ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

От редакции. В расцвете творческих сил безвременно ушел из жизни талантливый, многообещающий математик, всеми нами любимый Тер-Исраелян Левон Аветикович.

Настоящая статья—его последняя научная работа, сданная в редакцию незадолго до его кончины.

Л. А. ТЕР-ИСРАЕЛЯН

О НАИЛУЧШЕЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НА СОПРИКАСАЮЩИХСЯ МНОЖЕСТВАХ

В работе [1] автором были получены верхние оценки для наилучшей рациональной аппроксимации на замкнутых множествах, представляющих собой две области, границы которых в точке соприкосновения образуют друг с другом положительные углы. Сравнение этого результата с основной теоремой работы А. А. Гончара [2] показывает, что переход от двух отрезков с общим концом к двум углам с общей вершиной не ухудшает асимптотики наилучшего рационального приближения. Дальнейшими исследованиями в этом направлении, очевидно, является переход к двум множествам, границы которых в точке соприкосновения имеют *общую касательную*. Поскольку схема, примененная автором в [1], довольно просто и естественно связывает быстроту стягивания полюсов аппроксимирующих функций к точке соприкосновения областей аппроксимации с конфигурацией границ в окрестности этой точки, то следует ожидать, что она приведет к „неплохим" верхним оценкам и в случае приближения на таких множествах.

Рассмотрим множества следующего специального вида:

$$E_\alpha = \{z \in \mathbf{C}:\ |z| \leqslant 1,\ |\mathrm{Re}\, z| \geqslant |\mathrm{Im}\, z|^\alpha\},\ \alpha \in (1, \infty),$$

и функцию f, непрерывную в полукруге $\Delta = \{z \in \mathbf{C}:\ |z| \leqslant 2,\ \mathrm{Re}\, z \geqslant 0\}$, голоморфную во внутренних точках Δ, $f(0)=0$ и $f(z)=0$, когда $\mathrm{Re}\, z<0$.

Пусть

$$R_n(f, E_\alpha) = \inf_{\{r_n\}} \sup_{z\in E_\alpha} |f(z) - r_n(z)|,$$

где $\{r_n\}$ — множество рациональных функций порядка не выше n, и

$$M(r) = \max_{|z| \leqslant r} |f(z)|,\ r \leqslant 2.$$

Теорема. *Для всякого* $\alpha \in (1, \infty)$ *имеем* $R_n(f, E_\alpha) = O(\rho_n)$

$$\rho_n = \min_{x\in(2,\infty)} \left(M\left(\frac{s}{x^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right) \ln x + x r^{n/x} \right),$$ *где* $s=s(\alpha)>0$, $r=r(\alpha)\in(0, 1)$.

Доказательство. Разобьем границу полукруга Δ на диаметр γ и полуокружность Γ, т. е.

$$\partial\Delta = \gamma \cup \Gamma,$$

$$\gamma = \{z \in \mathbf{C}\colon \operatorname{Re} z = 0,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant 2\},$$

$$\Gamma = \{z \in \mathbf{C}\colon |z| = 2,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}.$$

Тогда функция f на множестве E_2 может быть представлена в виде суммы двух функций

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \text{ и } f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta:$$

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),\ z \in E_2,$$

рациональной аппроксимацией каждой из которых мы и займемся.

1°. Выбрав некоторое $d \in (0, 1)$, найдем натуральное R такое, чтобы

$$|\zeta_{k+1} - \zeta_k| < d,\ k = 0, 1, \cdots, R,$$

где

$$\zeta_k = 2e^{-i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{R}k} \in \Gamma.$$

Точками $\{\zeta_k\}_{k=0}^{R}$ полуокружность Γ разобьется на дуги $l_k (k = 0, 1, \cdots, R-1)$, на которых определим кусочно-рациональную функцию $Q_m(\zeta, z)$:

$$Q_m(\zeta, z) = -\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\zeta - \zeta_k)^j}{(z - \zeta_k)^{j+1}},\ \zeta \in l_k,$$

которая осуществляет равномерную аппроксимацию ядра Коши для $\zeta \in \Gamma$, $z \in E_2$:

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - Q_m(\zeta, z)\right| < \frac{d^m}{1 - d}.$$

Отсюда получим

$$\left|f_1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\, Q_m(\zeta, z)\, d\zeta\right| < \frac{M(2)}{2(1-d)}\, d^n,\ z \in E_2.$$

А так как порядок рациональной функции

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\, Q_m(\zeta, z)\, d\zeta$$

не превосходит mR, то

$$R_n(f_1, E_2) = O\left(d^{\frac{n}{R}}\right). \tag{1.1}$$

2°. Выберем положительное число K и натуральное n_0 так, чтобы выполнялись условия

$$1.\quad \frac{K}{n_0^{\frac{1}{\alpha-1}}}=2,$$

$$2.\quad \frac{2}{(\alpha-1)K^{\alpha-1}}=p<1,$$

и рассмотрим последовательность $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ точек на γ:

$$\xi_k=i\,\frac{K}{(k+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}.$$

Элементы этой последовательности, а также $\{-\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ будут служить полюсами аппроксимации функции f_2.

Обозначим

$$\gamma_k=\{z\in\mathbf{C}\colon \operatorname{Re} z=0,\ |\xi_{k+1}|<|z|\leqslant|\xi_k|\},$$

$$\Gamma_n=\gamma\setminus\Big(\bigcup_{k=0}^{n-1}\gamma_k\Big).$$

Теперь определим функцию $Q_m(\zeta, z)$ для $\zeta\in\gamma$:

$$Q_m(\zeta,z)=\begin{cases}-\sum\limits_{j=1}^{m-1}\dfrac{(\zeta-\xi_k)^j}{(z-\xi_k)^{j+1}}, & \zeta\in\gamma_k,\ \operatorname{Im}\zeta>0\\[2ex] -\sum\limits_{j=1}^{m-1}\dfrac{(\zeta+\xi_k)^j}{(z+\xi_k)^{j+1}}, & \zeta\in\gamma_k,\ \operatorname{Im}\zeta<0,\end{cases}$$

для которой имеют место неравенства

$$\left|\frac{1}{\zeta-z}-Q_m(\zeta,z)\right|\leqslant\frac{2(k+n_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(1-p)\,K^{\alpha}}\,p^m,\quad \zeta\in\gamma_k,\ z\in E_\alpha. \tag{2.1}$$

Последние неравенства сразу вытекают из выбора постоянных K и p и следующего очевидного соотношения:

$$\frac{1}{(k+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}-\frac{1}{(k+1+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}\leqslant\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{(k+n_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}.$$

Далее, из (2.1) имеем

$$\left|\int\limits_{\gamma_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\int\limits_{\gamma_k}f(\zeta)\,Q_m(\zeta,z)\,d\zeta\right|\leqslant\frac{2pM(2)}{1-p}\,p^m,\quad z\in E_\alpha.$$

Теперь введем рациональную функцию

$$r_{k,m}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bigcup\limits_{j=0}^{k-1}\gamma_j}f(\zeta)\,Q_m(\zeta,z)\,d\zeta$$

и оценим для $z\in E_\alpha$ разность $|f_2(z)-r_{k,m}(z)|$,

$$|f_2(z) - r_{k,m}(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\Gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| + \frac{pM(2)}{\pi(1-p)} kp^m, \; z \in E_\alpha. \tag{2.2}$$

Осталось получить верхнюю оценку для первого слагаемого в правой части неравенства (2.2). Для этого мы используем тот же прием, основанный на голоморфности f в Δ, который был применен в [1] для оценки аналогичного интеграла.

Пусть $|z| \leqslant \frac{1}{2}|\xi_k|$, $z \in E_\alpha$. Тогда, обозначив $\delta_k = \{z \in \mathbf{C}: |z| = |\xi_k|$ $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\}$, получим

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| \leqslant 2\pi M(|\xi_k|) + \left|\int\limits_{\delta_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right| \leqslant 3\pi M\left(\frac{K}{(k+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right).$$

Теперь для $|z| > \frac{1}{2}|\xi_k|$, $z \in E_\alpha$ имеем

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| \leqslant M\left(\frac{K}{(k+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right) \int\limits_{\Gamma_k} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}.$$

Несложный подсчет показывает, что порядок интегрального сомножителя в правой части неравенства будет $O\left(\ln \frac{1}{|\varepsilon_k|}\right)$. Итак, для $z \in E_\alpha$

$$\left|\int\limits_{\Gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| \leqslant C_1 M\left(\frac{K}{(k+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right) \ln k, \tag{2.3}$$

где $C_1 = C_1(\alpha)$.

Теперь, подставляя (2.3) в (2.2), получим

$$|f_2(z) - r_{k,m}(z)| \leqslant C\left[M\left(\frac{K}{(k+n_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right) \ln k + kp^m\right], \; z \in E_\alpha, \tag{2.4}$$

где $C = C(\alpha)$.

Из сопоставления последнего неравенства с (1.1) нетрудно заметить, что главной частью в оценке $R_n(f, E_\alpha)$ будет $R_n(f_2, E_\alpha)$, и переходя в (2.4) от натуральных k и m к непрерывному параметру $x \in [2, \infty)$, получим утверждение теоремы.

Этот результат и теорема, полученная в [1], объединены общим методом выбора полюсов аппроксимации вблизи точки $z=0$, который можно описать следующим образом.

Пусть E—множество, на котором осуществляется приближение, симметричное относительно мнимой оси и содержащее на этой оси лишь точку $z=0$. Если ξ_n—n-ый выбранный полюс, то за ξ_{n+1} берется проекция на мнимую ось точки E, наиболее близкой к ξ_n. В [1], когда границу E представляли собой вблизи $z=0$ отрезки прямой, последовательность $|\xi_n|$ стремилась к нулю со скоростью геометрической прогрессии. В случае же, рассмотренном в настоящей работе, абсолютные величины полюсов аппроксимирующих рациональных функций стремятся к нулю уже гораздо медленнее, так как точки множества E „ближе примыкают" к мнимой оси в окрестности $z=0$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 18.II.1976

Լ. Ա. ՏԵՐ-ԻՍՐԱՅԵԼՅԱՆ. Ռացիոնալ ֆունկցիաներով լավագույն մոտարկման մասին հպվող բազմությունների վրա *(ամփոփում)*

Հոդվածում ստացված են վերին գնահատականներ լավագույն ռացիոնալ մոտարկման համար հատուկ տեսքի բազմությունների վրա։

L. A. TER-ISRAJELIAN. *On the best rational approximation in contacting domains* (summary)

The paper gives upper estimates for the best rational approximation in the special sets.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Тер-Исраелян.* О равномерной аппроксимации рациональными функциями, Изв. АН Арм.ССР. сер. „Математика", IX, № 3, 1974, 236–241.
2. *А. А. Гончар.* О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями, Матем. сб., 73 (115), 1967, 630–638.