ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

Ш. А. ГРИГОРЯН

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИЙ ИЗ H^p $(0<p<\infty)$ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

1°. Обозначим через $H^p(D)$ $(0<p<+\infty)$ класс функций, аналитических в единичном круге $D=\{w;\ |w|<1\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|g\|_p=\sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|g(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}<+\infty.$$

Пусть последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(|\alpha_k|<1)$ отличных друг от друга комплексных чисел для некоторого δ $(0<\delta<1)$ удовлетворяет условию

$$\inf_{1\leqslant k<+\infty}\prod_{j\neq k}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\geqslant\delta>0. \tag{1}$$

Именно с такими последовательностями связана следующая теорема Л. Карлесона ([1], [2], см. также [3]).

Теорема А. *Если последовательность* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(|\alpha_k|<1)$ *отличных друг от друга комплексных чисел удовлетворяет условию* (1), *то для любой функции* $g(w)\in H^p(D)$ $(0<p<\infty)$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)\,|g(\alpha_k)|^p\leqslant C(\delta)\|g\|_p^p, \tag{2}$$

где $C(\delta)>0$ — *постоянная, не зависящая от* g.

М. М. Джрбашян в работе [4] дал чисто аналитический метод решения задачи кратной интерполяции в $H^2(D)$, там же была установлена следующая важная

Теорема Б. *Если последовательность* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(|\alpha_k|<1)$ *удовлетворяет условию* (1), *то для любой функции* $g(w)\in H^2(D)$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{2r+1}|g^{(r)}(\alpha_k)|^2\leqslant C(r,\delta)\|g\|_2^2,\quad r=0,1,2,\cdots, \tag{3}$$

где $C(r,\delta)>0$ — *постоянная, не зависящая от функции* g.

Отмеченные теоремы имеют важное применение при решении задач как простой, так и кратной интерполяции в классах $H^p(D)$ $(0<p<\infty)$ и лежат в основе доказательства базисности некоторых систем рациональных функций в этих классах ([5], [6]).

Обобщая результаты этих теорем, Ф. А. Шамоян [7] установил аналогичную теорему для функций из $H^p(D)$ $(0 < p < \infty)$.

Теорема В. *Если последовательность* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(|\alpha_k| < 1)$ *удовлетворяет условию* (1), *то для любой функции* $g(w) \in H^p(D)$ $(0 < p < \infty)$ *имеют место неравенства*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g^{(r)}(\alpha_k)|^p (1 - |\alpha_k|^2)^{pr+1} \leqslant C_p(r, \delta) \|g\|_p^p, \quad r = 0, 1, 2, \cdots, \tag{4}$$

где $C_p(r, \delta) > 0$ — *постоянные, не зависящие от* g.

В данной заметке мы получим аналог неравенств (4) для функций из H_+^p $(0 < p < \infty)$ — класса аналитических в верхней полуплоскости $G^{(+)} = \{z;\ \operatorname{Im} z > 0\}$ функций, для которых

$$\|f\|_p = \sup_{y>0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dy \right)^{1/p} < +\infty. \tag{5}$$

Как известно (см. [3], стр. 191), для любой функции $f(z) \in H_+^p$ $(0 < p < +\infty)$ почти всюду на вещественной оси $(-\infty, +\infty)$ существуют угловые граничные значения, причем

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{6}$$

В дальнейшем нам понадобится теорема М. Рисса для полуплоскости (см. [8], стр. 176).

Теорема Г. *Если* $h(t) \in L_p(-\infty, +\infty)$ $(1 < p < +\infty)$, *то для функции*

$$F(z) = u(z) + iv(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{t - z} dt, \quad z \in G^{(+)}$$

выполняются условия:

1) $\|v\|_p \leqslant M_p^* \|u\|_p$,

2) $F(z) \in H_+^p$,

3) $\|F\|_p \leqslant M_p \|h\|_p$,

где M_p^* и M_p — постоянные, не зависящие от u и h соответственно.

Последовательность $\{z_j\}_1^\infty$ $(\operatorname{Im} z_j > 0)$ отличных друг от друга комплексных чисел отнесем к классу Δ, если при некотором δ $(0 < \delta < 1)$ выполняется условие

$$\inf_{k \geqslant 1} \prod_{j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geqslant \delta > 0. \tag{7}$$

Отметим, что из этого условия автоматически вытекает условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{1 + |z_j|^2} < +\infty, \tag{8}$$

обеспечивающее существование произведения Бляшке для верхней полуплоскости с нулями в точках $z = z_j$

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \frac{|1 + z_j^2|}{1 + z_j^2}. \tag{9}$$

2°. Теперь приступим к доказательству нашей теоремы, используя прием, примененный Ф. А. Шамояном в работе [7].

Теорема. *Если* $\{z_j\}_1^{\infty} \in \Delta$, *то для любой функции* $f(z) \in H_+^p$ $(0 < p < +\infty)$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Im} z_k)^{pr+1} |f^{(r)}(z_k)|^p \leqslant A_p(r, \delta) \|f\|_p^p, \quad r = 0, 1, 2, \cdots. \tag{10}$$

где $A_p(r, \delta) > 0$ — *постоянные, не зависящие от* f.

Доказательство. Сначала же заметим, что из (2) конформным отображением $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ полуплоскости $G^{(+)}$ на $|w| < 1$, учитывая тот факт ([9], стр. 189), что при этом функция $g^*(z) = g\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right) \times$ $\times (z+i)^{-1} \in H_+^2$, получим неравенство, отмеченное также в заметке [10]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k |g^*(z_k)|^2 \leqslant A(\delta) \|g^*\|_2^2. \tag{11}$$

Пользуясь теоремой о факторизации ([3], стр. 191), функцию $f(z) \in H_+^p$ можно представить в виде

$$f(z) = B(z) \cdot \varphi(z), \quad z \in G^{(+)},$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями функции $f(z)$, а $\varphi(z) \in H_+^p$ и $\varphi(z) \neq 0$, $z \in G^{(+)}$.

Следовательно, определив функцию

$$\varphi_*(z) = [\varphi(z)]^{p/2}, \tag{12}$$

будем иметь $\varphi_*(z) \in H_+^2$ и

$$\|f\|_p^p = \|\varphi\|_p^p = \|\varphi_*\|_2^2. \tag{13}$$

Далее, так как $|\varphi_*(x)| \in L_2(-\infty, +\infty)$, то положив

$$h(z) = u(z) + iv(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\varphi_*(t)|}{t - z} dt, \quad z \in G^{(+)}, \tag{14}$$

по теореме В можем утверждать, что $h(z) \in H_+^2$.

Из (14) следует, что

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi_*(t)|}{(t-x)^2 + y^2} dt \geqslant 0, \quad z = x + iy \in G^{(+)}, \tag{15}$$

$$u(z)=|u(z)|\leqslant|h(z)|,\quad z\in G^{(+)},\tag{16}$$

причем (см. [9], стр. 176)

$$\|u\|_2=\|\varphi\|_2.\tag{17}$$

С другой стороны, так как $h(z)\in H^2_+$, то по теореме Г имеет место неравенство

$$\|v\|_2\leqslant M_1\|u\|_2.$$

Отсюда и из (17) получим

$$\|h\|_2\leqslant M_2\|\varphi_*\|_2,\tag{18}$$

где $M_2=1+M_1$.

Ввиду того, что $\varphi_*(z)\in H^2_+$, она представима интегралом Пуассона (см. [9], стр. 183)

$$\varphi_*(z)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_*(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt,\quad z=x+iy\in G^{(+)}.$$

Отсюда и из (15) следует неравенство

$$|\varphi_*(z)|\leqslant u(z),\quad z\in G^{(+)}.\tag{19}$$

Теперь обозначим через $D_0(z_k)=\{z;\ |z-z_k|\leqslant\theta\operatorname{Im}z_k\}$ $0<\theta<1$ круг с центром в точке $z_k\in G^{(+)}$, лежащий внутри $G^{(+)}$. Тогда по интегральной формуле Коши для любого $r\geqslant 1$ и $1\leqslant k<+\infty$ имеем

$$|f^{(r)}(z_k)|=\left|\frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_\theta(z_k)}\frac{f(t)}{(t-z_k)^{r+1}}\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{r!}{\theta^{r+1}}\,\frac{\max\limits_{t\in\partial D_\theta(z_k)}|f(t)|}{(\operatorname{Im}z_k)^r}.$$

Отсюда, ввиду неравенства

$$|f(z)|\leqslant|\varphi(z)|,\quad z\in G^{(+)},$$

а также используя (12) и (19), получим

$$|f^{(r)}(z_k)|\leqslant\frac{r!}{(\theta\operatorname{Im}z_k)^r}\max_{t\in\partial D_\theta(z_k)}|\varphi(t)|=$$

$$=\frac{r!}{(\theta\operatorname{Im}z_k)^r}\max_{t\in\partial D_\theta(z_k)}|\varphi_*(t)|^{2/p}\leqslant\frac{r!}{(\theta\operatorname{Im}z_k)^r}\max_{t\in\partial D_\theta(z_k)}[u(t)]^{2/p}.\tag{20}$$

Но $u(z)$ — неотрицательная гармоническая функция, и по неравенству Гарнака

$$\max_{t\in\partial D_\theta(z_k)}u(t)\leqslant\frac{1+\theta}{1-\theta}u(z_k)\quad(1\leqslant k<+\infty).$$

Поэтому из (20), учитывая (16), будем иметь

$$(\operatorname{Im}z_k)^{pr+1}|f^{(r)}z_k|^p\leqslant\left(\frac{r!}{\theta^r}\right)^p\left(\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)^2\operatorname{Im}z_k[u(z_k)]^2\leqslant$$

$$\leqslant A_p(\theta,r)\operatorname{Im}z_k|h(z_k)|^2\quad(1\leqslant k<+\infty).$$

Наконец, используя неравенство (11), в силу (18) и (13) для любого $r \geq 1$ получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Im} z_k)^{pr+1} |f^{(r)}(z_k)|^p \leq$$

$$\leq A_p(\theta, r) \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k |h(z_k)|^2 \leq A_p^*(\theta, r, \delta) \|h\|_2^2 \leq$$

$$\leq A_p^*(\theta, r, \delta) M_2 \|\varphi_*\|_2^2 = A_p(r, \delta) \|f\|_p^p,$$

и теорема доказана.

Շ. Հ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Կիսահարթությունում $H^p (0 < p < \infty)$ դասի ֆունկցիաների մի հատկության մասին (ամփոփում)

Դիցուք T_f օպերատորը որոշված է $\operatorname{Im} z > 0$ կիսահարթությունում անալիտիկ ֆունկցիաների $H^p (0 < p < +\infty)$ դասերի վրա հետևյալ կերպ

$$T_f = \{f^{(r)}(z_k) (\operatorname{Im} z_k)^{r+1/p}\}_1^{\infty}, \quad f \in H^p.$$

Այս աշխատանքում ստացված են պայմաններ $\{z_k\}_1^{\infty}$ $(\operatorname{Im} z_k > 0)$ հաջորդականության համար, որպեսզի տեղի ունենա հետևյալ առնչությունը $T_f H^p = l^p$:

SH. A. GRIGORIAN. *On a certain property of functions from* H^p $(0 < p < +\infty)$ *on the half-plane* (summary)

Let the operator T_f be defined on the H^p space $(0 < p < +\infty)$ in the half-plane:

$$T_f : \{f^{(r)}(z_k) (\operatorname{Im} z_k)^{r+1/p}\}_1^{\infty}, \quad f \in H^p.$$

The paper gives some conditions on the sequenec $\{z_k\}_1^{\infty}$ $(\operatorname{Im} z_k > 0)$ under which $T_f H^p = l^p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Carleson.* An Interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., 80, 1958, 921—930.
2. *H. Shapiro, A. Shields.* On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
3. *P. Duren.* Theory of H^p spaces, Ac. Press. New York, London, 1970.
4. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974, 339—373.
5. *Г. М. Айрапетян.* О базисности рациональных функций в подпространствах классов Харди H^p $(1 < p < \infty)$, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 429—450.
6. *Г. М. Айрапетян.* О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., X, № 2, 1975, 133—152.

7. *Ф. А. Шамоян*. Теоремы вложения, связанные с задачей кратного интерполирования в пространствах H^p, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XI, № 2, 1976, 124–131.
8. *Е. Титчмарш*. Введение в теорию интеграла Фурье, Гостехиздат, 1948.
9. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, И.Л.Л., М., 1963.
10. *А. М. Седлецкий*. Интерполяция в пространствах H^p в полуплоскости, ДАН СССР, 208, № 6, 1973, 1293—1295.