ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 2, 1979 Математика

В. А. АВАКЯН

ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ λ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

1°. Введение. В настоящей работе изучается асимптотическое поведение собственных значений (с. з.) для краевой задачи

$$l[y(x)] = -y''(x) + q(x)\,y(x) = \lambda y(x), \tag{1}$$

$$y(0) - \theta(\lambda)\,y'(0) = 0,^{*}$$

$$y(x) \in L_2(0, +\infty), \tag{2}$$

где $\theta(\lambda)$—некоторая мероморфная функция, отличная от бесконечной константы.

Случай, когда краевое условие не зависит от λ, при некоторых условиях на регулярность потенциала $q(x)$ в бесконечности, впервые был изучен Э. Ч. Титчмаршем (см. [1], стр. 161). Далее, при более слабых условиях на $q(x)$ формула распределения с.з. была получена Б. М. Левитаном (см. [2], стр. 584—587), а случай дифференциальных операторов произвольного четного порядка рассмотрен А. Г. Костюченко в [3]. В работе И. Вальтера [8] доказывается разложимость по собственным функциям краевой задачи (1), (2) в случае, когда $\theta(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$ и интервал конечен. Более сложен вопрос о распределении с.з., когда граничные условия зависят от λ. При линейной зависимости граничных условий от λ этот вопрос для эллиптических краевых задач был решен А. Н. Кожевниковым (см., например, [4]).

Чтобы исследовать распределение с.з. задачи (1), (2) наложим следующие условия на потенциал $q(x)$ и функцию $\theta(\lambda)$:

1°. $|q(x) - q(\xi)| \leqslant c_1 |x - \xi|\, q^{\alpha}(\xi)$, при $|x - \xi| \leqslant 1$, где $\alpha < \dfrac{3}{2}$.

2°. $|q(x)| \leqslant c_2 \exp\left[c_0 |x - \xi|\, q^{1/2}(\xi)\right]$, при $|x - \xi| > 1$, где $c_0 < 1$.

3°. В области $|\xi - y| \leqslant 1$ выполняется неравенство

$$c'\, q(y) \leqslant q(\xi) \leqslant c''\, q(y).$$

4°. $q(x)$—вещественная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $q(x) \geqslant c x^{2+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — любое число.

* Если для какого-либо λ $\theta(\lambda) = \infty$, то условие (2) заменяется следующим: $y'(0) = 0$.

5°. Пусть функция $q(x)$ монотонно возрастает, имеет первую и вторую производные и вогнута. Тогда $q'(x)>0$, $q''(x)>0$.

Далее, пусть выполняется еще условие

$$q(x)\, q''(x) < c_3\, [q'(x)]^3,$$

где c_3 — некоторое конечное число, отличное от нуля.

6°. Функция $\theta(\lambda)$ имеет вид

$$\theta(\lambda) = \sum_1^\infty \frac{\rho_k}{\alpha_k - \lambda}, \tag{3}$$

где ρ_k — комплексные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_1^\infty |\rho_k| < \infty$, а α_k лежат (за исключением быть может конечного числа) в сколь угодно малом угле комплексной плоскости и $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|}$ сходится. При этом предполагается, что вершина угла находится в начале координат, а положительная полуось является его биссектрисой.

2°. Операторная трактовка задачи (1), (2). В этом пункте мы покажем, что задача (1), (2) эквивалентна задаче на собственные значения некоторого линейного оператора в более широком гильбертовом пространстве.

Введем пространство $\mathbf{H}$ (см. [5], стр. 24)

$$\mathbf{H} = L_2(0, +\infty) \oplus l_2. \tag{4}$$

Далее определим оператор $\mathbf{L}$ в $\mathbf{H}$ с областью определения $D_{\mathbf{L}}$. Вектор $Y = \{y(x), y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots\}$ принадлежит $D_{\mathbf{L}}$ в том и только в том случае, когда существуют первая и вторая производные функции $y(x)$ и вместе с $l[y(x)]$ принадлежат $L_2(0, +\infty)$, а компонента $Y^\wedge = \{y_1, y_2, \cdots$ $\cdots, y_k, \cdots\} \in l_2$ удовлетворяет условию

$$\sum_1^\infty y_k = y(0) \text{ и } \sum_1^\infty |\alpha_k y_k| < \infty,$$

здесь $y(0)$ — значение первой компоненты вектора Y в точке 0.

Покажем, что $D_{\mathbf{L}}$ всюду плотна в $\mathbf{H}$. Пусть $H = \{h(x), h_1, h_2, \cdots, h_k, \cdots\} \in \mathbf{H}$ и ортогонален $D_{\mathbf{L}}$. В частности, H ортогонален вектору $Y_l = \{y(x), 0, 0, \cdots, 0, y(0), 0, \cdots\}$, так как Y_l принадлежит $D_{\mathbf{L}}$. Следовательно, принимая во внимание (4), получаем равенство

$$< H, Y_l > = [h(x), y(x)]_{L_2} + y(0) \cdot h_l = 0,$$

где $<\cdot>$ — скалярное произведение в $\mathbf{H}$. Известно (см. [6]), что пара $\{y(x), y(0)\}$ всюду плотна в $L_2(0, +\infty) \oplus C$ и поэтому из верхнего равенства следует, что $h(x) = h_l = 0$. Аналогично можно показать, что остальные компоненты вектора H также равны нулю.

Оператор $\mathbf{L}$ на $Y \in D_{\mathbf{L}}$ определяется по формуле

$$\mathbf{L}Y = \{l\,[y\,(x)],\ \alpha_1 y_1 - \beta_1 y'\,(0),\ \alpha_2 y_2 - \beta_2 y'\,(0), \cdots, \alpha_k y_k - \beta_k y'\,(0), \cdots\}. \tag{5}$$

Как легко установить, оператор $\mathbf{L}$ допускает замыкание в пространстве $\mathbf{H}$. Для этого рассмотрим две такие последовательности $\{U^n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$\lim_{n\to\infty} U^n = U,\ \lim_{n\to\infty} V^n = V \text{ и } U \neq V. \tag{6}$$

Известно (см. [5], стр. 127), что оператор $\mathbf{L}$ будет допускать замыкание в том и только в том случае, когда из (6) следует неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{L}\,U^n \neq \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{L}\,V^n$. Предположим противное. Тогда принимая во внимание формулу (5), получим соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} l\,[u^n\,(x) - v^n\,(x)] = 0 \\ \alpha_1\,(u_1^n - v_1^n) - \beta_1\,\gamma_1\,[u^n\,(x) - v^n\,(x)] = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_k\,(u_k^n - v_k^n) - \beta_k\,\gamma_1\,[u^n\,(x) - v^n\,(x)] = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \tag{7}$$

при $n \to \infty$. Здесь $\gamma_1 \overset{\text{опр.}}{=} \left.\dfrac{d}{dx}\right|_{x=0}$.

Но так как дифференциальное выражение l в определении оператора $\mathbf{L}$ имеет максимальную область определения, то из первого равенства следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} u^n\,(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v^n\,(x)$. Теперь, учитывая, что γ_1 — непрерывный оператор, получим $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_1\,u^n\,(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_1\,v^n\,(x)$. Следовательно, из остальных равенств соотношения (7) вытекает, что

$$\alpha_1 \lim_{n\to\infty} (u_1^n - v_1^n) = \cdots = \alpha_k \lim_{n\to\infty} (u_k^n - v_k^n) = \cdots = 0.$$

С другой стороны, из условия 6° следует, что все α_k отличны от нуля и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} u_k^n = \lim\limits_{n\to\infty} v_k^n\ (k = 1, 2, \cdots)$, что противоречит предположению (6).

Таким образом, $\mathbf{L}$ — замкнутый линейный оператор в пространстве $\mathbf{H}$ со всюду плотной областью определения.

Имеет место

Лемма 1. *Задача на собственные значения (с.з.) оператора* $\mathbf{L}$ *адекватна задаче* (1), (2), *т. е. с.з. оператора* $\mathbf{L}$ *и задачи* (1), (2) *совпадают вместе с их кратностями. Более того, между собственными векторами (с.в.) оператора* $\mathbf{L}$ *и собственными функциями (с.ф.) задачи* (1), (2), *отвечающими одному и тому же с.з., можно установить взаимно-однозначное соответствие (при этом первые компоненты с.в. оператора* $\mathbf{L}$ *являются с.ф. задачи* (1), (2), *отвечающими одинаковым с.з.).*

Доказательство. Пусть Y—некоторый с.в. оператора $\mathbf{L}$, отвечающий с.з. λ_0, т. е. $\mathbf{L} Y = \lambda_0 Y$. Тогда из формулы (5) следуют равенства

$$\left.\begin{array}{l} l\,[y\,(x)] = \lambda_0\, y\,(x) \\ \alpha_1 y_1 - \rho_1 y'\,(0) = \lambda_0 y_1 \\ \alpha_2 y_2 - \rho_2 y'\,(0) = \lambda_0 y_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \alpha_k y_k - \rho_k y'\,(0) = \lambda_0 y_k \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}\right| . \tag{8}$$

Первое из равенств (8) показывает, что $y\,(x)$ удовлетворяет уравнению (1) при $\lambda = \lambda_0$. Для того чтобы показать, что $y\,(x)$ удовлетворяет при $\lambda = \lambda_0$ и граничному условию (2), заметим, что из остальных равенств (8) следуют соотношения:

$$y_k = \frac{\rho_k}{\alpha_k - \lambda_0}\, y'\,(0),\ k = 1,\ 2, \cdots.$$

Теперь, принимая во внимание определение $D_{\mathbf{L}}$, из этих равенств вытекает выполнимость краевого условия (2). Таким образом, мы показали, что первая компонента с.в. оператора $\mathbf{L}$ с с.з. λ_0 является с.ф. задачи (1), (2) с тем же с.з.

Обратно, пусть $y\,(x)$—с.ф. задачи (1), (2) с с.з. λ_0. Обозначим через

$$y_k = \frac{\rho_k}{\alpha_k - \lambda_0}\, y'\,(0),\ k=1,\ 2, \cdots. \tag{9}$$

Так как $y\,(x)$ удовлетворяет граничному условию (2) при $\lambda = \lambda_0$, то ясно, что $\sum\limits_1^\infty y_k = y\,(0)$. Следовательно, вектор $y = \|y\,(x),\ y_1,\ y_2, \cdots, y_k, \cdots\|$* принадлежит области определения оператора $\mathbf{L}$. Заметим также, что сходимость ряда $\sum\limits_1^\infty |\alpha_k y_k|$ сразу следует из соотношений (9), учитывая, что λ_0—фиксированное число, не равное $\alpha_k\,(k = 1,\ 2, \cdots)$** и $\sum\limits_1^\infty |\rho_k| < \infty$. Следовательно, вектор Y принадлежит $D_{\mathbf{L}}$ и, как легко видеть, выполняется равенство $\mathbf{L} Y = \lambda_0 Y$. Тем самым, доказательство леммы окончено.

Отметим, что из определения $D_{\mathbf{L}}$ следует, что область значений оператора $\mathbf{L}$ состоит из таких векторов пространства $\mathbf{H}$, у которых первая компонента принадлежит $L_2\,(0,\ +\infty)$, а вторая—l_1.

Теперь рассмотрим задачу:

---

* Здесь y_k $(k=1,\ 2, \cdots)$ определяются из соотношений (9), а $y\,(x)$ с.ф. задачи (1), (2).

** См. сноску на стр. 91.

$$\mathbf{L}\,Y - \lambda Y = F, \tag{10}$$

где $Y = \{y(x),\ Y^{\Lambda}\} \in D_{\mathbf{L}}$, а $F = \{f(x),\ F^{\Lambda}\}$, $f(x) \in L_2(0, +\infty)$ и $\sum\limits_1^\infty |f_k| < \infty$.

Решение задачи (10) будем искать в виде суммы решений двух других задач, которые мы введем в следующем пункте.

3°. Операторы R и T. Обозначим через R оператор в $L_2(0, +\infty)$, соответствующий задаче

$$\left.\begin{aligned} &l[z(x)] - \lambda z(x) = g(x) \\ &z(0) = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

где $g(x) \in L_2(0, +\infty)$.

Известно (см. например, [2], часть V, гл. XII или [3]), что при выполнении условий 1°—4° R—полуограниченный снизу самосопряженный оператор с дискретным спектром. Более того, при $\lambda < 0$ достаточно больших резольвента $(R-\lambda I)^{-1}$ — ядерный оператор. Не нарушая общности можно считать, что $q(x) \geqslant 1$, тогда спектр оператора R будет лежать только на положительной полуоси. Таким образом, при условиях 1°—5° имеет место (см. [2], стр. 585) следующая формула следов:

$$\operatorname{sp}(R - \lambda I)^{-1} = \int\limits_0^\infty \frac{dN(t, R)}{t - \lambda}, \tag{12}$$

где

$$N(\lambda, R) = \sum_{\lambda_j(R) < \lambda} 1 \sim \frac{1}{2\pi} \int\limits_{q(x) < \lambda} \sqrt{\lambda - q(x)}\, dx \ \text{ при } \lambda \to \infty. \tag{13}$$

Теперь рассмотрим задачу

$$\left.\begin{aligned} &l[v(x)] = 0 \\ &(T - \lambda I)\ V^{\Lambda} = \mathbf{A}^{\Lambda} \end{aligned}\right\}, \tag{14}$$

где T—оператор в l_2 с областью определения D_T, состоящий из векторов $Y^{\Lambda} = \{v_1, v_2, \cdots, v_k, \cdots\} \in l_2$ таких, что

$$\sum_1^\infty v_k = v(0) \ \text{ и } \ \sum_1^\infty |\alpha_k v_k| < \infty.$$

Здесь $v(0)$ — значение в нуле решения уравнения $l[v(x)] = 0$. Оператор T на $Y^{\Lambda} \in D_T$, аналогично оператору $\mathbf{L}$, определяется по формуле

$$T\,V^{\Lambda} = \{\alpha_1 v_1 - \rho_1 v'(0),\ \alpha_2 v_2 - \rho_2 v'(0), \cdots, \alpha_k v_k - \rho_k v'(0), \cdots\}.$$

Ясно, что T—линейный замкнутый оператор в пространстве l_2 с областью определения D_T, всюду плотной в l_2, и с областью значений, состоящей из таких векторов $\mathbf{A}^{\Lambda} = \{a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots\}$, что $\sum\limits_1^\infty |a_k| < \infty$.

Обозначим через T_k $(k=1, 2, \cdots)$ одномерные операторы, действующие на к-ой компоненте вектора V^λ следующим образом:

$$T_k\, v_k = a_k\, v_k - \rho_k v'(0),\ k=1,\ 2, \cdots.$$

Следовательно, для некоторой регулярной точки λ^* резольвента оператора T будет задаваться формулой

$$(T-\lambda I)^{-1} = \{(T_1-\lambda I)^{-1},\ (T_2-\lambda I)^{-1}, \cdots, (T_k-\lambda I)^{-1}, \cdots\}. \tag{15}$$

Теперь отметим, что любое решение уравнения $l\,[v\,(x)]=0$ имеет вид $v\,(x)=C\,\psi\,(x)$, где $\psi\,(x)$ — фиксированное решение, удовлетворяющее условию $\psi\,(0)=1$, а C — некоторая константа. Обозначим через $\Omega_{(T-\lambda I)^{-1}}$ оператор, который каждому вектору $\mathbf{A}^\lambda$ из области значений оператора $(T-\lambda I)^{-1}$ сопоставляет число $v\,(0)$. Тогда, принимая во внимание равенство**

$$C = v\,(0) = \sum_1^\infty (T_k-\lambda I)^{-1}_{a_k},$$

где

$$(T_k-\lambda I)^{-1}_{a_k} = v_k = \frac{\rho_k}{a_k-\lambda}\, C\psi'(0) + \frac{a_k}{a_k-\lambda},$$

получим следующую формулу для оператора $\Omega_{(T-\lambda I)^{-1}}$:

$$\Omega_{(T-\lambda I)^{-1}}\, \mathbf{A}^\lambda = \frac{\sum\limits_1^\infty \frac{a_k}{a_k-\lambda}}{1-\theta\,(\lambda)\,\psi'(0)}. \tag{16}$$

Окончательно из формулы (16) вытекает, что решение задачи (14) задается вектором $V=\{v\,(x),\ V^\lambda\}$, где

$$v\,(x) = \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}}\, \mathbf{A}^\lambda \times \psi\,(x), \tag{17}$$

а

$$v_k = (T_k-\lambda I)^{-1}_{a_k} = \frac{\rho_k}{a_k-\lambda}\, \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}}\, \mathbf{A}^\lambda \times \psi'(0) + \frac{a_k}{a_k-\lambda},\ k=1,\ 2, \cdots. \tag{18}$$

Отметим также, что формулы (15) и (18) вместе задают резольвенту оператора T.

В дальнейшем нам понадобятся оценки операторов $(R-\lambda I)^{-1}$, $(T-\lambda I)^{-1}$ и $\Omega_{(T-\lambda T)^{-1}}$ при достаточно больших $|\lambda|$ вне любого сколь угодно малого угла, содержащего положительную полуось в качестве биссектрисы.

---

* В дальнейшем мы увидим, что спектр оператора T дискретный, откуда и будет следовать существование регулярной точки λ.

** Оно следует из формулы (15) и из определения оператора T.

Оценим сначала функцию $\theta(\lambda)$. Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через Φ_ε угол на комплексной λ-плоскости, задаваемый неравенством $|\arg\lambda| < \varepsilon$. Докажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ вне угла Φ_ε и при достаточно больших $|\lambda|$ имеет место оценка сверху:

$$|\theta(\lambda)| \leqslant \frac{C}{|\lambda|},$$

где C — некоторая положительная константа.

Из условия 6° следует, что для $\frac{\varepsilon}{2}$ можно подобрать такое $N_1 > 0$, что все α_k с номерами $(k = N_1 + 1, N_2 + 2, \cdots)$ будут лежать внутри угла $|\arg\lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$. А так как $\sum_1^\infty |\rho_k|$ сходится, то найдется и $N_2 > 0$ такое, что $\sum_{N_2+1}^\infty |\rho_k| < \sin\frac{\varepsilon}{4}$. Пусть теперь $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда

$$|\theta(\lambda)| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left\{\sum_1^N \frac{|\rho_k|}{\left|\frac{\alpha_k}{|\lambda|} - e^{i\arg\lambda}\right|} + \sum_{N+1}^\infty \frac{|\rho_k|}{\left|\frac{\alpha_k}{|\lambda|} - e^{i\arg\lambda}\right|}\right\} = \frac{1}{|\lambda|}\{M_1 + M_2\}. \tag{19}$$

Из выбора N для M_2 следует оценка

$$M_2 \leqslant \frac{1}{\inf\limits_k \left|\frac{\alpha_k}{|\lambda|} - e^{i\arg\lambda}\right|}\sum_{N+1}^\infty |\rho_k| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{4}}\sum_{N+1}^\infty |\rho_k| < 1.$$

С другой стороны, при $|\lambda|$ достаточно больших M_2 будет меньше или равно некоторой константе. Соединяя оценки для M_1 и M_2, получаем нужную нам оценку сверху.

Чтобы получить для $\theta(\lambda)$ оценку снизу, напишем следующее неравенство:

$$|\theta(\lambda)| \geqslant \left|\left|\sum_1^N \frac{\rho_k}{\alpha_k - \lambda}\right| - \left|\sum_{N+1}^\infty \frac{\rho_k}{\alpha_k - \lambda}\right|\right| = |Q_1 - Q_2|, \tag{20}$$

где N определяется условиями: $\sum_{N_2+1}^\infty |\rho_k| < \varepsilon\sin\frac{\varepsilon}{4}$ и $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Оценивая Q_2 так же как и M_2, получим

$$Q_2 \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\sum_{N+1}^\infty \frac{|\rho_k|}{\left|\frac{\alpha_k}{|\lambda|} - e^{i\arg\lambda}\right|} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{\inf\limits_k\left|\frac{\alpha_k}{|\lambda|} - e^{i\arg\lambda}\right|}\sum_{N+1}^\infty |\rho_k| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

А из представления Q_1 следует, что для любого $C' > \varepsilon$ всегда найдется такое $C'' > 0$, что при $|\lambda| > C''$ будем иметь неравенство:

$$Q_1 > \frac{C'}{|\lambda|}.$$

Поэтому (20) можно продолжить следующим образом:

$$|Q(\lambda)| \geqslant |Q_1 - Q_2| \geqslant \frac{C'}{|\lambda|} - \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \frac{C_2}{|\lambda|},$$

где $C_2 = C' - \varepsilon$. Из этой оценки, принимая во внимание еще оценку сверху, получим, что при больших $|\lambda|$ и для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, вне угла Φ_ε выполняется оценка

$$|\theta(\lambda)| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \tag{21}$$

Далее, чтобы оценить резольвенту самосопряженного оператора R, заметим, что из интегрального представления (учитывая приведенные в пункте 3 некоторые результаты) следует аналогичное (3) представление для $(R - \lambda I)^{-1}$

$$(R - \lambda I)^{-1} = \sum_1^\infty \frac{\Delta_k}{\lambda_k - \lambda},$$

где $\lambda_k \geqslant 0$ — собственные значения оператора R, а $\Delta_k \geqslant 0$ — скачки спектральной функции. Поэтому дословно повторяя рассуждения, примененные при получении (21), можно показать, что вне любого сколь угодно малого угла Φ_2 и при достаточно больших $|\lambda|$ имеет место оценка

$$\|(R - \lambda I)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \tag{22}$$

А для оценки оператора $\Omega_{(T-\lambda I)}{}^{-1}$ нужно воспользоваться формулой (16) и оценкой (21). Тогда при достаточно больших $|\lambda|$ и для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ вне угла Φ_ε можно написать равенство

$$\Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} \mathbf{A}^\lambda = \sum_1^\infty \frac{a_k}{\alpha_k - \lambda}\left[I + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right]. \tag{23}$$

Но так как выражение $\sum_1^\infty \frac{a_k}{\alpha_k - \lambda}$ можно оценить аналогично $\theta(\lambda)$, то из (23) сразу получим оценку

$$\|\Omega_{(T-\lambda I)}{}^{-1}\| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \tag{24}$$

Заметим, что при $\lambda < 0$ достаточно больших из представления (23) также вытекает ядерность оператора $\Omega_{(T-\lambda I)^{-1}}$. Действительно, обозначим через T_{α_k} $(k=1, 2, \cdots)$ оператор умножения к-ой компоненты вектора на число α_k. Тогда формула (23) перепишется так:

$$\Omega_{(T-\lambda I)}{}^{-1} \mathbf{A}^\lambda = \left[I + O\left(\frac{1}{-\lambda}\right)\right] \sum_1^\infty (T_{\alpha_k} - \lambda I)^{-1},$$

откуда, учитывая аддитивность и непрерывность операции взятия следа, получим

$$\operatorname{Sp}\Omega_{(T-\lambda I)^{-1}}=\sum_1^\infty \operatorname{Sp}\left\{\left[I+O\left(\frac{1}{-\lambda}\right)\right](T_{\alpha_k}-\lambda I)^{-1}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_1^\infty \|(T_{\alpha_k}-\lambda I)^{-1}\|_1,$$

где $\|\cdot\|_1$ — ядерная норма (см. [7], стр. 135). Теперь, принимая во внимание, что $\dfrac{1}{|\alpha_k-\lambda|}$ $(k=1,2,\cdots)$ являются S-числами оператора $(T_{\alpha_k}-$ $-\lambda I)^{-1}$, из верхнего неравенства вытекает, что $\Omega_{(T-\lambda I)^{-1}}$ — ядерный оператор при $\lambda<0$ достаточно больших*.

Далее заметим, что из формул (18) и (23) следует, что оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ при $\lambda<0$ достаточно больших допускает представление

$$(T-\lambda I)^{-1}=(T_\alpha-\lambda I)^{-1}\left[I+O\left(\frac{1}{-\lambda}\right)\right], \tag{25}$$

где $T_\alpha=\{T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2},\cdots, T_{\alpha_k},\cdots\}$.

Из определения матричного следа (см. [7], стр. 125) и из представления (25) легко вывести, что при $\lambda<0$ достаточно больших оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ —ядерный**.

4°. Построение резольвенты оператора **L**. Вернемся к задаче (10). Ее решение будем искать в виде суммы

$$Y=Z+V,$$

где $Z=\{z(x), 0, 0,\cdots, 0,\cdots\}$ и $V=\{v(x), v_1, v_2,\cdots, v_k,\cdots\}$.

Здесь $z(x)$ и V соответственно решения задач (11) и (14). Подставив Y в (10), получим равенства***:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=g(x)-\lambda v(x)\\ F^\lambda=\mathbf{A}^\lambda-K_\rho\gamma_1 z(x)\end{array}\right\},$$

где $K_\rho\gamma_1 z(x)=\{\rho_1 z'(0), \rho_2 z'(0),\cdots, \rho_k z'(0),\cdots\}$.

С помощью введенных в пункте 3° операторов эти равенства можно переписать в виде

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=g(x)-\lambda\Omega_{(T-\lambda I)^{-1}}\mathbf{A}^\lambda\times\psi(x),\\ F^\lambda=\mathbf{A}^\lambda-K_\rho\gamma_1(R-\lambda I)^{-1}g(x)\end{array}\right\}. \tag{26}$$

Чтобы решить систему (26) относительно $g(x)$ и $\mathbf{A}^\lambda$, подставим выражение $g(x)$ из первого уравнения во второе, получим

$$F^\lambda=\mathbf{A}^\lambda-K_\rho\gamma_1(R-\lambda I)^{-1}f(x)-K_\rho\gamma_1(R-\lambda I)^{-1}\Omega_{(T-\lambda I)^{-1}}\mathbf{A}^\lambda\times\psi(x).$$

---

* Сходимость ряда $\sum\limits_1^\infty\dfrac{1}{\alpha_k-\lambda}$ вытекает из условия 6°, в силу следствия из леммы 2 (см. п. 5).

** См. предельное соотношение (31).

*** Легко видеть, что D_R и D_T входят в D_L.

Отсюда, учитывая ограниченность операторов K_ρ, γ_1 и оценки (22), (24), можно показать, что при достаточно больших $|\lambda|$ и вне угла Φ_ε имеет место представление

$$F^\lambda = \mathbf{A}^\lambda - O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) f(x) - O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\mathbf{A}^\lambda.$$

Следовательно

$$\mathbf{A}^\lambda = F^\lambda + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\{f(x), F^\lambda\}. \tag{27}$$

С помощью подстановки (27) в первое уравнение системы (26) находим $g(x)$:

$$g(x) = f(x) + \lambda\Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} \times \psi(x) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\{f(x), F^\lambda\}. \tag{28}$$

Соединяя (27) и (28), можно написать матричное равенство

$$\begin{pmatrix} gx \\ \mathbf{A}^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \lambda\psi(x) \times \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(x) \\ F^\lambda \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\begin{pmatrix} f(x) \\ F^\lambda \end{pmatrix}. \tag{29}$$

С другой стороны, из того, что решение задачи (10) представлялось в виде суммы решений задач (11) и (14) вытекает, что

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ Y^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R-\lambda I)^{-1} & \psi(x) \times \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} \\ 0 & (T-\lambda I)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(x) \\ \mathbf{A}^\lambda \end{pmatrix}.$$

Окончательно, принимая во внимание (29), из этого равенства следует, что резольвента оператора $\mathbf{L}$ допускает представление

$$(\mathbf{L}-\lambda I)^{-1}\begin{pmatrix} f(x) \\ F^\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (R-\lambda I)^{-1} & (R-\lambda I)^{-1}\lambda\psi(x) \times \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} + \psi(x) \times \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} \\ 0 & (T-\lambda I)^{-1} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} f(x) \\ F^\lambda \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\begin{pmatrix} (R-\lambda I)^{-1} & \psi(x) \times \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}} \\ 0 & (T-\lambda I)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

при достаточно больших $|\lambda|$ и вне любого угла Φ_ε.

5°. Некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Пусть* $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ — *произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию: для любого* $\varepsilon > 0$ *все* $\nu_k (k = 1, 2, \cdots)$ (*кроме, быть может, конечного числа*) *лежат в угле* Φ_ε. *Тогда имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\substack{\lambda \to -\infty \\ \operatorname{Im}\lambda = 0}} \left\{\sum_1^\infty \frac{1}{\nu_k - \lambda} \Big/ \sum_1^\infty \frac{1}{|\nu_k| - \lambda}\right\} = 1. \tag{31}$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $N = N_\varepsilon > 0$, что все ν_k, $k = N, N+1, \cdots$ лежат в угле $|\arg \nu| < \varepsilon$. Тогда

$$\left|\frac{\nu_k-\lambda}{|\nu_k|-\lambda}-1\right|=\left|\frac{|\nu_k|\cos\frac{\varphi_k}{2}+i|\nu_k|\sin\frac{\varphi_k}{2}-|\nu_k|}{|\nu_k|-\lambda}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\nu_k|\left|\cos\frac{\varphi_k}{2}-1\right|}{|\nu_k|-\lambda}+\frac{|\nu_k|\sin\frac{\varphi_k}{2}}{|\nu_k|-\lambda},$$

где $\varphi_k=\arg\nu_k$ и по условию леммы $\varphi_k\to 0$ при $k\to\infty$. Известно, что для достаточно малого $\varepsilon>0$ имеют место оценки

$$\left|\cos\frac{\varphi_k}{2}\right|=1+O\left(\left|\frac{\varphi_k}{2}\right|^2\right)\text{ и }\left|\sin\frac{\varphi_k}{2}\right|=\left|\frac{\varphi_k}{2}\right|+O\left(\left|\frac{\varphi_k}{2}\right|^3\right).$$

Поэтому из верхнего неравенства вытекает, что

$$\left|\frac{1}{\nu_k-\lambda}\Big/\frac{1}{|\nu_k|-\lambda}-1\right|\leqslant\varepsilon.$$

Тогда при $\lambda<0$ выполняется оценка

$$\left|\left\{\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{\nu_k-\lambda}\Big/\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{|\nu_k|-\lambda}\right\}-1\right|\leqslant\varepsilon. \tag{32}$$

При получении (32) мы воспользовались следующим неравенством: если для положительных чисел a_k и комплексных чисел b_k $(k=1,2,\cdots$ $\cdots,n)$ выполняются неравенства $\left|\frac{b_k}{a_k}\right|<\varepsilon$ $(k=1,2,\cdots,n)$ для произвольного n, то

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\Big/\sum_{k=1}^{n}a_k\right|<\varepsilon.$$

С другой стороны, найдется такое C_1, что при $-\lambda>C_1$ будем иметь

$$\left|\left\{\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\nu_k-\lambda}\Big/\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{|\nu_k|-\lambda}\right\}-1\right|<\varepsilon.$$

Следовательно, при $-\lambda>C_1$ неравенство (32) будет иметь место и при замене N на 1. Лемма доказана.

Заметим, что используя неравенство

$$|\nu_k|\cos\varphi_k-\lambda-|\nu_k|\sin\varphi_k\leqslant|\nu_k-\lambda|\leqslant|\nu_k|\cos\varphi_k-\lambda+|\nu_k|\sin\varphi_k,$$

где λ и $\varphi_k=\arg\nu_k$, совершенно аналогично можно показать, что при выполнении условий леммы 2 имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{\lambda\to-\infty\\ \operatorname{Im}\lambda=0}}\left\{\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\nu_k|-\lambda}\Big/\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\nu_k|-\lambda}\right\}=1. \tag{33}$$

Легко доказать следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $H=H_1\oplus H_2$ — прямая сумма гильбертовых пространств H_1 и H_2. Рассмотрим в H матрицу от операторов*

$$F=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где A и C—операторы, соответственно, в H_1 и H_2, а B—из H_2 в H_1. Тогда оператор F—ядерный в том и только в том случае, когда A, B и C ядерные. При этом имеет место равенство следов

$$\mathrm{Sp}\, F = \mathrm{Sp}\, A + \mathrm{Sp}\, C.$$

Лемма 4. (см. [7], стр. 122). *Если оператор $A \in \sigma_p$ $(p>0)$, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(A)|^p \leqslant (\|A\|_p)^p,$$

знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда оператор A нормален.

Из этой леммы, в частности, следует, что если $A \in \sigma_1$ и все его собственные числа неотрицательны, то

$$\mathrm{Sp}\, A = \|A\|_1.$$

Наконец, нам понадобится также (см. [7], стр. 342)

Лемма 5. (Б. И. Коренблюм). *Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$—неубывающие функции, для которых при некоторых $p\,(>0)$ конечны интегралы*

$$\Phi(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{d\varphi(t)}{(t-\lambda)^p},$$

$$(\lambda \leqslant 0)$$

$$\Psi(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{d\psi(t)}{(t-\lambda)^p}$$

и

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \frac{\Psi(\lambda)}{\Phi(\lambda)} = 1.$$

Если при этом $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ и существует такая положительная константа $\gamma < p$, что для достаточно больших $t < S$

$$\frac{\varphi(S)}{\varphi(t)} \leqslant \left(\frac{S}{t}\right)^{\gamma},$$

то также

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = 1.$$

6°. Окончательные результаты. Из представления (30) следует, что спектр оператора $\mathbf{L}$ дискретен, т. е. состоит только из с.з. При этом все, кроме, быть может, конечного числа, с.з. лежат в любом сколь угодно малом угле Φ_ε. Отсюда, в силу леммы 1, следует дискретность спектра задачи (1), (2).

Далее, учитывая ядерность операторов $(R-\lambda I)^{-1}$, $(T-\lambda I)^{-1}$ и $\psi(x) \times \Omega_{(T-\lambda I)^{-1}}$ при $\lambda < 0$ достаточно больших, с помощью леммы 3 из того же представления (30) можно вывести равенство

$$\mathrm{Sp}\,(\mathbf{L}-\lambda I)^{-1}=\{\mathrm{Sp}\,(R-\lambda I)^{-1}+\mathrm{Sp}\,(T-\lambda I)^{-1}\}+\mathrm{Sp}\Big\{O\Big(\frac{1}{-\lambda}\Big)\times$$
$$\times\,[(R-\lambda I)^{-1}+(T-\lambda I)^{-1}]\Big\}. \tag{34}$$

С помощью ядерной нормы второй член верхнего равенства оценивается следующим образом:

$$\mathrm{Sp}\Big\{O\Big(\frac{1}{-\lambda}\Big)[(R-\lambda I)^{-1}+(T-\lambda I)^{-1}]\Big\}\leqslant\Big\|O\Big(\frac{1}{-\lambda}\Big)\Big\|\times$$
$$\times\,\{\|(R-\lambda I)^{-1}\|_1+\|(T-\lambda I)^{-1}\|_1\}. \tag{35}$$

Заметим, что из результатов, приведенных в пункте 3, следует, что оператор R удовлетворяет условиям следствия из леммы 4. Поэтому имеет место равенство

$$\mathrm{Sp}\,(R-\lambda I)^{-1}=\|(R-\lambda I)^{-1}\|_1 \tag{36}$$

при больших $\lambda<0$.

С другой стороны, так как $\mathrm{Sp}\,(T_0-\lambda I)^{-1}=\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k-\lambda}$ и α_k $(k=1,2,\cdots)$ удовлетворяют условиям леммы 2, то учитывая соотношения (31) и (33) из представления (25) можно вывести, что при $\lambda<0$ достаточно больших имеют место неравенства

$$\mathrm{Sp}\,(T-\lambda I)^{-1}\leqslant\|(T-\lambda I)^{-1}\|_1\leqslant C'\|(T_0-\lambda I)^{-1}\|_1=C'\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha_k-\lambda|}\leqslant$$
$$\leqslant C''\,\mathrm{Sp}\,(T_0-\lambda I)^{-1}. \tag{37}$$

Теперь, учитывая (36) и (37), из неравенства (35) получаем, что

$$\mathrm{Sp}\Big\{O\Big(\frac{1}{-\lambda}\Big)[(R-\lambda I)^{-1}+(T-\lambda I)^{-1}]\Big\}\leqslant O\Big(\frac{1}{-\lambda}\Big)\times$$
$$\times\,\{\mathrm{Sp}\,(R-\lambda I)^{-1}+\mathrm{Sp}\,(T_0-\lambda I)^{-1}\}. \tag{38}$$

Далее, принимая во внимание равенство

$$\mathrm{Sp}(T-\lambda I)^{-1}=\mathrm{Sp}(T_0-\lambda I)^{-1}+\mathrm{Sp}\Big[O\Big(\frac{1}{-\lambda}\Big)(T_0-\lambda I)^{-1}\Big],$$

которое имеет место в силу представления (25), из (34) с помощью неравенства (38) получаем следующий результат.

Лемма 6. *При выполнении условий* $1^\circ-4^\circ$ *и* 6° *имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\substack{\lambda\to-\infty\\ \mathrm{Im}\,\lambda=0}}\{\mathrm{Sp}\,(\mathbf{L}-\lambda I)^{-1}/\mathrm{Sp}\,(R-\lambda I)^{-1}+\mathrm{Sp}\,(T_0-\lambda I)^{-1}\}=1.$$

Теперь сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *При выполнении условий* $1^\circ-6^\circ$ *спектр задачи* (1), (2) *дискретен и (быть может, за исключением конечного чис-*

ла) лежит в сколь угодно малом угле, а формула распределения собственных значений $N(\lambda)$ *имеет асимптотику*

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{2\pi} \int\limits_{q(x) < \lambda} \sqrt{\lambda - q(x)}\, dx + N_0(\lambda), \tag{39}$$

где $N(\lambda) = \sum\limits_{|\lambda_j| < \lambda} 1$, λ_j *— с.з. задачи* (1), (2), *а* $N_0(\lambda) = \sum\limits_{|\alpha_j| < \lambda} 1$, α_j *— полюсы функции* $\theta(\lambda)$.

Доказательство. Из леммы 2 вытекает формула

$$\operatorname{Sp}(T_0 - \lambda I)^{-1} \sim \int\limits_0^\infty \frac{d\,N_0(t)}{t - \lambda} \tag{40}$$

при $\lambda < 0$ достаточно больших.

А так как

$$\int\limits_0^\infty \frac{dN(\mathbf{L}, t)}{t - \lambda} = \sum_1^\infty \frac{1}{|\lambda_j(\mathbf{L})| - \lambda},$$

то из леммы 6, принимая во внимание (12), (40) и лемму 2, получим

$$\lim_{\substack{\lambda \to -\infty \\ \operatorname{Im}\lambda = 0}} \left\{ \int\limits_0^\infty \frac{dN(\mathbf{L}, t)}{t - \lambda} \Big/ \int\limits_0^\infty \frac{d[N(R, t) + N_0(t)]}{t - \lambda} \right\} = 1. \tag{41}$$

Далее предположим, что $N_0(t)$ удовлетворяет следующему тауберовому условию (см. [7], стр. 343): существует такая неубывающая функция $\varphi(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$, что выполняются условия:

1) $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$;

2) при некотором $\gamma < 0$ для достаточно больших $t < s$ выполняется неравенство

$$\frac{\varphi(s)}{\varphi(t)} \leqslant \left(\frac{s}{t}\right)^\gamma;$$

3) $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{N_0(t)}{\varphi(t)} = 1.$

Тогда из соотношения (41) с помощью леммы 5 будет следовать, что

$$N(\mathbf{L}, t) \sim N(R, t) + N_0(t).$$

Отсюда, учитывая формулу (13) и лемму 1, получаем (39).

Теорема доказана.

Замечание 1. На самом деле вместо условия 4 можно было потребовать просто, чтобы $q(x) > cx^\varepsilon$. В этом случае резольвенту можно оценить, используя параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma_1 u.$$

Замечание 2. В условии 6° вместо $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha_k|}<\infty$ можно было потребовать, чтобы сходилась сумма $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha_k|^p}$, где $p>0$ — любое целое число. Тогда вместо оператора $(\mathbf{L}-\lambda I)^{-1}$ нужно рассмотреть оператор $(\mathbf{L}-\lambda I)^{-p}$.

В заключение автор приносит глубокую благодарность А. Г. Костюченко за постановку задачи и внимание при выполнении работы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 17.II.1977

Վ. Հ. ԱՎԱԳՅԱՆ. Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը λ սպեկտրալ պարամետրով եզրային պայմանի մեջ (ամփոփում)

Այս աշխատությունում դիտարկվում է Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը դրական կիսաառանցքի վրա. Ենթադրվում է, որ սպեկտրալ պարամետրը մտնում է նաև եզրային պայմանի մեջ: Այսպես՝ $y(0)-\theta(\lambda)\,y'(0)=0$, որտեղ $\theta(\lambda)$-ն ինչ-որ մերոմորֆ ֆունկցիա է, որը բավարարում է 6° պայմանին:

Ցույց է տրված, որ երբ $q(x)$ պոտենցիալը և $\theta(\lambda)$ ֆունկցիան բավարարում են 1°—5° պայմաններին, (1), (2) խնդիրը ունի միայն դիսկրետ սպեկտր և սեփական արժեքների բաշխման ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով

$$N(\lambda)=\sum_{\lambda_j<\lambda}1\sim\frac{1}{2\pi}\int\limits_{q(x)<\lambda}\sqrt{\lambda-q(x)}\,dx+N_0(\lambda),\ \text{երբ}\ \lambda\to+\infty:$$

V. A. AVAKIAN. *The Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary condition* (summary)

The paper deals with the Sturm-Liouville problem on the positive semi-axis. It is assumed that the spectral parameter also enters into the boundary condition, namely $y(0)-\theta(\lambda)\,y'(0)=0$, where $\theta(\lambda)$ is some meromorphic function, which satisfies condition 6°. Under conditions 1°—5° on potential $q(x)$ and the function $\theta(\lambda)$ it is pruved that the (1), (2) problem has purely discret spectrum and the eigenvalue distribution function is given by formula

$$N(\lambda)=\sum_{\lambda_j<\lambda}1\sim\frac{1}{2\pi}\int\limits_{q(x)<\lambda}\sqrt{\lambda-q(x)}\,dx+N_0(\lambda),\ \text{when}\ \lambda\to+\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э. Ч. Титчмарш.* Разложение по собственным функциям, связанное с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 1, М., ИИЛ, 1960.
2. *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян.* Введение в спектральную теорию. М., Изд. "Наука", 1970.
3. *А. Г. Костюченко.* Докторская диссертация, МГУ, 1966.
4. *А. Н. Кожевников.* Об асимптотике собственных значений эллиптической краевой задачи с λ в уравнении и в граничном условии, УМН, 31, вып. 4 (190), 1976, 265—266.

5. *Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман*. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., Изд. „Наука", 1966.
6. *J. Odhnoff*. Operators generated by differential problems whith eigenvalue parameter in equation and boundary condition, Medd. Lunds Univ. Matem. Sem., 1959, 1—80.
7. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., Изд. „Наука", 1965.
8. *J. Walter*. Regular Eigenvalue problems with Eigenvalue parameter in the boundary condition, Math. Z., 1, 33, № 4, 1973, 301—312.