ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 3, 1977 Математика

Л. М. РАЙХ

О РЕЗОЛЬВЕНТАХ БИИНВОЛЮТИВНО САМОСОПРЯЖЕННЫХ БИРАСШИРЕНИЙ J-ЭРМИТОВА ОПЕРАТОРА

Введение

В настоящей работе изучаются свойства резольвент нового вида расширений с выходом в оснащенное пространство плотно заданных J-эрмитовых (J—инволюция) операторов. Эти расширения (биинволютивно самосопряженные бирасширения) введены и изучены в работе [5].

Результаты, полученные в настоящей работе, являются обобщением на случай J-эрмитовых операторов результатов работы [3].

Будем придерживаться следующих обозначений: если C – линейный оператор, то через $D(C)$ обозначается его область определения, а через $T(C)$—область его значений, через $O(C)$—многообразие нулей оператора C, через P_N—ортопроектор на подпространство N. Если H_1, H_2—два гильбертовых пространства, то через $[H_1, H_2]$ обозначим пространство всех линейных непрерывных операторов C из H_1 в H_2.

Говоря о непрерывности или замкнутости операторов, будем указывать сначала топологию в их области определения, а потом в области задания.

§ 1. Биинволютивно самосопряженные бирасширения

Определение. Плотно заданный замкнутый оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, будем называть J-эрмитовым, если $A \subseteq JA^*J$, где J—инволюция в пространстве H. Нетрудно заметить, что условие $A \subseteq JA^*J$ эквивалентно равенству: $(Ax, Jy) = (x, JAy)$ $(\forall x, y \in D(A))$. Во множествах $D(JA^*J)$, $D(A^*)$ введем скалярные произведения:

$$(x, y)_+ = (JA^*Jx, JA^*Jy) + (x, y), \tag{1}$$

$$(u, v)^+ = (A^*u, A^*v) + (u, v), \tag{2}$$

где $x, y \in D(JA^*J)$, а $u, v \in D(A^*)$.

Обозначим $H^+ = D(A^*)$ и $H_+ = D(JA^*J)$. Нетрудно заметить, что H_+, H^+ являются гильбертовыми пространствами. Построим соответствующие оснащения

$$H^+ \subset H \subset H^-,\ H_+ \subset H \subset H_-.$$

Отображение $B(H_1 \to H_2)$ будем называть антиизометрическим, если $(Bx, By)_2 = \overline{(x, y)_1}$.

Пару антиизометрических отображений $\{B, C\}$ $B(H_- \to H^-)$, $C(H_+ \to H^+)$, назовем биинволюцией, если

$$(Bx, Cy) = \overline{(x, y)}\ (x \in H_-,\ y \in H_+).$$

Теорема 1. *Пусть J — инволюция в H, тогда:*

а) *отображение $J_+ = J|_{H_+}$ — антиизометрия из H_+ в H^+;*

б) *расширение J_- инволюции J по $(-)$ непрерывности — антиизометрия из H_- в H^-;*

в) *пара отображений $\{J_-, J_+\}$ — биинволюция.*

Доказательство теоремы можно найти в работе [5].

Каждая тройка пространств порождает, как известно [1], изометрические операторы $F(H_+ \to H_-)$ и $R(H^+ \to H^-)$. Будем называть их операторами Ф. Рисса. Для них справедливы соотношения:

$$(x, y)^+ = (x, Ry) = (Rx, y) = (Rx, Ry)^-\ (x, y \in H^+), \tag{3}$$

$$(u, v)_+ = (u, Fv) = (Fu, v) = (Fu, Fv)_-\ (u, v \in H_+).$$

Теорема 2. *Имеют место (H_+) и соответственно (H^+) ортогональные разложения*

$$H_+ = D(A) \oplus N_+, \tag{4}$$

$$H^+ = J_+D(A) \oplus N^+, \tag{5}$$

где $N^+ = J_+N_+$ и подпространство N_+ состоит из тех и только тех векторов $x \in H$, для которых $(A^*J)^2x = -x$.

Доказательство. Пусть $x \in H$, $(A^*J)^2x = -x$, и пусть y — произвольный вектор из $D(A)$. Тогда $(x, y)_+ = (x, y) +$

$$+ (JA^*Jx, JA^*Jy) = (x, y) + (JA^*Jx, Ay) = (x, y) + (A^*JA^*Jx, y) = 0.$$

Проводя выкладки в обратном порядке, получим, что если x принадлежит (H_+) ортогональному дополнению к $D(A)$, то $(A^*J)^2x = -x$. Соотношение (5) следует из (1), (2) и (4). Теорема доказана.

Следствие. $J_+A^*J_+$ — антиизометрический оператор, отображающий N_+ на N^+.

Будем называть оператор $B \in [H_+, H^+]$ J_+-самосопряженным, если $B = J_+B^*J_+$.

Линейный оператор $\mathbf{A} \in [H_+, H^-]$ назовем биинволютивно самосопряженным бирасширением J-эрмитова оператора A, если $\mathbf{A} = J_-\mathbf{A}^*J_+$ и $\mathbf{A} \supset A$, где $\{J_-, J_+\}$ — биинволюция.

Условие $\mathbf{A} = J_-\mathbf{A}^*J_+$ эквивалентно равенству

$$(\mathbf{A}x, J_+y) = (x, J_-\mathbf{A}y)\ \ (x, y \in H_+).$$

Между множеством всех биинволютивно самосопряженных бирасширений оператора A и множеством всех J_+-самосопряженных операторов S из класса $[N_+, N^+]$ существует биективное соответствие, установленное следующими соотношениями:

$$\mathbf{A} = JA^*J + RS_{\mathbf{A}}P_{N_+}, \tag{6}$$

$$S_{\mathbf{A}} = S - \frac{1}{2}J_+A^*J_+.$$

Доказательство этого факта приведено в работе [5]. Из соотношения (6) следует равенство

$$J_+S^*_{\mathbf{A}}J_+ = J_+A^*J_+ + S_{\mathbf{A}}. \tag{7}$$

Будем называть квазиядром биинволютивно самосопряженного бирасширения J-эрмитова оператора A оператор вида

$$\hat{A} = \mathbf{A}|_{D(\hat{A})},\ D(\hat{A}) = \{x: x \in H_+,\ \mathbf{A}x \in H\}. \tag{8}$$

Для квазиядра $\hat{A}$ биинволютивно самосопряженного бирасширения $\mathbf{A}$ справедливы соотношения: $\hat{A} \subseteq J\hat{A}^*J \subset JA^*J$.

Теорема 3. *Область определения $D(\hat{A})$ квазиядра бирасширения состоит из тех и только тех векторов $x \in H_+$, для которых $S_{\mathbf{A}}P_{N_+}x = 0$.*

Доказательство. Пусть $x \in D(\hat{A})$. Тогда из определения квазиядра и того факта, что $JA^*Jx \in H$, следует, что $RS_{\mathbf{A}}P_{N_+}x \in H$. Но тогда, учитывая (6) и теорему (2), для произвольного $y \in JD(A)$ получаем

$$(RS_{\mathbf{A}}P_{N_+}x, y) = (S_{\mathbf{A}}P_{N_+}x, y)^+ = 0.$$

А так как $JD(A)$ плотно в H, то $RS_{\mathbf{A}}P_{N_+}x = 0$. Пусть теперь $S_{\mathbf{A}}P_{N_+}x = 0$. Тот факт, что $x \in D(\hat{A})$, следует непосредственно из (6). Теорема доказана.

Если $\tilde{A}$ — расширение оператора A, определенное условием:

$$\tilde{A} = JA^*J|_{D(\tilde{A})},\ D(\tilde{A}) \subset D(JA^*J),$$

то из соотношения (4) следует, что

$$D(\tilde{A}) = D(A) \oplus N_+^{(1)}. \tag{8'}$$

Если оператор $\tilde{A}$ замкнут, то $N_+^{(1)}$ является подпространством в N_+. Заметим, что имеют место следующие очевидные соотношения:

$$N_+ = N_+^{(1)} \oplus N_+^{(2)},$$

$$N^+ = N_{(1)}^+ \oplus N_{(2)}^+; \ N_{(k)}^+ = J_+ N_+^{(k)} \ (k=1, 2). \tag{9}$$

Лемма 1. *Если* $\widetilde{A} = JA^*J|_{D(\widetilde{A})}$ — *расширение оператора* A, *то включения* $\widetilde{A} \subseteq J\widetilde{A}^*J$ *и* $J_+A^*J_+N_+^{(1)} \subseteq N_{(2)}^+$ *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть x, y — произвольные векторы из $N_+^{(1)}$. Тогда на основании теоремы (2) $(\widetilde{A}x, Jy)-(x, J\widetilde{A}y)=(J_+A^*J_+x, Jy)^+$. Из последнего равенства и соотношения (9) следует утверждение леммы.

Пусть $\widetilde{A}$ — J-эрмитово (J-самосопряженное) расширение квазиядра $\hat{A}$ ($A \subset \hat{A} \subset \widetilde{A}$). Пусть для $D(\hat{A})$ справедливо представление $D(\hat{A}) = D(A) \oplus N_+^{(1)}$. Тогда легко заметить, что

$$D(\widetilde{A}) = D(A) \oplus N_+^{(1)} \oplus N_+^{(21)} \ (N_+^{(21)} \subset N_+^{(2)}),$$

$$N_+ = N_+^{(1)} \oplus N_+^{(21)} \oplus N_+^{(22)}; \ N^+ = N_{(1)}^+ \oplus N_{(21)}^+ \oplus N_{(22)}^+,$$

$$N_{(21)}^+ = J_+N_+^{(21)}; \ N_{(22)}^+ = J_+N_+^{(22)}. \tag{10}$$

Лемма 2. *Если* $A \subset \hat{A} \subset \widetilde{A}$, $\widetilde{A} \subseteq J\widetilde{A}^*J$, *то* $A^*N_{(1)}^+ \perp N_+^{(21)}$.

Доказательство. Из леммы (1) следует, что $J_+A^+J_+[N_+^{(1)} \oplus \oplus N_+^{(21)}] \subset N_{(22)}^+$. Поэтому, учитывая (9) и (10), получаем $A^*N_{(1)}^+ \subset N_+^{(22)}$, откуда и вытекает утверждение леммы.

Теорема 4. *Биинволютивно самосопряженное бирасширение* $\mathbf{A}$ *J-эрмитова оператора* A *не допускает* (H, H^-) *замыкания.*

Доказательство. Воспользуемся соотношением (6). Так как $S_{\mathbf{A}} \neq 0$, то существуют вектора $\varphi \in N_+$ и $\psi \in N^+$, такие, что $(J_+S_{\mathbf{A}}J_+\varphi, \psi)^+ \neq 0$. Так как $D(A)$ плотно в H, то существует последовательность $x_n \in D(A)$, сходящаяся к $-\varphi$ в метрике H.

Пусть $\varphi_n = x_n + \varphi$, тогда $\varphi_n \to 0$ в метрике H. Рассмотрим последовательность $\{\mathbf{A}\varphi_n\}$

$$\|\mathbf{A}\varphi_n - \mathbf{A}\varphi_m\|^- = \sup_{y \in H^+} \frac{|(\mathbf{A}x_n - \mathbf{A}x_m, y)|}{\|y\|^+} \leqslant \sup_{y \in H^+} \frac{|(x_n - x_m, A^*y)|}{\|y\|^+} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{y \in H^+} \frac{|(x_n - x_m, A^*y)|}{\|A^*y\|} \leqslant \|x_n - x_m\|.$$

Учитывая сходимость $\{x_n\}$, получаем фундаментальность последовательности $\{\mathbf{A}\varphi_n\}$ в метрике H^-. Пусть $\mathbf{A}\varphi_n \to \alpha$ в пространстве H^-. Из теоремы (2) и соотношения (4) следует:

$$(\alpha, \psi) = \lim (\mathbf{A}\varphi_n, \psi) = \lim (x_n, A^*\psi) + (JA^*J\varphi, \psi) + (RS_{\mathbf{A}}\varphi, \psi) =$$

$$= -(\varphi, A^*\psi) + (J_+A^*J_+\varphi, \psi) + (S_A\varphi, \psi)^+ = (S_A\varphi, \psi)^+ +$$
$$+ (A^*J_+A^*J\varphi, A^*\psi) + (J_+A^*J_+\varphi, \psi) = (J_+A^*J_+\varphi, \psi)^+ +$$
$$+ (S_A\varphi, \psi)^+ = (J_+S_A^* J_+\varphi, \psi)^+ \neq 0.$$

Из последнего соотношения вытекает, что $\alpha \neq 0$, и принимая во внимание то, что $\varphi_n \to 0$, получаем доказательство теоремы.

§ 2. Резольвенты бирасширений

Из определения квазиядра непосредственно следует, что число λ тогда и только тогда будет собственным для биинволютивно самосопряженного бирасширения $\mathbf{A}$, когда оно является собственным для квазиядра $\hat{A}$ этого бирасширения.

Нетрудно заметить, что если λ—собственное число оператора $\mathbf{A}$, то $\bar{\lambda}$—собственное число для $\mathbf{A}^*$ и наоборот.

Лемма 3. *Если λ не является собственным числом оператора A, то оператор $(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}$ существует и определен на плотном в H^- многообразии.*

Доказательство леммы немедленно следует из того, что $\mathbf{A}$ — биинволютивно самосопряженный оператор.

Теорема 5. *Оператор $(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}$ (если он существует) не может быть (H^-, H_+) непрерывен и, значит, не может быть определен на всем H^-.*

Доказательство. Предположим $(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}$ существует и (H^-, H_+) непрерывен. Пусть $x_n \in H_+$, $x_n \to x$, $\mathbf{A}x_n \to y$ в метрике H^-. Тогда, так как оператор $(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}$ (H^-, H_+)-непрерывен, $x_n \to x$ в метрике H_+, а значит $x \in D(\mathbf{A})$ и $\mathbf{A}x = y$. Но это и означает, что оператор $\mathbf{A}$ замкнут. Принимая во внимание теорему (4), получим, что оператор $(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}$ не может быть (H^-, H_+)-непрерывен. Поэтому он не может быть определен на всем H^-, иначе, учитывая теорему Банаха об обратном операторе и (H_+, H^-)-непрерывность $(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}$, получили бы противоречие. Теорема доказана.

Лемма 4. *Для произвольного вектора $x \in N_+$ имеет место соотношение*

$$\bar{A}x = J_+A^*J_+x - RJ_+A^*J_+x, \tag{11}$$

где $\bar{A}$ — замыкание оператора A по (H, H^-)-непрерывности, а R — оператор Ф. Рисса.

Доказательство. Покажем сначала, что A допускает замыкание по (H, H^-)-непрерывности. Действительно, для произвольного $x \in D(A)$

$$\|Ax\|^- = \sup_{y \in H^+} \frac{|(Ax, y)|}{\|y\|^+} \leqslant \sup_{y \in H^+} \frac{|(x, A^*y)|}{\|A^*y\|} \leqslant \|x\|$$

и для вектора $\bar{A}x$ ($x \in H$) найдется последовательность $x_n \in D(A)$ такая, что $Ax_n \to \bar{A}x$. Тогда для $y \in H^+$ получаем:

$$(\bar{A}x,\ y) = \lim\,(Ax_n,\ y) = (x,\ A^*y) = (x,\ JJA^*JJy) =$$

$$=(x,\ J_-^{-1}AJ_+^{-1}y) - (x,\ J_-^{-1}RS_{\mathbf{A}}P_{N_+}J_+^{-1}y) = (\mathbf{A}x,\ y) - (RJ_+S_{\mathbf{A}}^*J_+x,\ y).$$

Так как y — произвольный вектор из H^+, то $\bar{A}x = \mathbf{A}x - RJ_+S_{\mathbf{A}}^*J_+x$. Учитывая соотношения (6) и (7), получим

$$\bar{A}x = JA^*Jx + RS_{\mathbf{A}}P_{N_+}x - RJ_+S_{\mathbf{A}}^*J_+x = J_+A^*J_+x +$$

$$+ R(S_{\mathbf{A}} - J_+S_{\mathbf{A}}^*J_+)P_{N_+}x = J_+A^*J_+x - RJ_+A^*J_+x.$$

Лемма доказана.

Будем называть J самосопряженное расширение J-эрмитова оператора, для которого λ — точка регулярного типа, корректным: если λ является для этого расширения точкой регулярности. Такие расширения были впервые рассмотрены Жихарем [2].

Теорема 6. *Замыкание оператора* $\overline{(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}}$ *существует и непрерывно отображает* H^- *на* H *тогда и только тогда, когда квазиядро* $\hat{A}$ *бирасширения* $\mathbf{A}$ *есть корректное* J-*самосопряженное расширение оператора* A.

Доказательство. Достаточность. Пусть квазиядро $\hat{A}$ является корректным J-самосопряженным расширением оператора. Тогда по определению точки регулярного типа

$$\|\hat{A}x - \lambda x\| > k(\lambda)\,\|x\|\ \ (k(\lambda) > 0,\ x \in D(\hat{A})).$$

Оператор $(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}$, как следует из леммы (3), существует и определен на плотной в H^- части. Для произвольного вектора $x \in D(\hat{A})$ справедливо

$$\|x\|_+^2 = \|JA^*Jx\|_+^2 + \|x\|_+^2 = \|\hat{A}x - \lambda x + \lambda x\|^2 + \|x\|^2 \leqslant C(\lambda)\,\|\hat{A}x - \lambda x\|^2.$$

Таким образом, $\|x\|_+ \leqslant C(\lambda)\,\|\hat{A}x - \lambda x\|$. Для произвольного $x \in H_+$ получаем

$$\|(\mathbf{A} - \lambda I)x\|^- = \sup_{y \in H_+} \frac{|(\mathbf{A}x - \lambda x,\ J_+y)|}{\|J_+y\|^+} \geqslant \sup \frac{|(x,\ J(\hat{A} - \lambda I)y)|}{c(\lambda)\|\hat{A}x - \lambda x\|} =$$

$$= \frac{1}{c(\lambda)}\|Jx\| = \frac{1}{c(\lambda)}\|x\| \geqslant \frac{1}{c(\lambda)}\|x\|^-.$$

Итак, для любого $z \in D((\mathbf{A} - \lambda I)^{-1})$ справедлива оценка:

$$\|(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}z\|^- \leqslant \|(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}z\| \leqslant c(\lambda)\,\|z\|^-. \qquad (12)$$

Из соотношения (12) следует, что оператор $(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}$ (H^-, H) и (H^-, H^-)-непрерывен. Пусть $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}$ — расширение $(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}$ по (H, H^-)-непрерывности на H^-. Покажем, что $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\, H^- = H$. Учитывая (12) и то, что $(\overline{A}-\lambda I)$ (H, H^-)-непрерывен, нетрудно заметить, что оператор $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}$ $(\overline{A}-\lambda I)$ непрерывен. Поэтому из плотности $D(A)$ в H и соотношения

$$\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\,(\overline{A}-\lambda I)\,x = x, \tag{13}$$

справедливого для произвольного вектора $x \in D(A)$, следует справедливость равенства (13) для произвольного вектора $x \in H$. Таким образом, $H \subseteq T(\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}})$, а так как обратное включение очевидно то достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}$ непрерывно отображает H^- на H. Используя соотношения (6), (11), (13) для произвольного вектора $x \in N_+$ можно получить

$$\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\,(\overline{A}-\lambda I)\,x = \overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\,(JA^*Jx-\lambda x - RJA^*Jx) = x, \tag{14}$$

$$\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\,(\mathbf{A}-\lambda I)\,x = \overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\,(JA^*Jx-\lambda x + RJS_{\mathbf{A}}\,P_{N_+}x) = x. \tag{15}$$

Вычитая из равенства (14) равенство (15) и учитывая соотношение (7), получаем $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\,RJ\overset{*}{S}_{\mathbf{A}}Jx = 0$.

Таким образом, оператор $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\,R$ анулирует многообразие $T(J\overset{*}{S}_{\mathbf{A}}J)$. Вследствие (H_+, H)-непрерывности оператора $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\,R$ справедливо равенство:

$$\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\,R\overline{T(J\overset{*}{S}_{\mathbf{A}}J)} = 0.$$

Замыкание $T(J\overset{*}{S}_{\mathbf{A}}J)$ берется в метрике пространства H_+. Пусть $\hat{A}$ — квазиядро биинволютивно самосопряженного бирасширения $\mathbf{A}$. Тогда для него справедливо соотношение (8′). (H^-, H)-непрерывность $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}$ означает, что существует $c(\lambda) > 0$ такое, что для любых $z \in H^-$ справедливо соотношение (12). Если $z = (\hat{A}-\lambda I)\,x$, где $x \in D(\hat{A})$, то из (12) следует

$$\|\hat{\mathrm{A}}x - \lambda x\| \geqslant \frac{1}{c(\lambda)}\,\|x\|. \tag{16}$$

Предположим, что $\hat{A}$ не является J-самосопряженным расширением оператора A. Тогда, как известно [2], λ является для $\hat{A}$ точкой регулярного типа и, следовательно

$$H = T(\hat{A}-\lambda I) \oplus N_{\bar{\lambda}}, \tag{17}$$

где $N_{\bar{\lambda}} = \{x\colon A^*x = \bar{\lambda}x\}$.

Заметим, что если $\hat{A}$ — J-самосопряженный, то имеет место равенство $H = T(\hat{A}-\lambda I)$.

Из (17) следует существование ненулевого вектора x_0 такого, что

$$J\mathring{A}^* Jx_0 = JA^* Jx_0 = \lambda x_0. \tag{18}$$

Рассмотрим оператор $\widetilde{A} = JA^* J|_{D(\widetilde{A})}$, $D(\widetilde{A}) = D(\mathring{A}) \dotplus \{x_0\}$.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что оператор $\widetilde{A}$ является J-эрмитовым расширением оператора $\mathring{A}$, а значит и A. Поэтому для него справедливо соотношение

$$D(\widetilde{A}) = D(\mathrm{A}) \oplus N_+^{(1)} \oplus N_+^{(21)}.$$

Из очевидного равенства $N_+ = O(S_{\mathrm{A}}) \oplus T(S_{\mathrm{A}}^*)$ и соотношения (5) следует равенство: $N^+ = O(J_+^{-1} S_{\mathrm{A}} J_+^{-1}) \oplus T(J_+ S_{\mathrm{A}} J_+)$. Из того, что $\mathring{A}$ является квазиядром бирасширения $\mathbf{A}$, теоремы (3) и соотношения (8′) следует равенство $O(S_{\mathrm{A}}) = N_+^{(1)}$, а значит и $O(J_+^{-1} S_{\mathrm{A}} J_+^{-1}) = N_{(1)}^+$. Если $x \in N_+^{(21)}$, $y \in N_{(1)}^+$, то принимая во внимание лемму (2), получаем

$$(S_{\mathrm{A}} x, y)^+ = (x, S_{\mathrm{A}}^* y)_+ = (x, J_+^{-1} S_{\mathrm{A}} J_+^{-1} y)_+ + (x, \mathrm{A}^* y)_+ = 0.$$

Таким образом, $S_{\mathrm{A}} x \in \overline{T(J_+ S_{\mathrm{A}} J_+)}$. Рассмотрим произвольный вектор $x \in N_+^{(21)}$.

Из определения $D(\widetilde{A})$ следует, что $x = x_1 + cx_0$, где $x_1 \in (\mathring{A})$, c — отличное от нуля число, так как $x \overline{\in} D(\mathring{A})$. Принимая во внимание соотношения (6) и (18), получаем

$$x = \overline{(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}} (\mathbf{A} - \lambda I)\, x = (\mathbf{A} - \lambda I)^{-1} (JA^* Jx_1 - \lambda x_1) +$$

$$+ \overline{(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}} (cJA^* Jx_0 - c\lambda x_0) = \overline{(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}} (\mathring{A} - \lambda I)\, x_1 = x_1.$$

Полученное противоречие показывает, что оператор $\mathring{A}$ является J-самосопряженным и так как выполняется неравенство (16) для $x \in D(\mathring{A})$, то он является корректным J-самосопряженным расширением A. Теорема доказана.

Лемма 5. *Пусть $\overline{(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}}$ существует и (H^-, H)-непрерывен. Тогда для произвольных $z \in H^-$ и $y \in H$ справедливо равенство*

$$(\overline{(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}} z, Jy) = (z, J(\mathring{A} - \lambda I)^{-1} y), \tag{19}$$

где $\mathring{A}$ — квазиядро оператора $\mathbf{A}$.

Доказательство. Пусть $z = (\mathbf{A} - \lambda I)\, x$. По теореме (6) квазиядро оператора $\mathbf{A}$ является корректным J-самосопряженным расширением оператора A. Поэтому существует вектор u такой, что

$y=(\hat{A}-\lambda I)\,u$. Учитывая, что вместе с $\mathbf{A}$ оператор $(\mathbf{A}-\lambda I)$ также является биинволютивно самосопряженным, получим

$$(\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\, z,\ Jy)=(x,\ J(\hat{A}-\lambda I)\,u)=(x,\ J_{-}(\mathbf{A}-\lambda I)\,u)=$$
$$=(z,\ J(A-\lambda I)^{-1}\,y).$$

Принимая во внимание $(H^{-},\ H)$-непрерывность оператора $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}$, получим, что равенство (19) справедливо для произвольных $z\in H^{-}$. Лемма доказана.

Теорема 7. *Пусть* $\overline{(\mathbf{A}_1-\lambda I)^{-1}}$ *и* $\overline{(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}}$ *существуют* $\lambda\neq\mu$ *и* $(H^{-},\ H)$*-непрерывны. Тогда оператор*

$$\overline{(\mathbf{A}_1-\lambda I)^{-1}}-\overline{(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}}\ (H^{-},\ H_{+})\text{-непрерывен.}$$

Доказательство. По теореме (6) квазиядра $\hat{\mathbf{A}}_1$ и $\hat{\mathbf{A}}_2$ бирасширений $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ являются корректными J-самосопряженными расширениями оператора $\mathbf{A}$. Пусть $z\in H^{-}$ и $x\in D(A)$. Учитывая лемму (5) и очевидное соотношение

$$(A-\lambda I)^{-1}Ay=\lambda\,(A-\lambda I)^{-1}\,y+y\quad (y\in D(A)),$$

получим

$$(\overline{(\mathbf{A}_1-\lambda I)^{-1}}\,z-\overline{(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}}\,z,\ JAx)=(z,\ J[(\hat{\mathbf{A}}_1-\lambda I)^{-1}-(\hat{\mathbf{A}}_2-\mu I)^{-1}]Ax)=$$
$$=(z,\ J[\lambda\,(\hat{A}_1-\lambda I)^{-1}-\mu\,(\hat{A}_2-\mu I)^{-1}]\,x)=(\lambda\,(\mathbf{A}_1-\lambda I)^{-1}\,z-$$
$$-\mu\,(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}\,z,\ Jx).$$

Таким образом

$$(J[\overline{(\mathbf{A}_1-\lambda I)^{-1}}-(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}]\,z,\ Ax)=(J[\lambda\,\overline{(\mathbf{A}_1-\mu I)^{-1}}-$$
$$-\mu\,\overline{(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}}]\,z,\ x),$$

а так как

$$\overline{(\mathbf{A}_1-\lambda I)^{-1}}\,z-\overline{(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}}\,z\in H,$$

то

$$J[\overline{(\mathbf{A}_1-\lambda I)^{-1}}\,z-\overline{(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}}\,z]\in H_{+}.$$

Нетрудно заметить, что

$$JA^{*}J[\overline{(\mathbf{A}_1-\lambda I)^{-1}}\,z-\overline{(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}}\,z]=\lambda\,\overline{(\mathbf{A}_1-\lambda I)^{-1}}\,z-\mu\,\overline{(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}}\,z,$$

$$\|\overline{(\mathbf{A}_1-\lambda I)^{-1}}\,z-\overline{(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}}\,z\|_{+}^{2}=\|\overline{(\mathbf{A}_1-\lambda I)^{-1}}\,z-\overline{(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}}\,z\|^{2}+$$
$$+\|\lambda\,\overline{(\mathbf{A}_1-\lambda I)^{-1}}\,z-\mu\,\overline{(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}}\,z\|^{2}.$$

Отсюда, учитывая $(H^{-},\ H)$-непрерывность операторов $\overline{(\mathbf{A}_1-\lambda I)^{-1}}$, $\overline{(\mathbf{A}_2-\mu I)^{-1}}$, получаем доказательство теоремы.

Теорема 8. *Если* $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}$ *существует и* $(H^{-},\ H)$*-непрерывен, то* а) $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\ G = JN_{\bar\lambda}^-$,

б) *чтобы* $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\ z \in H_+$ *необходимо и достаточно, чтобы* $z \in H \dotplus G$, *где* $N_{\bar\lambda}^- = \{x\colon A^* x = \bar\lambda x\}$,

$$G = \{z\colon z \in H^-,\ (z, Jx) = 0\ \ \forall x \in D(A)\}.$$

Доказательство. а) Если $x \in JN_{\bar\lambda}^-$, то $JA^*Jx = \lambda x$ и

$$(\mathbf{A}-\lambda I)\, x = RS_{\mathrm{A}}\, P_{N_+}\, x.$$

Пусть $y \in D(A)$, тогда, учитывая (3), (5), получим

$$(RS_{\mathrm{A}}\, P_{N_+}\, x,\ Jy) = (S_{\mathrm{A}}\, P_{N_+} x,\ Jy)^+ = 0.$$

Следовательно, $(\mathbf{A}-\lambda I)\, x \in G$, а значит $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\ G \supset JN_{\bar\lambda}^-$. Пусть теперь $z \in G$. Существует $z_n \in T(\mathbf{A}-\lambda I)$ и $z_n \to z$ в пространстве H. Тогда и $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\, z_n \to \overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\, z$. Пусть y — произвольный вектор из $D(A)$,

$$(z,\ Jy) = \lim\, ((\mathbf{A}-\lambda I)\, \overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\, z_n,\ Jy) = (\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\, z,\ J(\mathbf{A}-\lambda I)\, y)..$$

Таким образом, $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\, z \in JN_{\bar\lambda}^-$ а значит и $\overline{(A-\lambda I)^{-1}}\ G = JN_{\bar\lambda}^-$.

б) Пусть $x = \overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}} z \in H_+$. Из того, что $RS_{\mathrm{A}}\, P_{N_+} x \in G$, следует, что $y = (\mathbf{A}-\lambda I)\, x \in H \dotplus G$.

Очевидно, $\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\, (z-y) = 0$, и по первой части теоремы получаем, что $z - y \in G$, а значит $z \in H \dotplus G$. Обратно, пусть $z \in H \dotplus G$. Тогда $z = x + y$, где $x \in H$, $y \in G$. По теореме (6) квазиядро бирасширения $\mathbf{A}$ является корректным J-самосопряженным расширением А. Поэтому существует вектор $u \in D(\hat A) \subset H$ такой, что $x = (\hat A - \lambda I)\, u$ Учитывая последнее равенство и первую часть теоремы, получим

$$\overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}\, z = \overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}}(\hat{\mathbf{A}}-\lambda I)\, u + \overline{(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}} y \in H_+.$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность Э. Р. Цекановскому за постоянное внимание к настоящей работе.

Всесоюзный государственный трест
по организации и рационализации районных
электростанций и сетей, Донецкое отделение

Поступила 15.I.1975

Լ. Մ. ՌԱՅԽ. J-էրմիտյան օպերատորի բիինվոլյուտիվ ինքնահամալուծ բիընդլայնումների ռեզոլվենտաների վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրված են խիտ տրված J-էրմիտյան օպերատորների հագեցված տարածության մեջ ելքով նոր տեսքի ընդլայնումների $(A-\lambda I)^{-1}$ ռեզոլվենտների հատկությունները։ (J-ն ինվոլյուցիա է հիլբերտյան տարածությունում)։ Գտնված են $(A-\lambda I)^{-1}$ օպերատորի անընդհատության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։

L. M. RAIKH. *About the resolvent of biinvolute self-adjoint biextension of J-Hermit operator* (summary)

The paper discusses the properties of the resolvent $(A - \lambda I)^{-1}$ of a new type extention of compactly given J-Hermit operator (J is the involution in Hilbert space).

Necessary and sufficient condition of continuity of the operators $(A - \lambda I)^{-1}$ are proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. М. Березанский.* Пространства с негативной нормой, УМН, XVIII, вып. 1 (109), 1973, 63—96.
2. *Н. А. Жихарь.* К теории расширений J-симметрических операторов, УМН, XI, № 4, 1959, 352—364.
3. *Ю. М. Арлинский, Э. Р. Цекановский.* К теории обобщенных самосопряженных расширений эрмитовых операторов с неплотной областью определения, ДАН УССР, 9, сер. А, 1973.
4. *Э. Р. Цекановский, Ю. Л. Шмульян.* Метод обобщенных функций в теории расширений неограниченных линейных операторов, Донецк, 1973.
5. *Л. М. Райх, Э. Р. Цекановский.* Бинволютивно самосопряженные расширения J-эрмитовых операторов, Функц. анализ и теор. функций, том 23, Изд. Хар. ГУ, 1975.