ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, №№ 5—6, 1978 Математика

А. Е. АВЕТИСЯН

К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ М. М. ДЖРБАШЯНА

В работе М. М. Джрбашяна и автора [1] был введен класс функций

$$H_2[\alpha;\ \omega]\left(\frac{1}{2}<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1\right).$$

Это—совокупность функций, голоморфных в области

$$\Delta(\alpha)=\left\{z:\ |\arg z|<\frac{\pi}{2\alpha},\ 0<|z|<\infty\right\}$$

и удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega\, dr \leqslant M_F<+\infty,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2\alpha}, \tag{1}$$

где M_F не зависит от φ. Там же была установлена следующая теорема (теорема 3, стр. 408).

Теорема А. *Если* $F(z)\in H_2[\alpha;\ \omega]$, *то для любого* $\rho>\frac{\alpha}{2\alpha-1}$ *и* $\mu=\frac{1+\rho+\omega}{2\rho}$ *справедливо интегральное представление*

$$F(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\, r^{\mu-1}=$$

$$=\frac{d}{dr}\left\{r^\mu\int_0^\infty E_\rho\left(r^{1/\rho}\tau^{1/\rho}e^{i\varphi}e^{i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}};\ \mu+1\right)v_{(-)}(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\right\}+$$

$$+\frac{d}{dr}\left\{r^\mu\int_0^\infty E_\rho\left(r^{1/\rho}\tau^{1/\rho}e^{i\varphi}e^{-i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}};\ \mu+1\right)v_{(+)}(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\right\} \tag{2}$$

для всех $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2\alpha}$, *где почти всюду на* $(0,\ \infty)$

$$v_{(\pm)}(\tau)=\frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\,\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty\frac{e^{\pm i\tau t}-1}{\pm it}\,F\left(t^{1/\rho}e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)t^{\mu-1}\,dt\in L_2(0,\infty). \tag{3}$$

При этом для $|\varphi| = \frac{\pi}{2\alpha}$ *равенство* (2) *имеет место почти всюду на* $(0, \infty)$, *а для* $z \in \Delta(\alpha)$ *его можно записать в виде*

$$F(z) = \int_0^\infty E_\rho\left(z e^{i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho};\ \mu\right) v_{(-)}(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty E_\rho\left(z e^{-i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho};\ \mu\right) v_{(+)}(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau. \qquad (4)$$

Здесь под знаками интегралов фигурируют целые функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\ \mu) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma\left(\mu + \frac{n}{\rho}\right)}.$$

Далее была доказана (стр. 414, теорема 4).

Теорема В. *Если* $F(z)$ *определяется по формуле* (4), *где* $v_{(\pm)}(\tau)$ — *произвольные функции из* $L_2(0, \infty)$, *а параметры* $\rho, \alpha, \omega, \mu$ *имеют прежние значения, то она принадлежит классу* $H_2[\alpha;\ \omega]$.

Однако из формулы (4) произвольные функции $v_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, \infty)$ не определяются по формулам (3). Оказывается, что представление функции класса $H_2[\alpha, \omega]$ не единственно, т. е. ту же функцию $F(z)$ из класса $H_2[\alpha;\ \omega]$ в области $\Delta(\alpha)$ можно представить по формуле типа (4), но с другими функциями $v^*_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, \infty)$. Поэтому невозможно восстановить функции $v_{(\pm)}(\tau)$ по значениям $F(z)$ в области $\Delta(\alpha)$.

Естественно возникает вопрос: какие дополнительные данные нужны для восстановления функций $v_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, \infty)$?

В первой части настоящей работы дается ответ на поставленный вопрос. Во второй части полученный результат обобщается на случай, когда число слагаемых интегралов в преобразовании типа (4) больше двух. И в заключение приводится теорема о расщеплении функции интегрируемой с квадратом (с небольшим весом) на заданной конечной системе лучей, исходящих из начала координат*.

1°. Пусть $v_{(\pm)}(\tau)$ — произвольные функции из класса $L_2(0, \infty)$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_0^\infty E_\rho\left(z e^{i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho};\ \mu\right) \tau^{\mu-1}\, v_{(-)}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty E_\rho\left(z e^{-i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho};\ \mu\right) \tau^{\mu-1}\, v_{(+)}(\tau)\, d\tau, \qquad (5)$$

---

* Формулировки этих результатов были опубликованы в заметке [3] автора.

где

$$\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha-1}, \ \mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}, \ -1 < \omega < 1.$$

Как известно ([1], [2]), определенная формулой (5) функция $F(z)$ голоморфна в областях Δ_1 и Δ_2:

$$\Delta_1 = \Delta(\alpha) = \left\{ z;\ |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha},\ 0 < |z| < \infty \right\},$$

$$\Delta_2 = \left\{ z;\ \pi \geqslant |\arg z| > \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho},\ 0 < |z| < \infty \right\}$$

и удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty |F(r e^{i\varphi})|^2 r^\omega \, dr < M_F < \infty,$$

где $|\varphi| < \dfrac{\pi}{2\alpha}$ и $\pi \geqslant |\varphi| > \dfrac{\pi}{2\alpha} + \dfrac{\pi}{\rho}$.

Для любой угловой области B с вершиной в начале координат мы обозначим через $H_{2,\omega}(B)$ класс функций $f(z)$, голоморфных в B и удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty |f(re^{i\theta})|^2 r^\omega < M_f < \infty.$$

для любого луча $re^{i\theta}$, $0 < r < \infty$ из области B. Таким образом, имеем $F(z) \in H_{2,\omega}(\Delta_1)$ и $F(z) \in H_{2,\omega}(\Delta_2)$.

Следующая теорема дает формулу обращения для преобразования (5).

Теорема 1. *Если по произвольным функциям $v_{(\pm)}(\tau)$ из класса $L_2(0, \infty)$ составить функцию*

$$F(z) = \int_0^\infty E_\rho\left(z\, e^{i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho};\ \mu\right) \tau^{\mu-1} v_{(-)}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty E_\rho\left(z\, e^{-i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho};\ \mu\right) \tau^{\mu-1} v_{(+)}(\tau)\, d\tau, \qquad (5)$$

где

$$\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha-1}, \ \mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}, \ -1 < \omega < 1,$$

то почти всюду на $(0, \infty)$ справедливы следующие формулы обращения:

$$v_{(-)}(\tau)=\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\,\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}\,F\left(t^{1/\rho}e^{-i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)t^{\mu-1}\,dt+$$

$$+\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\,\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{i\tau t}-1}{it}\,F\left[t^{1/\rho}e^{-i\left(\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\pi}{\rho}\right)}\right]t^{\mu-1}\,dt, \tag{6}$$

$$v_{(+)}(\tau)=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\,\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{i\tau t}-1}{it}\,F\left(t^{1/\rho}e^{i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)t^{\mu-1}\,dt+$$

$$+\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\,\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}\,F\left[t^{1/\rho}e^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\pi}{\rho}\right)}\right]t^{\mu-1}\,dt.$$

Доказательство. Как уже было отмечено, функция $F(z)$, определенная формулой (5), голоморфна в области $\Delta_1\cup\Delta_2$ и $F(z)\in H_{2,\omega}(\Delta_1)$ и $F(z)\in H_{2,\omega}(\Delta_2)$. Рассмотрим $F(z)$ только в Δ_1. Обозначим ее через $F_1(z)$. Применяя теорему A, для этой функции получим интегральное представление

$$F_1(z)=\int\limits_0^{\infty}E_\rho\left(z\,e^{i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}}\tau^{1/\rho};\ \mu\right)\tau^{\mu-1}\,v^{(1)}_{(-)}(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{\infty}E_\rho\left(z\,e^{-i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}}\tau^{1/\rho};\ \mu\right)\tau^{\mu-1}\,v^{(1)}_{(+)}(\tau)\,d\tau, \tag{7}$$

где почти всюду на $(0,\infty)$

$$v^{(1)}_{(\pm)}(\tau)=\frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\,\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{\pm i\tau t}-1}{\pm it}\,F\left(t^{1/\rho}e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)t^{\mu-1}\,dt. \tag{8}$$

При этом (см. [2], стр. 432, см. также [4]) $F_1(z)=0$, когда $z\in\Delta_2$. Аналогично рассматривая $F(z)$ только в Δ_2 (обозначим ее через $F_2(z)$), по теореме А получим для нее представление

$$F_2(z)=\int\limits_0^{\infty}E_\rho\left(z\,e^{i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}}\tau^{1/\rho};\ \mu\right)\tau^{\mu-1}\,v^{(2)}_{(+)}(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{\infty}E_\rho\left(z\,e^{-i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}}\tau^{1/\rho};\ \mu\right)\tau^{\mu-1}\,v^{(2)}_{(-)}(\tau)\,d\tau, \tag{9}$$

где почти всюду на $(0, \infty)$

$$v^{(2)}_{(\pm)}(\tau) = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^\infty \frac{e^{\pm i\tau t}-1}{\pm it} F\left[t^{1/\rho} e^{\mp i\left(\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\pi}{\rho}\right)}\right] t^{\mu-1}\, dt. \tag{10}$$

При этом $F_2(z) = 0$, когда $z \in \Delta_1$. Складывая (7) и (9), получим для $z \in \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$

$$F(z) = \int\limits_0^\infty E_\rho\left(ze^{i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho};\ \mu\right)\tau^{\mu-1}\left[v^{(1)}_{(-)}(\tau) + v^{(2)}_{(+)}(\tau)\right] d\tau +$$

$$+\int\limits_0^\infty E_\rho\left(ze^{-i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho};\ \mu\right)\tau^{\mu-1}\left[v^{(1)}_{(+)}(\tau) + v^{(2)}_{(-)}(\tau)\right] d\tau. \tag{11}$$

Вычитая (11) из (5), получим для $z \in \Delta$

$$0 = \int\limits_0^\infty E_\rho\left(ze^{i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho};\ \mu\right)\tau^{\mu-1} u_1(\tau)\, d\tau +$$

$$+\int\limits_0^\infty E_\rho\left(ze^{-i\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho};\ \mu\right)\tau^{\mu-1} u_2(\tau)\, d\tau, \tag{12}$$

где

$$u_1(\tau) = v_{(-)}(\tau) - \left[v^{(1)}_{(-)}(\tau) + v^{(2)}_{(+)}(\tau)\right],$$

$$u_2(\tau) = v_{(+)}(\tau) - \left[v^{(1)}_{(+)}(\tau) + v^{(2)}_{(-)}(\tau)\right].$$

Теперь остается доказать, что если сумма интегралов справа в (12) равна нулю в $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, то функции $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$ из $L_2(0, \infty)$ равны нулю почти всюду. Это, как легко видеть, равносильно утверждениям (6) теоремы.

Введем обозначения

$$\Phi_1(z) = \int\limits_0^\infty E_\rho\left(z\, e^{i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)} \tau^{1/\rho};\ \mu\right)\tau^{\mu-1} u_1(\tau)\, d\tau, \tag{13}$$

$$\Phi_2(z) = \int\limits_0^\infty E_\rho\left(z\, e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)} \tau^{1/\rho};\ \mu\right)\tau^{\mu-1} u_2(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Далее обозначим через $B_\rho(\varphi)$ угловую область, которая получается от всей плоскости удалением замкнутого угла раствора $\frac{\pi}{\rho}$, вершина которого находится в начале координат, а ось симметрии совпадает с лучом $\arg z = \varphi$, $0 \leqslant |z| < \infty$. Известно (см. [1], [2]), что $\Phi_1(z)$ голоморфна в области

$$B_\rho\left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}\right) \quad \text{и} \quad \Phi_1(z) \in H_{2,\omega}\left[B_\rho\left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}\right)\right].$$

Аналогично $\Phi_2(z)$ голоморфна в области

$$B_\rho\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho}\right) \quad \text{и} \quad \Phi_2(z) \in H_{2,\omega}\left[B_\rho\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho}\right)\right].$$

Но угловые области пересекаются с двух сторон:

$$B_\rho\left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}\right) \cap B_\rho\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho}\right) = \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2.$$

С другой стороны, согласно (12), когда $z \in \Delta$, $\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = 0$, или $\Phi_1(z) = -\Phi_2(z)$. Отсюда мы заключаем, что $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ аналитически продолжаются на всю плоскость, без начала координат, как однозначные аналитические функции. При этом для любого φ

$$\int_0^\infty |\Phi_k(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr < M_\varphi < \infty.$$

Нулевая точка является изолированной особой точкой для этих функций. Но в окрестности начала координат (а также при $r \to \infty$) имеем равномерную оценку (см. [2], стр. 417)

$$|\Phi_k(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{A}{r^{\frac{1+\omega}{2}}} \quad (k = 1, 2).$$

Так как $|\omega| < 1$, то нулевая точка является устранимой особой точкой, вокруг которой функции $\Phi_k(z)$ ограничены, в то время, как при $r \to \infty$ они стремятся равномерно к нулю. По теореме Лиувилля

$$\Phi_k(z) \equiv 0 \quad (k = 1, 2).$$

Отсюда по теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна с ядром типа Миттаг-Леффлера (см. [2], стр. 237), следует, что почти всюду на $(0, \infty)$ $u_k(\tau) = 0$ $(k = 1, 2)$. Последнее заключение можно было бы сделать и ссылаясь на формулы обращения для преобразований (13) и (14), где используются значения $\Phi_k(z)$ только на одном луче (см. [5]). Теорема 1 полностью доказана.

2°. Пусть $v_k(\tau) \in L_2(0, \infty)$, $k = 1, 2, \cdots, n$ произвольны. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty E_\rho(ze^{-i\varphi_k}\tau^{1/\rho};\ \mu)\, \tau^{\mu-1} v_k(\tau)\, d\tau, \tag{15}$$

где предполагается

$$0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_n < 2\pi$$

и

$$\rho > \alpha = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left\{ \frac{\pi}{\varphi_{k+1} - \varphi_k} \right\}, \quad (\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi).$$

Тогда формула (15) определяет, вообще говоря, разные аналитические функции в угловых областях Δ_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$:

$$\Delta_k = \left\{ z\colon \varphi_k + \frac{\pi}{2\rho} < \operatorname{Arg} z < \varphi_{k+1} - \frac{\pi}{2\rho},\ 0 < |z| < \infty \right\}.$$

При этом $F(z) \in H_{2,\,\omega}(\Delta_k)$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Это станет ясным, если заметить, что k-тый интеграл в правой части (15), как функция от z принадлежит классу $H_{2,\,\omega}[B_\rho(\varphi_k)]$ и $\bigcap\limits_1^n B_\rho(\varphi_k) = \bigcup\limits_1^n \Delta_k$.

При сделанных предположениях относительно φ_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ и ρ верна.

Теорема 2. *Если для произвольных* $v_k(\tau) \in L_2(0, \infty)$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$ *составить функцию*

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty E_\rho(z\, e^{-i\varphi_k} \tau^{1/\rho};\ \mu)\, \tau^{\mu-1} v_{(k)}(\tau)\, d\tau, \tag{16}$$

где $\mu = \dfrac{1+\rho+\omega}{2\rho}$, $-1 < \omega < 1$, *то почти всюду на* $(0, \infty)$ *справедливы следующие формулы обращения* $(k = 1, 2, \cdots, n)$

$$v_k(\tau) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{e^{i\tau t} - 1}{it} F\left[t^{1/\rho} e^{i\left(\varphi_k + \frac{\pi}{2\rho}\right)}\right] t^{\mu-1}\, dt +$$

$$+ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{e^{-i\tau t} - 1}{-it} F\left[t^{1/\rho} e^{i\left(\varphi_k - \frac{\pi}{2\rho}\right)}\right] t^{\mu-1}\, dt. \tag{17}$$

Доказательство. Как уже отметили, функция $F(z)$, определенная формулой (15), голоморфна в области

$$\Delta = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k \text{ и } F(z) \in H_{2,\,\omega}(\Delta_k) (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Рассмотрим функцию $F(z)$ только в Δ_k. Обозначим ее через $F_k(z)$. Применяя теорему А для $F_k(z)$, получим представление

$$F_k(z) = \int_0^\infty E_\rho(z\, e^{-i\varphi_k} \tau^{1/\rho};\ \mu)\, \tau^{\mu-1} v_k^{(+)}(\tau)\, d\tau +$$

$$+\int_0^\infty E_\rho(ze^{-i\varphi_{k+1}}\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\tau^{\mu-1}\,v_{k+1}^{(-)}(\tau)\,d\tau \tag{18}$$

$$(k=1,\ 2,\cdots,\ n),$$

где

$$v_k^{(+)}(\tau)=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\,\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty\frac{e^{it\tau}-1}{it}\,F\left[t^{1/\rho}e^{i\left(\varphi_k+\frac{\pi}{2\rho}\right)}\right]t^{\mu-1}\,dt, \tag{19}$$

$$v_{k+1}^{(-)}(\tau)=\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\,\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty\frac{e^{-it\tau}-1}{-it}\,F\left[t^{1/\rho}e^{i\left(\varphi_{k+1}-\frac{\pi}{2\rho}\right)}\right]t^{\mu-1}\,dt, \tag{20}$$

причем $F_k(z)=0$ в области $\Delta\setminus\Delta_k$ $(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$. Складывая все $F_k(z)$ и имея в виду, что $\sum_{k=1}^{n}F_k(z)=F(z)$, когда $z\in\Delta$, будем иметь

$$F(z)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty E_\rho(z\,e^{-i\varphi_k}\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\tau^{\mu-1}\,\{v_k^{(+)}(\tau)+v_k^{(-)}(\tau)\}\,d\tau. \tag{21}$$

Теперь вычитая (21) из (16), получим для $z\in\Delta$

$$0=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty E_\rho(z\,e^{-i\varphi_k}\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\tau^{\mu-1}\,u_k(\tau)\,d\tau, \tag{22}$$

где

$$u_k(\tau)=v_k(\tau)-\{v_k^{(+)}(\tau)+v_k^{(-)}(\tau)\}, \tag{23}$$

$$(k=1,\ 2,\cdots,\ n).$$

Нам остается доказать, что из (22) следует, что $u_k(\tau)=0$ $(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$ почти всюду на $(0,\ \infty)$. Это, ввиду (23), (13), (20), равносильно утверждениям теоремы (17).

Введем обозначания

$$\Phi_k(z)=\int_0^\infty E_\rho(z\,e^{-i\varphi_k}\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\tau^{\mu-1}\,u_k(\tau)\,d\tau \tag{24}$$

$$(k=1,\ 2,\cdots,\ n).$$

Ясно, что $\Phi_k(z)$ голоморфна в углоной области $B_\rho(\varphi_k)$ и принадлежит там классу $H_{2,\,\infty}[B_\rho(\varphi_k)]$. Обозначим

$$\overline{\Phi}_k(z)=\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}\Phi_m(z).$$

Обозначим, далее, через $\overline{B}_k$ ту компоненту (угловую область) множества $\bigcap_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{n}B_\rho(\varphi_m)$, которая содержит области Δ_k и Δ_{k-1}. Легко видеть, что

$$\bar{\Phi}_k(z) \in H_{2,\omega}[\tilde{B}_k].$$

Но области $B_\rho(\varphi_k)$ и B_k пересекаются с двух сторон:

$$B_\rho(\varphi_k) \cap \bar{B}_k = \Delta_k \cup \Delta_{k-1}.$$

С другой стороны, согласно (22), при $z \in \Delta_k \cup \Delta_{k-1}$

$$\Phi_k(z) + \bar{\Phi}_k(z) = 0$$

или

$$\Phi_k(z) = -\tilde{\Phi}_k(z).$$

Отсюда, как в пункте 1°, заключаем, что функция $\Phi_k(z)$ аналитически продолжается на всю плоскость без начала координат. При этом для любого φ

$$\int_0^\infty |\Phi_k(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \leqslant M < \infty.$$

Как и в конце пункта 1°, отсюда следует, что $\Phi_k(z) \equiv 0$. А это означает, что почти всюду на $(0, \infty)$ $u_k(\tau) = 0$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Теорема 2 доказана.

3°. Пусть Γ означает совокупность лучей

$$\arg z = \varphi_k, \; k = 1, 2, \cdots, n, \; 0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_n < 2\pi,$$

исходящих из начала координат. Γ разбивает плоскость на n угловых областей D_k, $k = 1, 2, \cdots, n$:

$$D_k = \{z;\; \varphi_k < \operatorname{Arg} z < \varphi_{k+1};\; 0 < |z| < \infty\}, \; (\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi).$$

Пусть $u(\zeta)$ — произвольная функция из класса $L_{2,-\omega}(\Gamma)$ $(-1 < \omega < 1)$, т. е. определена на системе лучей Γ и удовлетворяет условию

$$\int_\Gamma |u(\zeta)|^2 |\zeta|^{-\omega} d|\zeta| = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty |u(re^{i\varphi_k})|^2 r^{-\omega} dr < \infty.$$

Обозначим через $H_{2,-\omega}(D_k)(k = 1, 2, \cdots, n)$ класс функций $g(z)$, голоморфных в области D_k и удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty |g(re^{i\varphi})|^2 r^{-\omega} dr < M_g < \infty, \; \varphi_k < \varphi < \varphi_{k+1}. \tag{25}$$

Известно ([1], [2]), что функции класса $H_{2,-\omega}(D_k)$ почти всюду имеют граничные значения $g(re^{i\varphi_k})$ и $g(re^{i\varphi_{k+1}})$, которые также удовлетворяют условию (25).

Справедлива следующая

Теорема 3. *Для данной системы* Γ *и данной функции* $u(\zeta) \in L_{2,-\omega}(\Gamma)$ *существует единственный набор функций* $G_k(z) \in H_{2,-\omega}(D_k)$ *таких, что*

$$u(re^{i\varphi_k}) = G_k(re^{i\varphi_k}) - G_{k-1}(re^{i\varphi_k}) \tag{26}$$
$$(k=2,\ 3,\cdots,\ n+1,\ G_{n+1}(z) = G_1(z)).$$

Доказательство. Полагая

$$\rho > \alpha = \max_k \left\{\frac{\pi}{\varphi_{k+1}-\varphi_k}\right\},\ \mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho},\ -1<\omega<1,$$

составим функцию

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty E_\rho(ze^{i\varphi_k}\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\tau^{\mu-1}\left\{\frac{ie^{i\varphi_k}}{2\pi\rho}u(\tau^{1/\rho}\,e^{i\varphi_k})\,\tau^{1/\rho-\mu}\right\}d\tau. \tag{27}$$

Из условия $u(\zeta) \in L_{2,-\omega}(\Gamma)$ следует, что

$$\frac{ie^{i\varphi_k}}{2\pi\rho}u(\tau^{1/\rho}e^{i\varphi_k})\,\tau^{1/\rho-\mu} \in L_2(0,\infty) \quad (k=1,\ 2,\cdots,\ n).$$

Определенная формулой (27) функция $F(z)$ голоморфна в областях

$$\overline{\Delta}_k = \left\{z;\ -\varphi_{k+1}+\frac{\pi}{2\rho} < \operatorname{Arg} z < -\varphi_k - \frac{\pi}{2\rho},\ 0<|z|<\infty\right\}$$
$$(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

и в каждой области $\overline{\Delta}_k$ принадлежит классу $H_{2,\omega}(\overline{\Delta}_k)$. По теореме 2 имеем

$$\frac{ie^{i\varphi_k}}{2\pi\rho}u(\tau^{1/\rho}\,e^{i\varphi_k})\,\tau^{1/\rho-\mu} =$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \frac{e^{i\tau t}-1}{it}F\left[t^{1/\rho}e^{-i\left(\varphi_k+\frac{\pi}{2\rho}\right)}\right]t^{\mu-1}\,dt +$$

$$+\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}F\left[t^{1/\rho}e^{-i\left(\varphi_k-\frac{\pi}{2\rho}\right)}\right]t^{\mu-1}\,dt$$

или

$$u(\tau^{1/\rho}e^{i\varphi_k}) = e^{-i\frac{\pi}{2}\mu-i\varphi_k}\,\tau^{\mu-\frac{1}{\rho}}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \frac{e^{i\tau t}-1}{it}F\left[t^{1/\rho}e^{-i\left(\varphi_k+\frac{\pi}{2\rho}\right)}\right]t^{\mu-1}\,dt -$$

$$-e^{i\frac{\pi}{2}\mu-i\varphi_k}\,\tau^{\mu-\frac{1}{\rho}}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}F\left[t^{1/\rho}e^{-i\left(\varphi_k-\frac{\pi}{2\rho}\right)}\right]t^{\mu-1}\,dt \equiv \tag{28}$$

$$\equiv G_k(\tau^{1/\rho} e^{i\varphi_k}) - G_{k-1}(\tau^{1/\rho} e^{i\varphi_k}).$$

Для доказательства (26) надо показать, что $G_k(\tau e^{i\varphi_k})$ и $G_{k-1}(\tau e^{i\varphi_k})$ являются граничными значениями функций

$$G_k(z) \in H_{2,-\infty}(D_k) \text{ и } G_{k-1}(z) \in H_{2,-\infty}(D_{k-1}).$$

Докажем, например, первое из этих утверждений. С этой целью рассмотрим функцию

$$g_\theta(z) = \rho(ze^{-i\theta})^{\mu\rho} z^{-1} \int_0^\infty F(te^{-i\theta}) e^{-t^\rho (e^{-i\theta} z)^\rho} t^{\mu\rho - 1}\, dt, \tag{29}$$

где

$$\theta \in \left| \varphi_k + \frac{\pi}{2\rho}, \varphi_{k+1} - \frac{\pi}{2\rho} \right|. \text{ При } \theta = \varphi_k + \frac{\pi}{2\rho} \text{ и } \theta = \varphi_{k+1} - \frac{\pi}{2\rho}$$

под знаком интеграла участвуют граничные значения функции $F(z)$ области $\overline{\Delta}_k$.

Формула (29) определяет $g_\theta(z)$ как функцию, голоморфную угловой области

$$\Delta(\rho, \theta) = \left\{ z; |\operatorname{Arg} z - \theta| < \frac{\pi}{2\rho}, 0 < |z| < \infty \right\}.$$

Так как $F(z) \in H_{2,\infty}(\overline{\Delta}_k)$, то существует функция $G_k(z)$, совпадающая с $g_\theta(z)$ в $\Delta(\rho, \theta)$ и голоморфная в более широкой области D_k, при этом $G_k(z) \in H_{2,\infty}(D_k)$ (см. [2], теорему 7.6). Убедимся в том, что полученная таким образом $G_k(z)$—именно та функция, граничные значения которой участвуют в (28). Действительно, из (29) при $\theta = \varphi_k + \frac{\pi}{2\rho}$, $z = r e^{i(\varphi_k + \delta)}$ ($\delta > 0$ достаточно малое число) имеем

$$G_k[re^{i(\varphi_k+\delta)}] = g_{\varphi_k + \frac{\pi}{2\rho}}[re^{i(\varphi_k+\delta)}] =$$

$$= r^{\mu\rho - 1} \rho e^{i\left[\delta(\mu\rho - 1) - \frac{\pi}{2}\mu - \varphi_k\right]} \int_0^\infty F[t^{1/\rho} e^{-i\left(\varphi_k + \frac{\pi}{2\rho}\right)}]\, e^{tre^{-i\left(\frac{\pi}{2\rho} - \delta\right)\rho}} t^{\mu - 1}\, dt$$

или

$$\int_0^\tau G_k[r^{1/\rho} e^{i(\varphi_k + \delta)}]\, r^{1/\rho - \mu}\, dr \cdot e^{-i\delta(\mu\rho - 1)} =$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{2}\mu - i\varphi_k} \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau e^{-i\left(\frac{\pi}{2} - \delta\rho\right)}} - 1}{-te^{-i\left(\frac{\pi}{2} - \delta\rho\right)}} F[t^{1/\rho} e^{-i\left(\varphi_k + \frac{\pi}{2\rho}\right)}]\, t^{\mu - 1}\, dt.$$

Переходя к пределу под знаками интеграла (что, очевидно, допустимо) при $\delta \to 0$, а затем дифференцируя по τ, получим почти всюду на $(0, \infty)$

$$G_k(\tau^{1/\rho} e^{i\varphi_k}) = e^{-i\frac{\pi}{2}\mu - i\varphi_k} \tau^{\mu-1/\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{e^{i\tau t}-1}{it} F[t^{1/\rho} e^{-i\left(\varphi_k + \frac{\pi}{2\rho}\right)}] t^{\mu-1} dt,$$

что и требовалось (см. (28)). Аналогично доказывается утверждение относительно $G_{k-1}(z)$. Утверждение (26) доказано. Отметим, что в представлении $u(re^{i\varphi_{k+1}})$ фигурируют граничные значения $G_k(re^{i\varphi_{k-1}})$ той же функции $G_k(z)$. Остается доказать единственность представления (26). Предположим, что помимо (26) имеет место также

$$u(re^{i\varphi_k}) = P_k(re^{i\varphi_k}) - P_{k-1}(re^{i\varphi_k}) \tag{30}$$

$$(k = 2, 3, \cdots, n+1, \; P_{n+1}(z) \equiv P_1(z), \text{ где } P_k(z) \in H_{2,-\omega}(D_k)).$$

Сравнивая (26) с (30), получим п. в.

$$G_k(re^{i\varphi_k}) - P_k(re^{i\varphi_k}) = G_{k-1}(re^{i\varphi_k}) - P_{k-1}(re^{i\varphi_k}),$$

т. е. граничные значения функций $G_k(z) - P_k(z) \in H_{2,-\omega}(D_k)$ и $G_{k-1}(z) - P_{k-1}(z) \in H_{2,-\omega}(D_{k-1})$ совпадают почти всюду на общей границе $re^{i\varphi_k}$, $0 < r < \infty$ областей D_k и D_{k-1}. Отсюда функция $G_k(z) - P_k(z)$ из области D_k аналитически продолжается в область D_{k-1} как функция того же класса. Из области она таким же образом продолжается в область D_{k-2} и т. д. В итоге получается, что $T(z) = G_k(z) - P_k(z)$ — однозначная аналитическая функция на всей конечной плоскости без начала координат и удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty |T(re^{i\varphi})|^2 r^{-\omega} dr < M$$

для любого φ. Отсюда как в конце пункта 1° заключаем, что $T(z) \equiv 0$, т. е.

$$G_k(z) \equiv P_k(z) \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Теорема 3 полностью доказана.

Ереванский институт
народного хозяйства

Поступила 15.IX.1978

Ա. Ե. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. Մ. Մ. Ջրբաշյանի ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսության շուրջ (ամփոփում)

Ներկա աշխատանքում, ρ, α, ω, μ պարամետրերի վրա դրված որոշակի պայմանների դեպքում և կամայական $v_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, \infty)$ համար ապացուցվում է Մ. Մ. Ջրբաշյանի և հեղինակի կողմից դիտարկված

$$F(z) = \int_0^\infty E_\rho\left(z e^{i\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu\right) v_{(-)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty E_\rho\left(z e^{-i\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu\right) v_{(+)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau \tag{1}$$

ինտեգրալ ձևափոխության համար շրջման բանաձև։ Այնուհետև այդ արդյունքը ընդհանրացվում է այն դեպքի համար, երբ գումարելիների թիվը (1) տեսքի ձևափոխության մեջ ավելի է երկուսից։ Վերջում բերվում է սկզբնակետից ելնող ճառագայթների սիստեմի վրա քառակուսով ինտեգրելի (փոքր կշռով) ֆունկցիաների տրոհման մասին թեորեմ։

A. E. AVETISIAN. *On the theory of Djrbashian's integral transforms* (summary)

The conversion formula for rhe integral transformation

$$F(z) = \int_0^\infty E_\rho \left(z e^{i\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu\right) v_{(-)}(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty E_\rho \left(z e^{-i\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}} \tau^{1/\rho}; \mu\right) v_{(+)}(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau$$

considered by M. M. Djrbashian and the author ρ, α, ω, μ is obtained under some conditions on parameters and for arbitrary $v_{(+)}(\tau) \in L_2(0, \infty)$. Further this result is generalised to the case of more than two integrals in the transformation of form (1). In conclusion we prove a theorem about the splitting of functions square-integrable (with a small weight) on a finite set of rays starting from the origin.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян* и *А. Е. Аветисян*. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сиб. матем. ж., I, № 3, 1960, 383—426.
2. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. „Наука", М., 1966.
3. *А. Е. Аветисян*. К теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна, ДАН Арм.ССР, 65, № 5, 1977, 266—270.
4. *А. Е. Аветисян*. Две теоремы о функциях, аналитических в угловых областях, ДАН Арм.ССР, XXIX, № 5, 1959.
5. *А. Е. Аветисян*. Некоторые применения теории обобщенных интегральных преобразований, Известия АН Арм.ССР, „Математика", XII, № 5, 1977.