ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 5, 1979 Математика

А. Э. ДЖРБАШЯН

ВЕСОВАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ФУНКЦИИ g_q

1°. Введение. Пусть Ω — открытое подмножество R^n, $n\geq 4$, с компактным замыканием $\overline{\Omega}$ и границей $\partial\Omega$. Пусть Ω — область с конической точкой O: $\partial\Omega\setminus O$ является гладким $(n-1)$-мерным подмногообразием R^n; существует окрестность U точки O в R^n и диффеоморфизм F_1 такие, что $U\cap\overline{\Omega}\overset{F_1}{\approx}D^n\cap K^n$, где D^n — единичный открытый шар, а K^n — замкнутый n-мерный конус, притом центр шара и вершина конуса совпадают с точкой O. Мы ограничиваемся случаем одной конической точки для простоты; случай любого конечного числа таких точек не меняет существа дела.

Далее, существует специальный диффеоморфизм F (превращающийся в гомеоморфизм только в точке O) отображающий Ω в гладкую область Ω^*. Обозначим через t_ξ отрезки внутренних нормалей к $\partial\Omega^*$ в точке ξ длины $\varepsilon>0$, причем ε таково, что отрезки t_ξ лежат в $\overline{\Omega^*}$. Обозначим также $T_x=F^{-1}(t_{F(x)})$ — прообразы нормалей $t_{F(x)}$ в Ω.

Пусть a — гладкая в $\Omega\setminus U$ функция, $a(x)\equiv 1$ вне U и $a(x)=|x|^{(n-1)(c-1)}$ при $x\in v\subset\bar{v}\subset U$, $O\in v$. Здесь c определяется из соотношения $\theta=\frac{\pi}{2c}$, где θ — угол раствора конуса K^n, $\frac{1}{2}<c<\infty$.

Определим, наконец, нужные нам классы функций $\mathbf{H}^p_\alpha(\Omega)$. Это класс всех гармонических в области Ω функций f, представимых как интеграл Пуассона от некоторых граничных функций (тоже обозначаемых через f):

$$f(x)=\int\limits_{\partial\Omega}h(x,y)\,f(y)\,dm_{n-1}(y)\qquad (x\in\Omega)$$

и таких, что конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha}\overset{\text{def}}{=}\left\{\int\limits_{\partial\Omega}|f(y)|^p\,|y|^\alpha\,a(y)\,dm_{n-1}(y)\right\}^{1/p}.$$

Здесь $h(x,y)$ — нормальная производная функции Грина в области Ω, а dm_{n-1} — индуцированная мера Лебега на $\partial\Omega$.

В работе [1] был введен аналог функции Литтльвуда–Пэли для области Ω:

$$g(f)(x)=\left(\int\limits_{T_x}|s-x|\;|\nabla f(x,s)|^2\,ds\right)^{1/2},$$

где $|s-x|$ — расстояние от точки s, $s\in T_x$ до точки x, $x\in\partial\Omega$ по кривой T_x и ds — элемент длины дуги T_x.

Основной результат работы [1] заключается в следующем:

Теорема А. Пусть Ω, $\Omega\subset R^n$ — область с конической точкой O. Тогда, если выполняется условие

$$-\beta-(n-1)c<\alpha<\beta-1-(n-1)(c-1),$$

то существует константа C, зависящая только от p и α такая, что для всех $f\in \mathbf{H}^p_\alpha(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int_{\partial\Omega} g(f)^p(x)\,a(x)|x|^\alpha\,dm_{n-1}(x)\leq C\int_{\partial\Omega}|f(x)|^p a(x)|x|^\alpha dm_{n-1}(x).$$

Здесь и далее β — наименьший положительный корень уравнения $C_\beta^{\frac{n}{2}-1}\left(\cos\frac{\pi}{2c}x\right)=0$, где $C_\beta^\alpha(x)$ — функция Гегенбауэра (см. [2]).

В настоящей статье по аналогии с классическим обобщением функции $g(f)$ (см., например, [3], гл. XIV) вводится обобщенная функция Литтльвуда—Пэли g_q в области Ω:

$$g_q(f)(x)=\left\{\int_{T_x}(|s-x|\,|\nabla f(x,\ s)|)^q\ \frac{ds}{|s-x|}\right\}^{1/q},\ 2\leq q<\infty,$$

а при $q=\infty$ это понимаем как

$$g_\infty(f)(x)=\sup_{s\in T_x}(|s-x|\,|\nabla f(x,\ s)|).$$

Основным результатом является

Теорема 1. *Пусть Ω, $\Omega\subset R^n$ — область с конической точкой O. Если выполняются условия*

$$-(n-1)c<\alpha<c(n-1)(p-1),$$
$$-\beta-(n-1)c<\alpha<\beta-1-(n-1)(c-1),$$

то для любой функции $f\in\mathbf{H}^p_\alpha(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\int_{\partial\Omega}(g_q(f)(x))^p a(x)|x|^\alpha\,dm_{n-1}(x)\leqslant C\int_{\partial\Omega}|f(x)|^p a(x)|x|^\alpha dm_{n-1}(x),$$

где C зависит только от p, q и α.

Отметим, что результаты теорем А и 1 для невесовых классов $\mathbf{H}^p$ $(\alpha=0)$ анонсированы в [4].

Доказательство теоремы 1 будет основано на одной интерполяционной теореме и аналоге максимальной теоремы Харди—Литтльвуда для конической области Ω.

2°. Интерполяционная теорема.

Пусть $(S_j,\ \Sigma_j,\ d\mu_j)$, $j=1,\ 2,\ 3$ — три пространства с мерой. Обозначим $L^r=L^r(S_1,\ \Sigma_1,\ d\mu_1)$; $L^p=L^p(S_2,\ \Sigma_2,\ d\mu_2)$; $L^q=L^q(S_3,\ \Sigma_3,$

$d\mu_3)$, $1 \leqslant p, q, r < \infty$, а через $L^r(L^q)$ будем обозначать пространство L^q-значных L^p-интегрируемых функций: $L^p(L^q) = L^p(L^q(S_3, \Sigma_3, d\mu_3); S_2, \Sigma_2, d\mu_2)$.

Теорема 2. *Пусть T — линейный оператор, действующий непрерывно из L^{r_j} в $L^{p_j}(L^{q_j})$, $j = 1, 2$. Положим*

$$\frac{1}{s} = \frac{\theta}{s_1} + \frac{1-\theta}{s_2},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \quad (s = r,\ p,\ q).$$

Тогда T будет ограничен также из L^r в $L^p(L^q)$.

Доказательство этой теоремы, возможно не новой, вполне стандартно и следует классической схеме доказательства теоремы Рисса—Торина (см., напр., [3], [5]), однако мы приводим его полностью, так как не могли найти ни одной ссылки.

Пусть $S = \{z = x + iy\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \in \mathbf{R}\}$ и функция $s(z)$ задается формулой

$$\frac{1}{s(z)} = \frac{z}{s_1} + \frac{1-z}{s_2} \quad (s = r,\ p,\ q).$$

Пусть f — простая функция из $L^r\left(\frac{1}{r} = \frac{\theta}{r_1} + \frac{1-\theta}{r_2}\right)$, а g—простая функция из $L^{p'}(L^{q'})$ $\left(\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2},\ \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2};\right.$ $\left. p' = \frac{p}{p-1},\ q' = \frac{q}{q-1}\right)$:

$$f = \sum_{j=1}^{N} |f_j| e^{i\xi_j} \chi_{F_j},$$

$$g = \sum_{k=1}^{M} |g_k| e^{i\eta_k} \chi_{G_k},$$

где $F_j \in \Sigma_1$, $G_k \in \Sigma_2 \times \Sigma_3$, притом эти множества попарно не пересекаются. Норма g в пространстве $L^{p'}(L^{q'})$ не превосходит единицы и также можно считать, без ограничения общности, что норма f в L^r равна единице.

Положим, далее

$$f_z = \sum_{j=1}^{N} |f_j|^{\frac{r}{r(z)}} e^{i\xi_j} \chi_{F_j} \equiv |f|^{\frac{r}{r(z)}} e^{i\xi}$$

и

$$g_z = \sum_{k=1}^{M} |g_k|^{\frac{q'}{q'(z)}} e^{i\eta_k} \chi_{G_k} = |g|^{\frac{q'}{q'(z)}} e^{i\eta},$$

где $\xi = \xi_j$, если $x \in F_j$ и аналогично для η.

Определим, наконец, функцию $\varphi(z)$ на S:

$$\varphi(z)=\int\limits_{S_2}\int\limits_{S_3} g_z\cdot Tf_z\,d\mu_3\,d\mu_2.$$

Ясно, что φ аналитична внутри S и непрерывна и ограничена на S. Далее, для любых p и q

$$|\varphi(z)|\leqslant\int\limits_{S_2}\int\limits_{S_3}|g_z\cdot Tf_z|\,d\mu_3\,d\mu_2\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{S_2}\|Tf_z\|_q\cdot\|g_z\|_{q'}\,d\mu_2\leqslant\|Tf_z\|_{p,\,q}\cdot\|g_z\|_{p',\,q'},$$

где $\|\cdot\|_{p,\,q}$ — норма в пространстве $L^p(L^q)$. Имеем

$$|f_{iy}|=|f|^{r\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{r(iy)}}=|f|^{\frac{r}{r_1}},\tag{1}$$

$$|g_{iy}|=|g|^{q'\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{q'(iy)}}=|g|^{\frac{q'}{q'_2}}.\tag{2}$$

Теперь

$$|\varphi(iy)|\leqslant\|Tf_{iy}\|_{p_2,\,q_2}\cdot\|g_{iy}\|_{p'_2,\,q'_2}\leqslant C_2\|f_{iy}\|_{r_1}\cdot\|g_{iy}\|_{p'_2,\,q'_2},$$

в силу предположения теоремы. Благодаря равенствам (1) и (2) имеем

$$\|f_{iy}\|_{r_1}=\left(\int\limits_{S_1}|f_{iy}|^{r_1}\,d\mu_1\right)^{1/r_1}=\left(\int\limits_{S_1}|f|^r\,d\mu_1\right)^{1/r_1}=\|f\|_r^{r/r_1}$$

и

$$\|g_{iy}\|_{p'_2,\,q'_2}=\left(\int\limits_{S_2}\left(\int\limits_{S_3}|g_{iy}|^{q'_2}\,d\mu_3\right)^{p'_2/q'_2}d\mu_2\right)^{1/p'_2}=$$

$$=\left(\int\limits_{S_2}\left(\int\limits_{S_3}|g|^{q'}\,d\mu_3\right)^{p'_2/q'_2}d\mu_2\right)^{1/p'_2}=\left(\int\limits_{S_2}\|g\|_{q'}^{q'p'_2/q'_2}\,d\mu_2\right)^{1/p'_2}=$$

$$=\left(\int\limits_{S_2}\|g\|_{q'}^{p'q'p'_2/p'q'_2}\,d\mu_2\right)^{1/p'_2}=\|g\|_{p',\,q'}^{q'/q'_2}.$$

Таким образом

$$|\varphi(iy)|\leqslant C_2\,\|f\|_r^{r/r_1}\cdot\|g\|_{p',\,q'}^{q'/q'_2}\leqslant C_2.$$

Точно таким же образом получается неравенство

$$|\varphi(1+iy)|\leqslant C_1\|f\|_r^{r/r_1}\cdot\|g\|_{p',\,q'}^{q'/q'_1}\leqslant C_1.$$

Теперь, по классической лемме о трех прямых, получим $(0\leqslant\theta\leqslant 1)$

$$|\varphi(\theta)|\leqslant C_1^{\theta}\cdot C_2^{1-\theta}.$$

Но $\varphi(\theta) = \int\limits_{S_1} \int\limits_{S_2} g \cdot Tf \, d\mu_1 d\mu_2$, поэтому

$$\|Tf\|_{p,q} = \sup \left\{ \left| \int \int g \cdot Tf \, d\mu_1 d\mu_2 \right| : \|g\|_{p',q'} \leqslant 1 \right\} \leqslant C_1^{\theta} C_2^{1-\theta} \|f\|.$$

Теорема доказана.

3°. Максимальная теорема.

Пусть опять Ω, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — область с конической точкой. Под „шаром" на $\partial\Omega$ с центром $x \in \partial\Omega$ понимается пересечение любого шара в $\mathbf{R}^n$ с центром в точке x с поверхностью $\partial\Omega$. Для функции f, измеримой и интегрируемой на $\partial\Omega$, максимальная функция Харди—Литтльвуда определяется следующим образом:

$$f^*(x) = \sup \frac{1}{|S_x|} \int\limits_{S_x} |f(y)| \, dm_{n-1}(y),$$

где sup берется по всем „шарам" с центром x и $|S_x|$ — лебегова мера S_x на $\partial\Omega$.

Пусть Ω^* — гладкая область в $\mathbf{R}^n$, получающаяся из Ω отображением F (нуль переходит в нуль). Пусть обратное отображение F^{-1} задается функцией $x = \varphi(y)$ и $\varphi'(y)$ — якобиан этого отображения. Если функция $\Phi \in L^p(\partial\Omega^*, |y|^{\alpha} dm_{n-1}(y))$, то как известно (см. [6], [7], $\partial\Omega^*$ — гладкая поверхность) имеет место весовая максимальная теорема:

$$\int\limits_{\partial\Omega^*} |\Phi^*(y)|^p |y|^{\alpha} dm_{n-1}(y) \leqslant C \int\limits_{\partial\Omega^*} |\Phi(y)|^p |y|^{\alpha} dm_{n-1}(y),$$

$$1 < p < \infty, \; -(n-1) < \alpha < (n-1)(p-1),$$

где C зависит только от p и α.

Если $f = F^{-1}(\Phi)$, то $f \in L^p(\partial\Omega, \varphi' \cdot |x|^{\alpha'} dm_{n-1}(x))$ и мы приходим к неравенству

$$\int\limits_{\partial\Omega} |F^{-1}(\Phi^*)(x)|^p |\varphi'| |x|^{\alpha'} dm_{n-1}(x) \leqslant C \int\limits_{\partial\Omega} |f(x)|^p |\varphi'| |x|^{\alpha'} dm_{n-1}(x).$$

Мы получим нужное неравенство, если покажем, что $F^{-1}(\Phi^*) \asymp f^*$ ($a \asymp b$ означает, что существуют константы c_1 и c_2 такие, что $c_1 b \leqslant \leqslant a \leqslant c_2 b$).

Пусть S_x — „шар" на $\partial\Omega$ и S_x^* — образ этого „шара" на $\partial\Omega$. Тогда его наименьший и наибольший диаметры соизмеримы ввиду того, что это есть пересечение двух гладких поверхностей в $\mathbf{R}^n$. Это значит, что $F^{-1}(\Phi^*) \asymp (F^{-1}(\Phi))^*$, то есть с точностью до эквивалентности f^* и $F^{-1}(\Phi^*)$ равны. Если еще учесть (см. [1]), что $\varphi'(x) \asymp a(x)$ и $|\varphi(y)| = |y|^c$, то получим $\alpha' = c\alpha$ и, тем самым, требуемую максимальную теорему:

Теорема 3. *Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$ с конической точкой O и раствором $\theta = \frac{\pi}{2c}\left(\frac{1}{2} < c < \infty\right)$. Тогда существует константа C, зависящая только от p и α такая, что для всех $f \in L^p(\partial\Omega$, $a(x)|x|^\alpha dm_{n-1}(x))$ при соблюдении условий $1 < p < \infty$, $-(n-1)c < \alpha < c(n-1)(p-1)$ выполняется неравенство*

$$\int_{\partial\Omega} (f^*(x))^p a(x)|x|^\alpha dm_{n-1}(x) \leqslant C \int_{\partial\Omega} |f(x)|^p a(x)|x|^\alpha dm_{n-1}(x).$$

4°. Основное неравенство.

Доказательство теоремы 1 получится применением теорем А, 2 и 3, если мы докажем следующее неравенство:

$$g_\infty(f)(x) = \sup_{s \in \Gamma_x} (|s - x| \, |\nabla f(x, s)|) \leqslant Cf^*(x). \tag{3}$$

Действительно, тогда по максимальной теореме, для любой функции $f \in \mathbf{H}^p_\alpha(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $-(n-1)c < \alpha < c(n-1)(p-1)$ будем иметь

$$\int_{\partial\Omega} (g_\infty(f)(x))^p a(x)|x|^\alpha dm_{n-1}(x) \leqslant$$
$$\leqslant C \int_{\partial\Omega} (f^*(x))^p a(x)|x|^\alpha dm_{n-1}(x) \leqslant \tag{4}$$
$$\leqslant C \int_{\partial\Omega} |f(x)|^p a(x)|x|^\alpha dm_{n-1}(x).$$

Теперь, применяя (4), теорему А и теорему 2 при

$$S_1 = S_2 = \partial\Omega,\ S_3 = T_x,\ d\mu_1 = d\mu_2 = a(x)|x|^\alpha dm_{n-1}(x),$$
$$d\mu_3 = \frac{ds}{|s-x|},\ Tf(z) = |s - x| \int_{\partial\Omega} \nabla_z h(z, y) f(y)\, dm_{n-1}(y)$$

$(z = (x, s) \in \Omega$, $x \in \partial\Omega$, $s \in T_x)$ и при значениях параметров $r_1 = r_2 = p$, $p_1 = p_2 = p$, $q_1 = 2$, $q_2 = \infty$, получим утверждение теоремы 1.

Таким образом, все сводится к доказательству неравенства (3) для любой функции $f \in \mathbf{H}^p_\alpha(\Omega)$.

Имеем (по определению классов $\mathbf{H}^p_\alpha$)

$$f(z) = \int_{\partial\Omega} h(z, y) f(y)\, dm_{n-1}(y)$$

и

$$\nabla f(z) = \int_{\partial\Omega} \nabla_z h(z, y) f(y)\, dm_{n-1}(y).$$

Для ядер h и ∇h имеют место неравенства (см. [8], [9])

$$0 \leqslant h(z, y) \leqslant C \begin{cases} \dfrac{|z|^{\beta}}{|y|^{n+\beta-1}}, & |z| < \dfrac{1}{2}|y| \\ \dfrac{\delta(z)}{|z-y|^{n}}, & |z| \asymp |y| \\ \dfrac{|y|^{\beta-1}}{|z|^{n+\beta-2}}, & |z| > 2|y| \end{cases} \tag{5}$$

и

$$|\nabla_z h(z, y)| \leqslant C \begin{cases} \dfrac{|z|^{\beta-1}}{|y|^{n+\beta-1}}, & |z| < \dfrac{1}{2}|y| \\ \dfrac{\delta(z)}{|z-y|^{n+1}}, & |z| \asymp |y| \\ \dfrac{|y|^{\beta-1}}{|z|^{n+\beta-1}}, & |z| > 2|y|, \end{cases} \tag{6}$$

где $\delta(z) = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$.

Легко видеть, что $|s-x|\,|\nabla_z h(z, y)|$ удовлетворяет тем же оценкам, что и $h(z, y)$, так что вопрос сводится к установлению неравенства ($f \geqslant 0$)

$$\int_{\partial\Omega} h(z, y) f(y)\, dm_{n-1}(y) \leqslant C f^*(x). \tag{7}$$

Приступим к доказательству этого факта.

Пусть $z \in \Omega$ достаточно близка к $\partial\Omega$. Отрежем „круг" C_ρ на $\partial\Omega$, радиус которого ρ соизмерим с $\delta(z)$. Имеем

$$\int_{\partial\Omega} h(z, y) f(y)\, dm_{n-1}(y) =$$

$$= \left\{ \int_{C_\rho} + \int_{\partial\Omega \setminus C_\rho} \right\} h(z, y) f(y)\, dm_{n-1}(y).$$

Обозначим, далее,

$$I(\rho) = \int_{C_\rho} f(y)\, dm_{n-1}(y) \quad \text{и} \quad m(x) = I(\rho)/\rho^{n-1}.$$

Ясно, что при $y \in C_\rho$ имеет место оценка $h(z, y) < C \dfrac{\delta(z)}{|z-y|^{n}}$. Поэтому

$$\int_{C_\rho} h(z, y) f(y)\, dm_{n-1}(y) \leqslant C \int_{C_\rho} \frac{\delta(z)}{|z-y|^{n}} f(y)\, dm_{n-1}(y) \leqslant$$

$$< \frac{C}{(\delta(z))^{n-1}} I(\rho) \leqslant C\, m(x) \leqslant Cf^*(x),$$

так как $\rho \asymp \delta(z)$ и $m(x) < f^*(x)$.

Оценим теперь интеграл по части $\partial\Omega \setminus C_\rho$ при фиксированном ρ:

$$\int\limits_{\partial\Omega \setminus C_\rho} = \int\limits_{(\partial\Omega \setminus C_\rho) \cap \{|z| \asymp |y|\}} + \int\limits_{(\partial\Omega \setminus C_\rho) \cap \{|y| < \frac{1}{2}|z|\}} +$$

$$+ \int\limits_{(\partial\Omega \setminus C_\rho) \cap \{|y| > 2|z|\}} = J_1 + J_2 + J_3.$$

Имеем

$$J_1 = \int\limits_{(\partial\Omega \setminus C_\rho) \cap \{|z| \asymp |y|\}} h(z, y) f(y)\, dm_{n-1}(y) \leqslant$$

$$\leqslant C \int \frac{\delta(z)}{|z-y|^n} f(y)\, dm_{n-1}(y) \leqslant C \int\limits_\rho^R \frac{dI(r)}{r^{n-1}} =$$

$$= C \left. \frac{I(r)}{r^{n-1}} \right|_\rho^R + Cn \int\limits_\rho^R \frac{I(r)}{r^n}\, dr \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{I(R)}{R^{n-1}} - C \frac{I(\rho)}{\rho^{n-1}} + C\, m(x) \int\limits_\rho^R \frac{dr}{r} \leqslant$$

$$\leqslant Cm(x) \left(1 + \int\limits_\rho^R \frac{dr}{r}\right) \leqslant Cm(x) \cdot \log \frac{R}{\rho} \leqslant C' f^*(x),$$

так как $\frac{R}{\rho}$ — абсолютная константа.

Далее

$$J_2 \leqslant \frac{C}{|z|^{n+\beta-2}} \int\limits_{|y| < \frac{|z|}{2}} |y|^{\beta-1} f(y)\, dm_{n-1}(y) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{|z|^{n+\beta-2}} \int\limits_0^{\frac{|z|}{2}} r^{\beta-1}\, dI(r),$$

$$\int\limits_0^{\frac{|z|}{2}} r^{\beta-1}\, dI(r) = \frac{I(r)}{r^{n-1}} r^{n+\beta-2} \Bigg|_0^{\frac{|z|}{2}} - C \int\limits_0^{\frac{|z|}{2}} r^{\beta-2} I(r)\, dr.$$

Ясно, что

$$\frac{I(r)}{r^{n-1}} r^{n-\beta-2} \Big|_0^{\frac{|z|}{2}} \leqslant m(x) \left(\frac{|z|}{2}\right)^{n+\beta-2},$$

так как легко получить, что $I(r)\, r^{\beta-1} \to 0$ при $r \to 0$.

Кроме того

$$\int_0^{\frac{|z|}{2}} r^{\beta-2} I(r)\, dr = \int_0^{\frac{|z|}{2}} \frac{I(r)}{r^{n-1}} r^{n+\beta-3}\, dr \leqslant$$

$$\leqslant m(x) \int_0^{\frac{|z|}{2}} r^{n+\beta-3}\, dr = Cm(x)\, |z|^{n+\beta-2},$$

если только $n+\beta-2>0$, что, очевидно, выполняется.

Таким образом

$$J_2 \leqslant Cm(x) \leqslant Cf^*(x).$$

Остается оценить последний интеграл:

$$J_3 \leqslant C \int_{|y|>2|z|} \frac{|z|^\beta}{|y|^{n+\beta-1}} f(y)\, dm_{n-1}(y) \leqslant C|z|^\beta \int_{2|z|}^{\infty} \frac{dI(r)}{r^{n+\beta-1}},$$

$$\int_{2|z|}^{\infty} \frac{dI(r)}{r^{n+\beta-1}} = \frac{I(r)}{r^{n+\beta-1}}\Big|_{2|z|}^{\infty} + C\int_{2|z|}^{\infty} \frac{I(r)}{r^{n+\beta}}\, dr,$$

$$\frac{I(r)}{r^{n+\beta-1}}\Big|_{2|z|}^{\infty} \leqslant C\frac{m(x)}{|z|^\beta},$$

так как $I(r)/r^{n+\beta-1} \to 0$ при $r \to \infty$.

Кроме того

$$\int_{2|z|}^{\infty} \frac{I(r)}{r^{n+\beta}}\, dr \leqslant m(x) \int_{2|z|}^{\infty} \frac{dr}{r^{1+\beta}} = C\frac{m(x)}{|z|^\beta}.$$

Окончательно, $J_3 \leqslant Cm(x) \leqslant Cf^*(x)$.

Таким образом, доказано неравенство (7) и тем самым теорема 1.

Выражаю глубокую благодарность Н. А. Широкову за постановку задачи и помощь в работе.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила 15.VIII.1979

Ա. Է. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Կշռային անհավասարություն g_q ֆունկցիայի համար (*ամփոփում*)

Հիմնվելով [1] հոդվածի արդյունքի վրա, աշխատանքում ապացուցվում է Լիթլվուդ-Պելիի ընդհանրացված g_q, $2 < q \leq +\infty$ *ֆունկցիայի վերաբերյալ հայտնի թեորեմի կշռային անալոգը կոնական կետեր ունեցող տիրույթներում։*

A. E. DJRBASHIAN. *Weight norm estimate for the function* g_q (summary)

On the basis of the result of the paper [1] we prove in this work the weighted analogue of the well-known theorem for the generalized Littlewood—Paley function g_q, $2 < q \leq +\infty$ in domains with cone-points.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Э. Джрбашян.* Весовые неравенства для функции Литлвуда—Пэли в областях с коническими точками. Зап. научн. сем. ЛОМИ, 92, 1979, 278—282.
2. *Г. Бейтман, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции, М., Изд. «Мир», 1973.
3. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, М., Изд. «Мир», 1965, т. 12.
4. *Н. А. Широков.* Некоторые теоремы вложения для пространств гармонических функций, Зап. науч. сем. ЛОМИ, 56, 1976, 195—198.
5. *И. Стейн, Г. Вейс.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., Изд. «Мир», 1974.
6. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функции, М., Изд. «Мир», 1973.
7. *E. M. Stein.* Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables, Princeton, N. J., Princeton, Univ. press, XII, 1972.
8. *В. Г. Мазья, Б. А.* Пламеневский. О фундаментальных решениях эллиптических краевых задач, Сообщ. АН Груз. ССР, 73, 1974, 277—280.
9. *В. А. Солонников.* О матрицах Грина для эллиптических краевых задач, I. Труды МИАН СССР, 110, 1970, 107—145, II, там же, 116, 1971, 181—216.