ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

А. Ю. ШАХВЕРДЯН

О ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОСОБОМ МНОЖЕСТВЕ ЕМКОСТИ НУЛЬ

Говорим, что функция $u(x)$, определенная в области D конечной комплексной плоскости обобщенно непрерывна в D, если в каждой точке D $u(x)$ имеет конечный или бесконечный предел, совпадающий со значением функции в этой точке. Если E компакт из D, то говорим, что $u \in H_{E,D}$ (или просто H_E, когда D фиксирована), если u гармонична в $D \setminus E$, обобщенно непрерывна в D и множество неустранимых особенностей u в D совпадает с E; в дальнейшем, если это не оговорено, $E \neq \varnothing$. Логарифмическая емкость E обозначается cap (E). Отметим, что для произвольного компакта E непустоту H_E обеспечивают теорема М. В. Келдыша о существовании равномерно непрерывного потенциала ([1]) и теорема Эванса—Сельберга ([2], стр. 75).

Согласно теореме Р. Неванлинны—Д. Линдеберга ([3], стр. 142) из наших определений вытекает, что если $u \in H_E$ и u ограничена в окрестности E, то cap $(E) > 0$. В работах Е. П. Долженко и Л. Карлесона (см. [4—6]) полностью исследован вопрос о связи степени гладкости ограниченной функции $u \in H_E$ и хаусдорфовой размерности компакта E. Здесь мы рассматриваем этот же вопрос для случая гармонических функций двух действительных переменных и cap $(E) = 0$, причем, что естественно (см. лемму 2), мерой гладкости функции $u \in H_E$ мы считаем скорость роста ее вблизи особого множества E.

Нам будут необходимы следующие обозначения и определения Расстояние между точкой x и множеством E обозначаем $\rho(x, E)$ $C(x, r)$ есть круг с центром x радиуса r. Для $r > 0$ рассматриваем множества $D_r = \{x \in D | \rho(x, E) \geq r\}$. Если функция u определена и непрерывна вблизи E, то

$$M(r; u) = \max \{|u(x)| \,|\, x \in \partial D_r\}, \quad m(r; u) = \min \{|u(x)| \,|\, x \in \partial D_r\}.$$

Пусть

$$d_E(r) = \sup \{\rho(\xi, D_r) | \xi \in E\}.$$

Если α — действительное число, то обозначаем для краткости $l_\alpha(r) = \left(\log \frac{1}{r}\right)^\alpha$, $l_1(r) = l(r)$. Если $h(r) > 0$ — ограниченная функция на $(0, 1]$, $\delta > 0$, то $h(E; \delta) = \inf \left\{\sum_k h(r_k) | r_k < \delta\right\}$, где нижняя грань берется по всем конечным или счетным покрытиям E кругами радиусов r_ε. Конечное или бесконечное число $h(E, +0) = h(E)$ есть h-мера Хаусдорфа множества E. Для заданного компакта E и функции σ, $0 < \sigma(\eta) \leqslant \eta$, $\lim\limits_{\eta \to +\infty} \sigma(\eta) = +\infty$ вводим две измеряющие неотрицательные функции

$$h_\sigma^{(1)}(r) = \frac{\sigma(l(r))}{\log \dfrac{1}{d_E(r)}}, \quad h_\sigma^{(2)}(r) = \sup\left\{ \frac{k\sigma(\eta) - l(r)}{\eta - l(r)} \,\middle|\, \eta > l(d_E^{-1}(r)) \right\},$$

где $k = \mathrm{const} > 0$ уточняется дальше. Конечную вполне аддитивную функцию множества μ, заданную на борелевских подмножествах плоскости, $\operatorname{supp}(\mu) = E$ называем распределением массы на E и обозначаем: $\mu(x, r) = \mu(C(x, r))$. Соответствующий логарифмический потенциал обозначаем u_E^μ или просто u^μ:

$$u^\mu(x) = \int\limits_E \log \frac{1}{|\xi - x|}\, d\mu(\xi).$$

Лемма 1. *Пусть E — непустое компактное множество диаметра < 1, μ — распределение массы на E с потенциалом u^μ. Тогда*

1°. *если* $M(r; u^\mu) \leqslant \sigma(l(r))$, *то* $h_\sigma^{(1)}(E) > 0$;

2°. *если* $\sigma(l(r)) \leqslant m(r; u^\mu)$, *то* $h_\sigma^{(2)}(E) \leqslant 5$;

3°. *если* $\sigma(l(r)) = o(m(r; u^\mu))$, *то* $h_\sigma^{(2)}(E) = 0$;

Доказательство. 1°. Так как $\operatorname{diam}(E) < 1$, то для каждой точки $x \in E^c$, достаточно близкой к E ($\rho(x, E) \leqslant 1 - \operatorname{diam}(E)$), функция $\psi(\xi) = -\log|x - \xi|$ ($\xi \in E$) неотрицательна, и неравенство Чебышева

$$\mu(\psi \geqslant c) \leqslant \frac{1}{c} \int\limits_E \psi\, d\mu \quad (c > 0) \tag{1}$$

дает нам

$$\mu(x, r) \leqslant [l(r)]^{-1} \cdot u^\mu(x), \ 0 < r \leqslant 1.$$

Если зафиксировать $\xi \in E$ и выбрать $x_\xi \in D_r$ так, что $\rho(\xi, D_r) = |x_\xi - \xi|$, то

$$C(\xi, r) \subset C(x_\xi, 2\rho(\xi, D_r)) \subset C(x_\xi, 2d_E(r))$$

и из предыдущего неравенства вытекает

$$\mu(r, \xi) \leqslant [l(2d_E(r))]^{-1} \cdot M(r; u^\mu).$$

Если $0 < r \leqslant d_E^{-1}(1/4)$, то $\log d_E(r) \geqslant 2 \log 2d_E(r)$ и, следовательно для каждого $\xi \in E$ и каждого такого r

$$\mu(r, \xi) \leqslant 2[l(d_E(r))]^{-1} \cdot \sigma(l(r)).$$

Теперь ясно, что для каждого круга C_r радиуса r, $0 < r \leqslant d_E^{-1}(1/4)$ выполнено $\mu(C_r) \leqslant 2h_\sigma^{(1)}(2r)$. Если применить теорему 1 из [6] (стр. 14), то нетрудно убедиться, что $h_s^{(1)}(E) > 0$ (в нужной нам части цитируемой теоремы не используются ни монотонность, ни непрерывность измеряющей функции).

2°. Нам удобно сперва рассмотреть случай $\mu(E) = 1$.

Если $r > 0$ и $x \in D_r$ фиксированы, то из неравенства Чебышева (1), примененного к функции $\varphi(\xi) = \log r^{-1} \cdot |x - \xi|$ вытекает

$$1 - \mu(x, t) \leqslant \frac{1}{\log \frac{t}{r}} \int_E \log \frac{|\xi - x|}{r} d\mu(\xi), \quad t \geqslant r,$$

и после простых преобразований будем иметь $\forall r > 0 \forall x \in \partial D_r \forall t \geqslant r$

$$\mu(x, t) \geqslant \frac{m(r; u^\mu) + \log t}{\log \frac{t}{r}}. \tag{2}$$

Пусть теперь $\xi \in E$ и $t > 0$ фиксированы, а $r_t = d^{-1}(t)$, $0 < r_t \leqslant t$. Если r, $0 < r \leqslant r_t$ произвольно, то $d(r) \leqslant t$ и, следовательно, $\rho(\xi, D_r) \leqslant t$; это означает, что для этих значений r $D_r \cap C(\xi, t) \neq \varnothing$. Так как $\forall x \in C(\xi, t)$ справедливо $C(\xi, 2t) \supset C(x, t)$ и, следовательно, $\mu(\xi, 2t) \geqslant \mu(x, t)$, то выбирая $x \in \partial D_r \cap C(\xi, t)$ и учитывая (2) и условия леммы будем иметь $\forall r$, $0 < r \leqslant r_t$

$$\mu(\xi, 2t) \geqslant \frac{\sigma(l(r)) - l(t)}{l(r) - l(t)} \tag{3}$$

для каждого $t > 0$ и $\xi \in E$. Для того чтобы освободиться от ограничения $\mu(E) = 1$ достаточно рассмотреть функцию ν: $\nu(e) = [\mu(E)]^{-1} \times \mu(e)$, где e — борелевское множество.

Тогда

$$\nu(E) = \int_E d\nu \text{ и } \nu(E) = 1$$

и нетрудно видеть, что (3) в общем случае записывается в виде

$$k\mu(\xi, 2t) \geqslant \frac{k\sigma(l(r)) - l(t)}{l(r) - l(t)},$$

где $\xi \in E$, $t > 0$, $0 < r \leqslant r_t$ — любые, а $k > 0$ — конечная постоянная, $k = \mu(E)^{-1}$. То есть $\forall \xi \in E\ \forall t > 0$ верно неравенство $k\mu(\xi, 2t) \geqslant h_s^{(2)}(t)$. Если теперь $\delta > 0$ — произвольное фиксированное число, то, очевидно, $E \subset \bigcup_{\xi \in E} C(\xi, \delta)$ и, согласно общей лемме Л. Альфорса о покрытиях, можно указать не более чем счетное (в данном случае конечное) число кругов $C_n = C(\xi_n, \delta)$, образующих в совокупности покрытие множества E с кратностью не превосходящей некоторой абсолютной постоянной N ($N \leqslant 5$; см. [3], стр. 148). Тогда

$$h^{(2)}_{\sigma}(E,\ \delta/2) \leqslant \sum_{n} h^{(2)}_{\sigma}\ (\delta/2) < k\cdot \sum_{n} \mu\,(C_n) \leqslant 5\,k\mu\,(E)=5,$$

и устремив $\delta \to +0$, будем иметь нужный результат.

3°. Если $n \geqslant 1$ — фиксированное натуральное число, то согласно условию найдется $r_n > 0$ так, что $\forall r,\ 0 < r \leqslant r_n\ m\,(r;\ u^{\mu}) \geqslant n\cdot\sigma\,(l\,(r))$ и из 2° вытекает, что $\forall n \geqslant 1\quad h^{(2)}_{n\sigma}\,(E) \leqslant 5$. Если

$$f_{\sigma}\,(r,\ \eta) = \frac{k\sigma\,(\eta) - l\,(r)}{\eta - l\,(r)}\,,$$

то $f_{n\sigma} \geqslant n\cdot f_{\sigma}$, следовательно и $h^{(2)}_{n\sigma} \geqslant n\cdot h^{(2)}_{\sigma}$, откуда и получим, что $\forall n \geqslant 1,\ \ h^{(2)}_{\sigma}\,(E) \leqslant 5/n$, что и означает, что $h^{(2)}_{\sigma}\,(E) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* cap $(E) = 0$ *и* $u \in H_E$, *то существует потенциал Эванса-Сельберга множества* E u^{μ} *так, что в некоторой окрестности* E $|u| = u^{\mu} + O\,(1)$.

Доказательство. Если предположить, что в некоторой точке $\xi_0 \in E$ $|u\,(\xi_0)| < \infty$, то в силу непрерывности $|u|$ найдется окрестность $C_0 \subset D$ точки ξ_0 такая, что $|u\,(x)| \leqslant 2\,|u\,(\xi_0)|$ для $x \in C_0$, и если рассмотреть сужение функции u в C_0/E, то согласно теореме Р. Неванлинны — Д. Линдеберга u гармонически продолжится в ξ_0, что противоречит условию леммы. Следовательно, $|u| = +\infty$ в каждой точке $\xi \in E$, и если ввести в рассмотрение множества $E_{+} = \{\xi \in E | u\,(\xi) = +\infty\}$, $E_{-} = \{\xi \in E | u\,(\xi) = -\infty\}$, то легко заметить, что $|u|$ супергармонична в некоторой окрестности множества E. Но тогда согласно теореме Ф. Рисса ([2], стр. 48) в некоторой области D', $E \subset D' \Subset D$ $|u\,(x)|$ представляется в виде

$$|u\,(x)| = \int\limits_{D'} \log \frac{1}{|\xi - x|}\,d\mu\,(\xi) + v\,(x)\ \ (x \in D'),$$

где $0 < \mu\,(D') < \infty$, а $v\,(x)$ гармонична в D'. Вследствие того, что $|u|$ гармонична в D'/E, представляющая мера сосредоточена на E, то есть в D': $|u| = u^{\mu}_{E} + v$ и u^{μ}_{E} есть потенциал Эванса-Сельберга множества E. Лемма доказана.

В следующей теореме $\omega\,(\delta;\ u) = \omega\,(\delta;\ u;\ D)$ означает модуль непрерывности функции u, соответствующий хордальной метрике

$$[a,\ b] = \frac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\ \sqrt{1+|b|^2}}$$

a, b — точки плоскости) на сфере Римана.

Теорема 1. *Пусть* $u \in H_E$ *и* cap $(E) = 0$. *Тогда*:

1°. *если* $M(r;\ u) = O\,(\sigma\,(l\,(r)))$, *то* $h^{(1)}_{\sigma}\,(E) > 0$;

2°. *если* $\sigma\,(l\,(r)) = O\,(m\,(r;\ u))$, *то* $h^{(2)}_{\sigma}\,(E) < \infty$

и если $\sigma\,(l\,(r)) = o\,(m(\,r;\ u))$, *то* $h^{(2)}_{\sigma}\,(E) = 0$;

3°. *если* $\omega(\delta; u) = O([\sigma(l(\delta))]^{-1})$, *то* $h_\sigma^{(2)}(E) < \infty$,

и если $\omega(\delta; u) = o([\sigma(l(\delta))]^{-1}$, *то* $h_\sigma^{(2)}(E) = 0$.

Доказательство. 1°. Так как $\operatorname{cap}(E)=0$, то E вполне разрывно и, следовательно, если $r_0 > 0$ достаточно мало, то найдется некоторая компонента связности D_0 области $D_{r_0}^c$ так, что $\operatorname{diam}(D_0) < 1$. Если рассмотреть сужение функции u на область D_0, то согласно лемме 2 найдется некоторый потенциал u^μ с носителем массы в $E \cap D_0$ так, что $|u| = u^\mu + O(1)$ в некоторой подобласти D_0, содержащей $E \cap D_0$. Тогда для всех достаточно малых $r > 0$ $M(r; u^\mu) = O(\sigma(l(r)))$ и из леммы 1 вытекает, что $h_\sigma^{(1)}(E \cap D_0) > 0$ и, если учесть, что $d_E \leqslant d_{E \cap D_0}$, то и $h_\sigma^{(1)}(E) > 0$.

2°. Согласно лемме 2 в некоторой окрестности компакта E $|u| = u^\mu + O(1)$, $\operatorname{supp}(\mu) = E$ и нужные неравенства вытекают из пунктов 2° и 3° леммы 1, так как условие $\operatorname{diam}(E) < 1$ при их доказательстве не использовалось.

3°. Имеем

$$\omega(\delta; u) \geqslant \sup\{[u(x), u(y)] \mid |x-y| \leqslant \delta,\ x \in E^c \cap D,\ y \in E\}$$

или

$$2\omega(\delta; u) \geqslant \sup\{|u(x)|^{-1} \mid x \in D \cap D_\delta^c\}.$$

Из принципа минимума для супергармонических функций и леммы 2 вытекает, что правая часть последнего неравенства совпадает с $m(\delta; u)$, то есть $m(\delta; u) \leqslant 2\omega(\delta; u)$ для всех достаточно малых $\delta > 0$ и требуемые неравенства вытекают из леммы 1. Теорема доказана.

Пусть E — компактное множество емкости 0 и $p(r) \geqslant 0$ — невозрастающая функция на $(0,1]$. Скажем, что функция $u \in H(p(r))$, если u обобщенно непрерывна в некоторой области $D \supset E$, гармонична в $D \setminus E$ и $M(r, u) = 0(p(r))$. Говорим, что E есть устранимое множество для $H(p(r))$, если каждая функция из $H(p(r))$ гармонична на E. Следующая теорема для множеств логарифмической меры 0 усиливает соответствующий классический результат ([6], стр. 96).

Теорема 2. *Если* $h(E)=0$, *для* $h(r) = |\log d_E(r)|^{-1} \cdot p(r)$, *то множество* E *устранимо для класса* $H(p(r))$.

Доказательство. Допустим обратное, что существует непустой компакт $E_1 \subseteq E$ такой, что $H_{E_1} \neq \varnothing$ и пусть $u \in H_{E_1}$. Если положить

$$\sigma(l(r)) = -h(r)\log d_E(r)$$

и учесть, что $d_{E_1}(r) \leqslant d_E(r)$ и $M_1(r; u) \leqslant M(r; u)$, где M_1 — соответствующая величина для E_1, то понятно, что

$$M_1(r; u) = O(\sigma(l(r))).$$

Согласно теореме Линдеберга $\operatorname{cap}(E) = 0$, и мы имеем возможность применить теорему 1, из которой вытекает, что $h_\sigma^{(1)}(E_1) > 0$. Но так как $h_\sigma^{(1)}(r) \equiv h(r)$ и $E_1 \subseteq E$, то $h(E) > 0$, что противоречит нашим условиям. Теорема доказана.

В соответствии с определением пористого множества, введенного Е. П. Долженко ([7], стр. 158), будем называть множество E равномерно пористым, если $d_E(r) = O(r)$. Если $E \neq \varnothing$, $E \subset D$, $0 < \alpha < 1$, то $H_E^{(\alpha)}$ пусть означает класс супергармонических в D функций u с непустым множеством точек негармоничности в D из E таких, что $M(r; u) = O(l_\alpha(r))$. Имеет место

Теорема 3. *Если E — равномерно пористое множество, то $H_E^{(\alpha)} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $l_{\alpha-1}(E) > 0$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Если $\operatorname{cap}(E) > 0$, то из теоремы Линдеберга о множествах логарифмической меры 0 вытекает, что $l_{\alpha-1}(E) > 0$. Если же допустить, что $\operatorname{cap}(E) = 0$ и $H_E^{(\alpha)} \neq \varnothing$, то рассуждение, проведенное при доказательстве теоремы 1, приведет нас к существованию некоторого распределения массы $\mu \neq 0$ в E такого, что $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\mu)) < 1$ и $u^\mu \in H_E^{(\alpha)}$. Но тогда, если учесть, что $d_E(r) = O(r)$, из леммы 1 вытекает нужное неравенство.

Пусть теперь $l_{\alpha-1}(E) > 0$. Тогда согласно лемме Фростмана ([2], стр. 64) существует распределение массы $\mu \neq 0$ в E такое, что для каждого $r > 0$ и каждого круга C_r радиуса r

$$\mu(C_r) \leqslant 36\, l_{\alpha-1}(r). \tag{4}$$

Если

$$u^\mu(x) = \int_E \log \frac{1}{|\xi - x|}\, d\mu(\xi)$$

— соответствующий потенциал, то после надлежащей замены переменной интегрирования получим

$$u^\mu(x) = c + \int_{\rho(x, E)}^{c_1} \frac{\mu(x, r)}{r}\, dr,$$

где c, c_1 ограничены при $x \to E$, $c_1 > 0$. Или учитывая (4)

$$-\infty < c < u^\mu(x) \leqslant c^* + 36 \int_{\rho(x, E)}^{+\infty} \frac{l_{\alpha-1}(r)}{r}\, dr.$$

Вычисляя последний интеграл, будем иметь

$$|u^\mu(x)| = O(l_\alpha(\rho(x, E))), \quad x \in E^c,$$

откуда

$$M(r; u^\mu) = O(l_\alpha(r)),$$

и так как каждая точка $\operatorname{supp}(\mu)$ есть точка негармоничности для u^μ, то теорема доказана.

Пользуюсь случаем выразить свою искреннюю признательность академику АН Армянской ССР А. Л. Шагиняну и профессору Е. П. Долженко за внимание к работе и замечания, способствующие ее улучшению.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 25.V.1977

Ա. Յու. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ. *0 ունակության եզակիությունների բազմության վրա անընդհատ հարմոնիկ ֆունկցիաների մասին* (*ամփոփում*)

Դիտարկվում են երկու իրական փոփոխականների հարմոնիկ ֆունկցիաներ, որոնք անընդհատ են (կարող են ընդունել նաև $\pm\infty$ արժեքներ) 0 ունակություն ունեցող իզոլացված եզակիությունների բազմության վրա

A. U. SHAHVERDIAN. *On harmonic functions continuous on an singular set of zero capacity* (summary)

The paper considers harmonic functions of two variables continuous on an isolated singular set of zero capacity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш*. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, УМН, 8, 1941, 171—292.
2. *M. Tsuji*. Potential theory in modern function theory, Maruzen Co., LTD, Tokyo, 1959.
3. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, М.—Л, 1941.
4. Е. *П. Долженко*. О представлении непрерывных гармонических функций в виде потенциалов, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 5, 1964, 1113—1130.
5. *Е. П. Долженко*. Об особых точках непрерывных гармонических функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 6, 1964, 1251—1270.
6. *Л. Карлесон*. Избранные проблемы теории исключительных множеств, „Мир“, М., 1971.
7. *Э. Коллингвуд, А. Ловатер*. Теория предельных множеств, Изд. „Мир“, М. 1971.