_{0<t;\,\tau<2\pi}\left|\int_0^t\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\right|. \qquad (2.30)$$

Теперь докажем, что

$$\left|\int_0^t\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\right|<\frac{\varepsilon}{4\cdot N^4}\quad\text{для всех } 0<t,\ \tau\leqslant 2\pi. \qquad (2.31)$$

Действительно, из (2.24) и (2.25) вытекает

$$\iint_{\Delta_{kl}}\varphi(x;y)\,dxdy=0\quad\text{для всех } 1\leqslant k,\ l\leqslant m\,. \qquad (2.32)$$

Пусть $(t;\tau)\in\Delta$. Тогда для некоторых k_0 и l_0 имеем $a_{k_0}<t\leqslant a_{k_0+1}$, $c_{l_0}<\tau\leqslant c_{l_0+1}$. Отсюда и из (2.32), (2.25) получаем

$$\left|\int_0^t\int_0^{\tau}\varphi(x;y)\,dxdy\right|\leqslant\sum_{k;\,l=1}^{k_0;\,l_0}\left|\iint_{\Delta_{kl}}\varphi(x;y)\,dxdy\right|+\int_a^b\int_{c_{l_0}}^{\tau}|\varphi(x;y)|\,dxdy+$$

$$+\int_{a_{k_0}}^t\int_0^d|\varphi(x;y)|\,dxdy\leqslant 2\left[|\gamma|\frac{|\Delta|}{m}+|\gamma|\frac{|\Delta|}{m^2\,\delta^2}\,m\cdot\delta^2\right]=$$

$$=4|\gamma|\cdot\frac{|\Delta|}{m}<\frac{\varepsilon}{4\cdot N^4}. \qquad (2.33)$$

Аналогично можно доказать неравенство (2.31) при $(t;\tau)\in\Delta$. Учитывая (2.30) и (2.31), получаем

$$|S_{nn}[\varphi]| < \varepsilon \text{ при } n < N, \ (x;\ y) \in T \tag{2.34}$$

и утверждение C) доказано.

Остается доказать выполнение утверждения D).

Положим

$$E_1 = \bigcup_{k=1}^{m} \delta_k^{(1)};\ E_2 = \bigcup_{k=1}^{m} \delta_k^{(2)} \text{ и } E = E_1 \times E_2. \tag{2.35}$$

$$\varphi(x;\ y) = \gamma \cdot \chi_\Delta(x;\ y) - \frac{\gamma \cdot |\Delta|}{m^2 \cdot \delta^2} \cdot \chi_E(x;\ y) =$$

$$= \operatorname{sgn} \gamma \cdot |\gamma|^{1/2} \cdot \chi_{[a;\ b]}(x) \cdot |\gamma|^{1/2} \cdot \chi_{[c;\ d]}(y) - \tag{2.36}$$

$$- \operatorname{sgn} \gamma \cdot \frac{(|\gamma|\ |\Delta|)^{1/2}}{m \cdot \delta} \chi_{E_1}(x) \cdot \frac{(|\gamma| \cdot |\Delta|)^{1/2}}{m \cdot \delta} \chi_{E_2}(y).$$

Таким образом, $\varphi(x;\ y)$ представляется в виде

$$\varphi(x;\ y) = \alpha_1(x) \cdot \alpha_2(y) - \alpha_3(x) \cdot \alpha_4(y) \tag{2.37}$$

где, как легко видеть

$$\int_0^{2\pi} |\alpha_k(t)|\, dt < (|\gamma|\ |\Delta|)^{1/2}. \tag{2.38}$$

В силу (1.2), (2.36), (2.37) и (2.38) имеем

$$\iint_T S_{nn}[\varphi]|^p\, dxdy \leqslant 2\,[B(p)]^2 \cdot [|\gamma| \cdot |\Delta|]^p,\ 0 < p < 1;\ n = 1,\ 2, \cdots. \tag{2.39}$$

Лемма 2 доказана.

§ 3. Доказательство теорем

Пусть $f(x;\ y)$ — заданная суммируемая функция. Как легко видеть, можно определить последовательность функций $f_q(x;\ y)$, $q = 1,\ 2, \cdots$, каждая из которых принимает постоянные значения на квадратах, полученных разбиением квадрата T на конечное число частей, обладающую следующими свойствами:

$$\lim_{n \to \infty} \iint_T \left| f(x,\ y) - \sum_{q=1}^{n} f_q(x;\ y) \right| dxdy = 0, \tag{3.1}$$

$$\iint_T |f_q(x;\ y)|\, dxdy < \frac{1}{2^q},\ q = 2,\ 3, \cdots. \tag{3.2}$$

Для выбранной последовательности $f_q(x;\ y)$ определяются возрастающая последовательность натуральных чисел $\{\nu_q\}_{q=1}^{\infty}$, квадраты $\Delta_k \subset T$, числа γ_k такие, что

$$f_q(x;\ y)=\gamma_k \text{ при } (x;\ y)\in\Delta_k\ \nu_{q-1}<k\leqslant\nu_q, \tag{3.3}$$

где

$$\bigcup_{k=\nu_{q-1}+1}^{\nu_q}\Delta_k=T \text{ и } \Delta_k\cap\Delta_{k'}=\varnothing,\ k\neq k';\ \nu_{q-1}<k;\ k'\leqslant\nu_q. \tag{3.4}$$

Сначала докажем теорему 1. Обозначим через $[a_k^{(1)};\ b_k^{(1)}]$ и $[a_k^{(2)};\ b_k^{(2)}]$ (при фиксированном k) проекции квадрата Δ_k на координатные оси, т. е.

$$\Delta_k=[a_k^{(1)};\ b_k^{(1)}]\times[a_k^{(2)};\ b_k^{(2)}] \tag{3.5}$$

и положим

$$l_k^{(1)}=|\gamma_k|^{1/2},\quad l_k^{(2)}=\operatorname{sgn}\gamma_k\,|\gamma_k|^{1/2}, \tag{3.6}$$

$$Q_k^{(1)}=Q_1\cap[a_k^{(1)};\ b_k^{(1)}];\ Q_k^{(2)}=Q_2\cap[a_k^{(2)};\ b_k^{(2)}], \tag{3.7}$$

где Q_1 и Q_2 — множества, входящие в формулировку теоремы 1.

Применим лемму 1, полагая в ее формулировке

$$[c;\ d]=[a_k^{(i)};\ b_k^{(i)}];\quad Q=Q_k^{(i)};\quad \gamma=l_k^{(i)};\ N=N_k, \text{ где } i=1 \text{ или } 2.$$

Возрастающая последовательность натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет определена позже.

Определим ограниченную функцию $\varphi_k^{(i)}(t)$, удовлетворяющую

$$\varphi_k^{(i)}(t)=\begin{cases} l_k^{(i)} \text{ при } t\in Q_k^{(i)}\\ 0 \quad \text{при } t\,\overline{\in}\,[a_k^{(i)};\ b_k^{(i)}],\end{cases} \tag{3.8}$$

$$\int_0^{2\pi}\varphi_k^{(i)}(t)\,\varphi_n(t)\,dt=0 \text{ при } n\leqslant N_k, \tag{3.9}$$

$$\int_{a_k^{(i)}}^{b_k^{(i)}}|\varphi_k^{(i)}(t)|\,dt\leqslant3\,|l_k^{(i)}|\,(b_k^{(i)}-a_k^{(i)})=3\,(|\gamma_k|\,|\Delta_k|)^{1/2}. \tag{3.10}$$

Положим

$$\psi_k(x;\ y)=\varphi_k^{(1)}(x)\cdot\varphi_k^{(2)}(y), \tag{3.11}$$

$$Q_k=Q_k^{(1)}\times Q_k^{(2)}. \tag{3.12}$$

Очевидно (см. 3.6) и (3.8))

$$\psi_k(x;\ y)=\begin{cases}\gamma_k \text{ при } (x;\ y)\in Q_k\\ 0 \text{ при } (x;\ y)\,\overline{\in}\,\Delta_k.\end{cases} \tag{3.13}$$

Согласно (3.10) и (3.11) имеет место неравенство

$$\iint_{\Delta_k}|\psi_k(x;\ y)|\,dxdy\leqslant9\,|\gamma_k|\cdot|\Delta_k|. \tag{3.14}$$

Из (3.2), (3.3), (3.4) и (3.14) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty}\iint_T|\psi_k(x;y)|\,dxdy=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k=\nu_{q-1}+1}^{\nu_q}\iint_{\Delta_k}|\psi_k(x;y)|\,dxdy<\infty. \qquad (3.15)$$

Положим

$$F(x;y)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x;y). \qquad (3.16)$$

Функция $F(x;y)$ суммируема.

Из (3.13) вытекает, что

$$F(x;y)=f(x;y) \text{ при } (x;y)\in Q=Q_1\times Q_2. \qquad (3.17)$$

При этом отметим, что соотношения (3.15), (3.16) и (3.17) имеют место независимо от выбора последовательности $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$. Теперь покажем, что при подходящем выборе последовательности $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствующая функция $F(x;y)$, будет удовлетворять также требованиям 2) и 3) теоремы 1.

Заметим, что $\psi_k(x;y)\in L_2(T)$ для любого k и поэтому

$$\lim_{nm\to\infty}\iint_T\left|S_{nm}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\psi_l\right]-\sum_{l=1}^{k-1}\psi_l(x;y)\right|^p dxdy=0,\ 0<p<1. \qquad (3.18)$$

Полагая $N_1=2(N_0+1)$ и допуская, что определены числа $N_1<N_2<\cdots<N_{k-1}$ и функции $\psi_1,\cdots,\psi_{k-1}$, выберем $N_k>N_{k-1}$ таким образом, чтобы

$$\iint_T\left|S_{nm}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\psi_l\right]-\sum_{l=1}^{k-1}\psi_l(x;y)\right|^p dxdy<\frac{1}{k} \text{ при } n,\ m>N_k. \qquad (3.19)$$

Тем самым возрастающая последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ определена. Из (3.15) и (3.16) следует, что

$$S_{nm}[F]=\sum_{k=1}^{\infty}S_{nm}[\psi_k], \qquad (3.20)$$

причем ряд сходится равномерно.

Покажем, что

$$\lim_{n,\,m\to\infty}\iint_T|S_{nm}[F]-F(x,y)|^p\,dxdy=0,\ 0<p<1. \qquad (3.21)$$

Пусть $0<p<1$ и $\varepsilon>0$ — произвольное положительное число. Возьмем k_0 настолько большим, чтобы

$$\iint_T\left|\sum_{l=s}^{\infty}\psi_l(x;y)\right|^p dxdy<\frac{\varepsilon}{3},\ s>k_0, \qquad (3.22)$$

$$\max\left[\frac{9\,[B(p)]^2}{2^{q_0\cdot p}};\ \frac{1}{k_0}\right]<\frac{\varepsilon}{3},\tag{3.23}$$

где $B(p)$ константа неравенства (1.2) и число q_0 определено неравенством

$$\nu_{q_0-1}<k_0\leqslant\nu_{q_0}.\tag{3.24}$$

Возьмем n и m настолько большими, чтобы

$$k=\min(i;\,j)>k_0,\tag{3.25}$$

где i и j определяются из условий

$$N_i<n\leqslant N_{i+1},\quad N_j<m\leqslant N_{j+1}.\tag{3.26}$$

Из (3.16) и (3.20) следует, что

$$\iint_T|S_{nm}[F]-F(x;y)|^p\,dxdy\leqslant\iint_T\left|S_{nm}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\psi_l\right]-\sum_{l=1}^{k-1}\psi_l(x;y)\right|^p dxdy+$$

$$+\iint_T\left|\sum_{l=k}^{\infty}\psi_l\right|^p dxdy+\iint_T\left|\sum_{l=k+1}^{\infty}S_{nm}[\psi_l]\right|^p dxdy+\iint_T|S_{nm}[\psi_k]|^p=$$

$$=J_1+J_2+J_3+J_4.\tag{3.27}$$

Из (3.19), (3.22), (3.23), (3.25), (3.26) вытекает

$$J_1<\frac{1}{k}<\frac{1}{k_0}<\frac{\varepsilon}{3},\quad J_2<\frac{\varepsilon}{3}.\tag{3.28}$$

В силу (3.9), (3.11), (3.25) и (3.26) получаем

$$S_{nm}[\psi_l]=S_n(\varphi_l^{(1)})\cdot S_m(\varphi_l^{(2)})\ \text{при}\ l\geqslant k+1,\tag{3.29}$$

так как $\min(n;\,m)\leqslant N_{k+1}$.

Следовательно

$$J_3=0.\tag{3.30}$$

Теперь оценим J_4.

Из (1.2) и (3.11) следует, что

$$\iint_T|S_{nm}[\psi_k]|^p\,dxdy=\int_0^{2\pi}|S_n(\varphi_k^{(1)})|^p\,dx\cdot\int_0^{2\pi}|S_m(\varphi_k^{(2)})|^p\,dy\leqslant(B(p))^2\times$$

$$\times\left(\iint_T|\psi_k|\,dxdy\right)^p.\tag{3.31}$$

Пусть $\nu_{q-1}<k<\nu_q$, так как $k>k_0$, то из (3.14) и (3.31) имеем

$$J_4\leqslant(B(p))^2\left(\iint_T|\psi_k|\,dxdy\right)^p\leqslant 9\,(B(p))^2\left(\iint_T|f_q(x;y)|\right)^p<$$

$$<\frac{9\,(B(p))^2}{2^{q\cdot p}}<\frac{\varepsilon}{3}.\tag{3.32}$$

Учитывая (3.27), (3.28), (3.30) и (3.32), получаем

$$\iint_T |S_{nm}[F] - F(x;\ y)|^p\,dxdy = 0 \text{ при } n,\ m > N_k. \tag{3.33}$$

Выполнение утверждения 2) теоремы 1 доказано.

Если $\min(k;\ l) \leqslant N_1$, то из (3.9) и (3.11) следует, что

$$\iint_T \psi_i(x;\ y)\cdot\varphi_k(x)\cdot\varphi_l(y)\,dxdy = 0 \text{ для всех } i = 1,\ 2, \cdots. \tag{3.34}$$

С другой стороны

$$\iint_T F(x;\ y)\,\varphi_k(x)\,\varphi_l(y)\,dxdy = \sum_{s=1}^{\infty}\iint_T \psi_s(x;\ y)\cdot\varphi_k(x)\cdot\varphi_l(y)\,dxdy. \tag{3.35}$$

Из (3.34) и (3.35) и из того, что $N_1 > 2N_0 + 1$, вытекает выполнение условия 3) теоремы 1. Теорема доказана.

Теперь докажем теорему 2. Пусть $f(x;\ y)$ — произвольная суммируемая функция. Тогда существует последовательность ступенчатых функций $f_q(x;\ y)$, удовлетворяющая условиям (3.1), (3.2), (3.3) и (3.4). Обозначим $Q_k = Q \cap \Delta_k$, где Q — множество, входящее в формулировку теоремы 2.

Пусть далее $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ и $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел.

На основании леммы 2, в формулировке которой полагается

$$\Delta = \Delta_k,\ Q = Q_k,\ \gamma = \gamma_k,\ \varepsilon = \varepsilon_k,\ N = N_k.$$

Мы можем для каждого k найти ограниченную функцию $\varphi_k(x,\ y)$ такую, что

$$\varphi_k(x;\ y) = \begin{cases} \gamma_k \text{ при } (x;\ y) \in Q_k \\ 0 \text{ при } (x;\ y) \overline{\in} \Delta_k, \end{cases} \tag{3.36}$$

$$\iint_{\Delta_k} |\varphi_k(x;\ y)|\,dxdy < 2\,|\gamma_k|\cdot|\Delta_k|, \tag{3.37}$$

$$|S_{nn}[\varphi_k]| < \varepsilon_k = \frac{1}{2^k};\ n \leqslant N_k, \tag{3.38}$$

$$\iint_T |S_{nn}[\varphi_k]|^p\,dxdy \leqslant A(p)\,[|\gamma_k|\cdot|\Delta_k|]^p,\ 0 < p < 1,\ n = 1,\ 2, \cdots. \tag{3.39}$$

Функция

$$g(x;\ y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x;\ y) \tag{3.40}$$

суммируема и равна $f(x;\, y)$ на Q.

Точно таким рассуждением, как при доказательстве теоремы 1, можно убедиться, что при подходящем выборе последовательности $\{N'_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствующая функция $g(x;\, y)$ будет удовлетворять также требованиям 2) теоремы 2.

Полагая $N_1=1$ и допуская, что определены числа $N_1<\cdots<N_{k-1}$ и функции $\varphi_1(x;\, y),\cdots,\varphi_{k-1}$, выберем $N_k>N_{k-1}$ таким образом, чтобы

$$\iint_T\left|S_{nn}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_l\right]-\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_l(x;\, y)\right|^p dxdy<\frac{1}{k}\quad \text{при } n>N_k. \tag{3.41}$$

Очевидно

$$S_{nn}[g]=\sum_{k=1}^{\infty}S_{nn}[\varphi_k]. \tag{3.42}$$

Пусть $0<p<1$ и $\varepsilon>0$ — произвольное положительное число. Возьмем k_0 такое, чтобы

$$\iint_T\left|\sum_{l=s}^{\infty}\varphi_l(x;\, y)\right|^p dxdy<\frac{\varepsilon}{4},\ s>k_0 \text{ и } \max\left[\frac{A(p)}{2^{q_0\cdot p}};\ \frac{(2\pi)^2}{2^{k_0\cdot p}}\cdot\frac{1}{k_0}\right]<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{3.43}$$

где q_0 определяется из условия

$$\nu_{q_0-1}<k_0\leqslant\nu_{q_0}. \tag{3.44}$$

Возьмем n настолько большим, чтобы

$$k>k_0, \tag{3.45}$$

где k определяется из условия

$$N_k<n\leqslant N_{k+1}. \tag{3.46}$$

В силу (3.40) и (3.42) получаем

$$\iint_T|S_{nn}[g]-g(x;\, y)|^p dxdy\leqslant\iint_T\left|S_{nn}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_l\right]-\sum_{l=1}^{k-1}\varphi_l(x;\, y)\right|^p dxdy+$$
$$+\iint_T\left|\sum_{k}^{\infty}\varphi_l\right|^p dxdy+\iint_T\left|\sum_{l=k+1}^{\infty}S_{nn}(\varphi_l)\right|^p dxdy+\iint_T|S_{nn}[\varphi_k]|^p dxdy. \tag{3.47}$$

Учитывая (3.39), (3.41), (3.43), (3.38), (3.46) и (3.47) имеем

$$\iint_T|S_{nn}[g]-g(x;\, y)|^p dxdy<\varepsilon. \tag{3.48}$$

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Доказанные теоремы верны для n-кратных тригонометрических рядов, а также для таких рядов по системе Уолша.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный университет

Поступила 27.XII.1978

Մ. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Ինտեգրելի ֆունկցիաների Ֆուրյեի կրկնակի շարքերի մետրիկայով զուգամիտության մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցվում է, որ յուրաքանչյուր երկու փոփոխականի ինտեգրելի ֆունկցիան, տրված կամայական բազմությունից դուրս, կարելի է փոխել այնպես, որ նոր ստացված ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը ըստ կրկնակի եռանկյունաչափական սիստեմի զուգամիտի L_p, $0 < p < 1$ *մետրիկայով։*

M. G. GRIGORIAN. *On the* L_p; $0 < p < 1$ *metric convergence of Fourie multiple series of integrable functions* (summary)

It is proved in the paper that an integralable function of two variable function from a certain set may be changed so that the Fourie series by the double trigonometric system of the new function convergence by metriecs Lp, $0<p<1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ш. А. Алимов, В. А. Ильин, Е. М. Никитин.* Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений, УМН, XXXI, вып. 6 (192), 1976, 34—35.
2. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., 1961, 448—471.
3. *Г. М. Черномашинцев.* Об «исправлении» функций нескольких переменных, заданных на торе, ДАН СССР, № 2, 1976, 277—278.
4. *Ф. Г. Арутюнян.* Представление функций кратными рядами, ДАН Арм. ССР, XIV, № 2, 1977, 72—75.
5. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. 2, 1965, 453—455.
6. *И. М. Гельфанд.* Лекции по линейной алгебре, 1971, 77—78.