ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 3, 1976 Математика

С. Г. СИМОНЯН

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

1°. Как известно [1], в спектральной теории дифференциальных операторов теория возмущений исследует приращения собственных значений и собственных функций некоторой задачи, вызываемых небольшим изменением условий задачи.

В этой заметке мы рассматриваем возмущенную дифференциальную систему

$$\left[I\frac{d}{dt}+\varepsilon A(t)\right]x=\lambda x;\ t\in R=(-\infty;\infty), \tag{1.1}$$

$$A(t)=\begin{pmatrix} p(t) & q(t)\\ q(t) & -p(t)\end{pmatrix}=A(t+a);\ I=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix};\ x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}.$$

Цель настоящей работы — получить асимптотические разложения решений уравнения (1.1) при $\lambda\to\infty$, установить асимптотику длин лакун в спектре одномерного периодического оператора Дирака.

Ниже мы получим явные асимптотические формулы для ширины лакун щели Δ_m и выясним процесс возникновения лакун при возбуждении матрицей $\varepsilon A(t)$ оператора $I\dfrac{d}{dt}$ невозмущенной системы

$$I\cdot\frac{dx}{dt}=\lambda x. \tag{1.2}$$

Аналогичная задача для скалярного уравнения Хилла решена в монографии Титчмарша [1].

Заметим, что методика получения фундаментальной матрицы решений задачи Коши (1.1) и $X(0,\lambda,\varepsilon)=E$, а также асимптотические формулы для решений $\theta(t,\lambda,\varepsilon)$ и $\varphi(t,\lambda,\varepsilon)$ существенно отличаются от применяемой методики Титчмарша [1]. Здесь мы пользуемся основными положениями теории L-диагональных преобразований [2], которые позволяют явно написать главные члены асимптотических разложений основных величин. Основные результаты этой статьи: лемма 2.1, теорема 3.5 и вытекающие из них следствия. Основные обозначения заимствованы из монографии [1].

Заметим, что система (1.2) имеет непрерывный спектр, так как она распадается на следующие два уравнения:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \lambda^2 x_k = 0, \ k = 1, \ 2.$$

2°. **Асимптотика фундаментальной матрицы системы (1.1).** Представим систему (1.1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda I x + IA(t) x. \tag{2.1}$$

Преобразование

$$X(t) = T \exp(\lambda t Л) \ Z(t), \tag{2.2}$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}; \quad Л = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

приводит систему (2.1) к виду

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \varepsilon K(t, \lambda) Z(t), \tag{2.4}$$

где

$$K(t, \lambda) = \exp(-\lambda t \Lambda) \ T^{-1} IA(t) \ T \ \exp(\lambda t \Lambda)$$

или

$$K(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & [q(t) - ip(t)] \exp(-2\lambda it) \\ [q(t) + ip(t)] \exp(2\lambda it) & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица решений системы (2.4) с выбранным начальным условием

$$Z(0, \lambda, \varepsilon) = Z_0 = T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

удовлетворяет интегральному уравнению типа Вольтерра

$$Z(t, \lambda, \varepsilon) = Z_0 + \varepsilon \int_0^t K(\tau, \lambda) \ Z(\tau) \ d\tau.$$

Решая это интегральное уравнение методом последовательных приближений, мы получим для решений $Z(t, \lambda, \varepsilon)$ ряд

$$Z(t, \lambda, \varepsilon) = Z_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (Z_{k+1} - Z_k), \tag{2.6}$$

где

$$Z_k(t, \lambda, \varepsilon) = Z_0 + \varepsilon \int_0^t K(\tau, \lambda) \ Z_{k-1}(\tau) \ d\tau.$$

Легко устанавливается, что ряд (2.6) сходится $\forall b > 0 \ (b < \infty)$ по норме в области $J_b = \{|t| \leqslant b; \ |\lambda| < \infty; \ |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$, так как числовой ряд

$$2 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |\lambda|^{-k} (\alpha \varepsilon_0)^k \right) = 2e^{\alpha \varepsilon_0 / |\lambda|}$$

является мажорантой для ряда (2.6). Следовательно, в силу теоремы Вейерштрасса матрица-функция $Z(t, \lambda, \varepsilon)$ при любом фиксированном t есть целая матрица-функция от параметров ε и λ.

Заметим, что если $2\lambda = \xi + i\eta$ $(\eta > 0)$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $0 < \tau \leqslant t \leqslant a$, то справедливы следующие оценки:

$$\|e^{-\eta t}[Z_1(t, \lambda, \varepsilon) - Z_0]\| \leqslant 2\frac{\alpha\varepsilon_0}{|\lambda|}, \cdots,$$

$$\|e^{-k\eta t}[Z_k(t, \lambda, \varepsilon) - Z_{k-1}(t, \lambda, \varepsilon)]\| \leqslant 2\frac{(\alpha\varepsilon_0)^k}{k!\,|\lambda|^k} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

где

$$\alpha = \max_{0<t<a}\left(\sqrt{p^2(t) + q^2(t)}\right),$$

а в качестве нормы некоторой матрицы $B(t)$ принята

$$\|B(t)\|_{[0,\, t]} = \max_{0<\tau<t}\sum_{k,\, j}|b_{kj}(t)|.$$

Таким образом, при любом комплексном λ справедливы асимптотические формулы $(0 \leqslant t \leqslant a;\ \lambda \to \infty)$

$$Z(t, \lambda, \varepsilon) = Z_0 + O\left[|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1}\exp(|\mathrm{Im}\,\lambda|\,t)\right], \tag{2.7}$$

$$Z(t, \lambda, \varepsilon) = Z_0 + \varepsilon\int_0^t K(\tau, \lambda)\, Z_0\, d\tau + O\left[\frac{|\varepsilon|^2}{|\lambda|^2}\exp(2\,|\mathrm{Im}\,\lambda|\,t)\right]. \tag{2.8}$$

Подытожив результаты пункта 2°, мы приходим к лемме.

Лемма 2.1. *Пусть* $A(t) \in C[0; a]$; $A(t + a) = A(t)$ *при* $t \in R = (-\infty, \infty)$.

Тогда при любом $b > 0$ *для фундаментальной матрицы* $X(t, \lambda, \varepsilon)$ *решений системы* (1.1), *удовлетворяющей условию* $X(0, \lambda, \varepsilon) = E$, *в области* J_b *справедлива асимптотическая формула*

$$X(t, \lambda, \varepsilon) = T\exp(\lambda t \Lambda)\left\{E + O\left[\frac{|\varepsilon|}{|\lambda|}\exp(|\mathrm{Im}\,\lambda|\,t)\right]\right\}T^{-1}, \tag{2.9}$$

где T *и* Λ *определяются, соответственно, по формулам* (2.3).

Матрица $X(t, \lambda, \varepsilon)$ *есть целая аналитическая матрица-функция по* λ *и* ε.

Заметим, что асимптотику фундаментальной матрицы системы (1.1) вида (2.9) можно переписать в виде

$$X(t, \lambda, \varepsilon) = Y(t, \lambda)\left\{E + O\left[\frac{|\varepsilon|}{|\lambda|}\exp(|\mathrm{Im}\,\lambda|\,t)\right]\right\}, \tag{2.10}$$

где

$$Y(t, \lambda) = \begin{pmatrix}\cos\lambda t & -\sin\lambda t\\ \sin\lambda t & \cos\lambda t\end{pmatrix},$$

причем $Y(t, \lambda)$ есть фундаментальная матрица решений невозмущенной системы (1.2), удовлетворяющая начальному условию

$$Y(0, \lambda) = E; \; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, если в (2.9) перейти к координатному виду и воспользоваться формулой Эйлера $\exp\,(\pm iz) = \cos z + i \sin z$, то мы приходим к (2.10).

Заметим также, что к виду (2.10) мы могли бы прийти с помощью подстановки в (1.1) $X = YZ$ и затем применением метода вариации постоянных.

Следствие 2.2. Обозначив два столбца фундаментальной матрицы $X(t, \lambda, \varepsilon)$, соответственно, $\theta(t, \lambda, \varepsilon)$ и $\varphi(t, \lambda, \varepsilon)$, получаем

$$\theta(t, \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos \lambda t \\ \sin \lambda t \end{pmatrix} + O\left[\frac{|\varepsilon|}{|\lambda|} \exp\,(|\mathrm{Im}\,\lambda|\, t)\right], \tag{2.11}$$

$$\varphi(t, \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -\sin \lambda t \\ \cos \lambda t \end{pmatrix} + O\left[\frac{|\varepsilon|}{|\lambda|} \exp\,(|\mathrm{Im}\,\lambda|\, t)\right], \tag{2.12}$$

причем $\theta(t, \lambda, \varepsilon)$ и $\varphi(t, \lambda, \varepsilon)$ представляют два линейно независимых решения системы (1.1), удовлетворяющих начальным условиям

$$\theta(0, \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; \varphi(0, \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следствие 2.3. В силу асимптотических формул (2.2), (2.8) и (2.9), при вещественном λ и ε для фундаментальной матрицы $X(t, \lambda, \varepsilon)$ системы (1.1) справедлива асимптотическая формула (E — единичная матрица)

$$X(t, \lambda, \varepsilon) = Y(t, \lambda)\, [E +$$

$$+ \varepsilon \begin{bmatrix} \int\limits_0^t [q(\tau) \cos 2\lambda\tau - p(\tau) \sin 2\lambda\tau]\, d\tau & -\int\limits_0^t [q(\tau) \sin 2\lambda\tau + p(\tau) \cos 2\lambda\tau]\, d\tau \\ -\int\limits_0^t [q(\tau) \sin 2\lambda\tau + p(\tau) \cos 2\lambda\tau]\, d\tau & -\int\limits_0^t [q(\tau) \cos 2\lambda\tau - p(\tau) \sin 2\lambda\tau]\, d\tau \end{bmatrix} +$$

$$+ \varepsilon^2 \Bigg[\frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^t [q(\tau) \cos 2\lambda\tau - p(\tau) \sin 2\lambda\tau]\, d\tau\right\}^2 +$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau [p(\tau)\, q(s) - q(\tau)\, p(s)] \cos 2\lambda\, (\tau - s)\, ds\, d\tau -$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left\{ \int_0^t [q(\tau)\sin 2\lambda\tau + p(\tau)\cos 2\lambda\tau]\, d\tau \right\}^2 - \int_0^t \int_0^\tau [p(\tau)\,p(s) + q(\tau)\,q(s)] \sin 2\lambda(\tau - s)\, ds d\tau \right]$$

$$\left[\int_0^t \int_0^\tau [p(\tau)\,q(s) - q(\tau)\,p(s)] \cos 2\lambda(\tau - s)\, ds d\tau + \frac{1}{2}\left\{ \int_0^t [q(\tau)\cos 2\lambda\tau - p(\tau)\sin 2\lambda\tau]\, d\tau \right\}^2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \int_0^\tau [p(\tau)\,p(s) + q(\tau)\,q(s)] \sin 2\lambda(\tau - s)\, ds d\tau + \frac{1}{2}\left\{ \int_0^t [q(\tau)\sin 2\lambda\tau + p(\tau)\cos 2\lambda\tau]\, d\tau \right\}^2 \right] +$$

$$+ O(\varepsilon^3 \lambda^{-3}). \tag{2.13}$$

3°. Обозначим через θ и φ соответственно $\theta(a, \lambda, \varepsilon)$ и $\varphi(a, \lambda, \varepsilon)$. Аналогично [1] (гл. XXI, стр. 348) мы построим два решения системы (1.1) в виде Флоке:

$$x^{(1)}(t, \lambda, \varepsilon) = (\varphi_1 - m_2\varphi_2)^{t/a}\, \chi^{(1)}(t), \tag{3.1}$$

$$x^{(2)}(t, \lambda, \varepsilon) = (\varphi_1 - m_1\varphi_2)^{t/a}\, \chi^{(2)}(t), \tag{3.2}$$

где $\chi^{(1)}(t)$ и $\chi^{(2)}(t)$ — периодические вектор-функции с периодом $a > 0$, а $m_{1,2}(\lambda, \varepsilon)$ определяется из следующего квадратного уравнения $\varphi_1 m^2 + (\theta_1 - \varphi_2)\, m - \theta_2 = 0$ или по формуле

$$m = m(\lambda, \varepsilon) = \frac{\varphi_2 - \theta_1}{2\varphi_1} \pm \frac{\sqrt{(\theta_1 + \varphi_2)^2 - 4(\theta_1\varphi_2 - \theta_2\varphi_1)}}{2\varphi_1}.$$

Ввиду того, что $\theta_1\varphi_2 - \theta_2\varphi_1 = 1$, имеем

$$m(\lambda, \varepsilon) = \frac{(\varphi_2 - \theta_1) \pm \sqrt{F^2(\lambda, \varepsilon) - 4}}{2\varphi_1}, \tag{3.3}$$

где обозначено

$$F(\lambda, \varepsilon) = \operatorname{sp} X(a, \lambda, \varepsilon) = \theta_1(a, \lambda, \varepsilon) + \varphi_2(a, \lambda, \varepsilon), \tag{3.4}$$

Лемма 3.1. *Для аналитической функции $F(\lambda, \varepsilon)$ при $\lambda \neq \frac{n\pi}{a}$ и при $|\lambda| \to \infty$ справедливы асимптотические формулы*

$$F(\lambda, \varepsilon) = 2\cos\lambda a + O\left[|\varepsilon|\cdot|\lambda|^{-1}\exp(|\operatorname{Im}\lambda|\cdot a)\right], \tag{3.5'}$$

$$F(\lambda, \varepsilon) = 2\cos\lambda a + \varepsilon^2\cos\lambda a\left\{\left[\int_0^a (q(t)\cos 2\lambda t - p(t)\sin 2\lambda t)\,dt\right]^2 + \right.$$

$$+\left.\left[\int_0^a q(t)\sin 2\lambda t + p(t)\cos 2\lambda t)\,dt\right]^2\right\} +$$

$$+ 2\varepsilon^2\sin\lambda a\left\{\int_0^a\int_0^t [p(t)\,p(s) + q(t)\,q(s)]\sin 2\lambda(t-s)\,ds\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^a\int_0^t [p(t)\,q(s) - q(t)\,p(s)]\cos 2\lambda(t-s)\,ds\,dt + O\left(\frac{\varepsilon^4}{\lambda^4}\right)\right\}. \tag{3.5''}$$

Формула (3.5″) записана для вещественных λ, ε. Доказательство леммы непосредственно следует из асимптотических формул (2.11)—(2.13) и из формулы (3.4).

Заметим, что если $\varepsilon = 0$, то $F(\lambda, 0) = 2\cos\lambda a$ и выражение $F^2(\lambda, 0) - 4 = 4\cos^2\lambda a - 4$ имеет только вещественные двукратные корни в точках $\lambda = \dfrac{n\pi}{a}$, поэтому ожидается, что в возмущенном случае будут появляться пары вещественных корней в окрестностях этих точек. Далее предположим, что ε принимает значение в интервале $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Заметим, что функции $m_1(\lambda, \varepsilon)$, $m_2(\lambda, \varepsilon)$ имеют точки ветвления второго порядка в нулях функций $F(\lambda, \varepsilon) - 2$ и $F(\lambda, \varepsilon) + 2$. Ниже установим, что каждая из этих функций имеет бесконечно много вещественных нулей, которые мы обозначим соответственно через $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ и $\mu_0, \mu_1, \dots$.

Дифференцируя уравнение (1.1) по λ, получаем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial t} + Ix + \lambda I\frac{\partial x}{\partial\lambda} - \varepsilon IA(t)\frac{\partial x}{\partial\lambda} = 0. \tag{3.6}$$

Ищем решение (3.6), удовлетворяющее начальному условию

$$\frac{\partial x(0, \lambda, \varepsilon)}{\partial\lambda} = 0.$$

Система (3.6) с указанным начальным условием равносильна интегральному уравнению

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \int_0^t [\varphi(t, \lambda, \varepsilon)\,\theta^T(\tau, \lambda, \varepsilon) - \theta(t, \lambda, \varepsilon)\,\varphi^T(\tau, \lambda, \varepsilon)]\,x(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda} = \int\limits_0^t [\varphi(t, \lambda, \varepsilon)\,\theta^{\mathrm{T}}(\tau, \lambda, \varepsilon) - \theta(\tau, \lambda, \varepsilon)\,\varphi^{\mathrm{T}}(\tau, \lambda, \varepsilon)]\,\theta(\tau)\,d\tau; \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \int\limits_0^t [\varphi(t, \lambda, \varepsilon)\,\theta^{\mathrm{T}}(\tau, \lambda, \varepsilon) - \theta(t, \lambda, \varepsilon)\,\varphi^{\mathrm{T}}(\tau, \lambda, \varepsilon)]\,\varphi(\tau)\,d\tau. \quad (3.8)$$

Напомним, что если $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, то $x^{\mathrm{T}} = (x_1;\ x_2)$. В силу (3.7), (3.8) из 3.5) получаем

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda} = \frac{\partial\theta_1}{\partial\lambda} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda} = \int\limits_0^a \{\varphi_1[\theta_1^2(t) + \theta_2^2(t)] +$$

$$+ (\varphi_2 - \theta_1)[\varphi_1(t)\,\theta_1(t) + \varphi_2(t)\,\theta_2(t)] - \theta_2[\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t)]\}\,dt. \quad (3.9)$$

После преобразования (3.9) получим

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda} = -\theta_2 \int\limits_0^a \sum_{j=1}^2 \left\{\left[\varphi_j(t) + \frac{\theta_1 - \varphi_2}{2\theta_2}\cdot\theta_j(t)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{4 - F^2(\lambda, \varepsilon)}{4\theta_2^2}\cdot\theta_j^2(t)\right\} dt. \quad (3.10)$$

Предположим, что λ — вещественное число, а $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Если λ удовлетворяет также условию $-2 < F(\lambda, \varepsilon) < 2$, то $\theta_1^2 + 2\theta_1\varphi_2 + \varphi_2^2 < 4 = 4(\theta_1\varphi_2 - \varphi_1\theta_2)$, или $(\theta_1 - \varphi_2)^2 < -4\varphi_1\theta_2$. Отсюда $\theta_2 \neq 0$, $\varphi_1 \neq 0$, а θ_2, φ_1 имеют противоположные знаки. Правая часть (3.10) отлична от нуля, а ее знак противоположен знаку θ_2, поэтому $F(\lambda, \varepsilon)$ не имеет экстремума в тех точках λ, где $-2 < F(\lambda, \varepsilon) < 2$.

Если $|F(\lambda, \varepsilon)| = 2$, то из (3.10) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda} = \theta_2 \int\limits_0^a \sum_{j=1}^2 \left\{\left[\varphi_j(t) + \frac{\theta_1 - \varphi_2}{2\theta_2}\,\theta_j(t)\right]^2\right\} dt, \quad (3.11)$$

и следовательно, $\frac{\partial F}{\partial\lambda} = 0$, если только $\theta_2 = \theta_2(a, \lambda, \varepsilon) = 0$.

Аналогичным образом, если в (3.9) вынесем за скобки $\varphi_1 = \varphi_1(a, \lambda, \varepsilon)$ и выделим полный квадрат, то убедимся, что $\frac{\partial F}{\partial\lambda} = 0$ лишь только $\varphi_1(a, \lambda, \varepsilon) = 0$.

Имеем также, что $\theta_1\varphi_2 - \theta_2\varphi_1 = 1$. Откуда следует, что если

$$F(\lambda, \varepsilon) = 2,\ \ \frac{\partial F}{\partial\lambda} = 0, \text{ то } \theta_1(a, \lambda, \varepsilon) = 1,\ \theta_2(a, \lambda, \varepsilon) = 0;$$

$$\varphi_1(a, \lambda, \varepsilon) = 0, \ \varphi_2(a, \lambda, \varepsilon) = 1.$$

И если

$$F(\lambda, \varepsilon) = -2, \ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0, \ \text{то} \ \theta_1(a, \lambda, \varepsilon) = -1,$$

$$\theta_2(a, \lambda, \varepsilon) = 0, \ \varphi_1(a, \lambda, \varepsilon) = 0, \ \varphi_2(a, \lambda, \varepsilon) = -1.$$

Таким образом, если λ является собственным значением периодической или антипериодической краевых задач, порожденных уравнениями (1.1) и условиями $\theta(0, \lambda, \varepsilon) = \pm\theta(a, \lambda, \varepsilon)$, $\varphi(0, \lambda, \varepsilon) = \pm\varphi(a, \lambda, \varepsilon)$, то в такой точке $\lambda(\varepsilon)$ график функций $F(\lambda, \varepsilon)$ касается прямой $F = 2$ и $F = -2$, а в остальных нулях $|F(\lambda, \varepsilon)| = 2$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda} \neq 0$.

Построим $\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}$ при условии $|F(\lambda, \varepsilon)| = 2$. Подобно формуле 3.11 получаем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} = \int_0^a dt \int_0^t \left\{ \varphi^T(t) \left[\varphi(t)\theta^T(\tau) - \theta(t)\varphi^T(\tau) \right] \theta(\tau)\, d\tau = \right.$$

$$= -\sum_{m=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \int_0^a \left\{ \int_0^t \left[\varphi_m(t)\,\theta_j(\tau) - \theta_m(t)\,\varphi_j(\tau) \right]^2 d\tau \right\} dt < 0.$$

Следовательно, для значений λ, удовлетворяющих условиям $F(\lambda, \varepsilon) = 2$ и $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$, функция $F(\lambda, \varepsilon)$ имеет максимальное значение. Кроме того, в рассматриваемой точке λ функция $F(\lambda, \varepsilon) - 2$ не может иметь больше двух нулей.

Аналогичным образом показываем, что если $F(\lambda, \varepsilon) = -2$ и $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$, то $F(\lambda, \varepsilon) + 2$ будет иметь минимальное значение и не больше двух нулей.

Из асимптотической формулы (3.5′) имеем

$$F(\lambda, \varepsilon) - 2 = -4\sin^2\frac{\lambda a}{2} + O\{|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1}\exp(a\,|\mathrm{Im}\,\lambda|)\}.$$

Обозначим

$$f(\lambda) = 4\sin^2\frac{\lambda a}{2}, \quad g(\lambda) = F(\lambda, \varepsilon) - 2 + 4\sin^2\frac{\lambda a}{2}.$$

На плоскости $\xi + i\eta$ выделим контур

$$\Gamma_n: \left\{ |\mathrm{Re}\,\lambda| = (2n+1)\frac{\pi}{a}; \ |\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant (2n+1)\frac{\pi}{a} \right\}.$$

На этом контуре Γ_n относительно функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ выполняются все условия теоремы Руше, и поскольку $|g(\lambda)| < |f(\lambda)|$ для достаточно больших λ, то $f(\lambda)$ и $f(\lambda)+g(\lambda)$ имеют внутри контура Γ_n одинаковое число нулей. Но $f(\lambda)$ внутри Γ_n имеет $4n+2$ нулей, причем $\lambda = 0$ есть двукратный нуль, а наибольший нуль есть $|\lambda| = \dfrac{2n\pi}{a}$.

Переходим теперь к асимптотическому вычислению корней целых функций $F(\lambda, \varepsilon) \pm 2$. Заметим, что в правой части (3.5″) слагаемые, кроме первого, имеют порядок $\varepsilon^2 \lambda^{-2}$ при $\lambda \to \infty$. Следовательно, корни уравнения $F(\lambda, \varepsilon) - 2 = 0$ расположены вблизи корней уравнения $\sin^2 \dfrac{\lambda a}{2} = 0$. Поэтому ищем решения уравнения $F(\lambda, \varepsilon) = 2$ в окрестности точек $\lambda = 2n\pi$. Положим в уравнении

$$\lambda a = 2n\pi + \delta, \quad -\pi < \delta \leqslant \pi. \tag{3.12}$$

Для неизвестного числа δ получаем уравнение

$$\delta^2 - 4\varepsilon^2 r(n)\,\delta - \frac{a^2\varepsilon^2}{4}\left[(a_{q,2n} - b_{p,2n})^2 + (b_{q,2n} + a_{p,2n})^2\right] = O\left(\frac{\varepsilon^4}{n^4}\right), \tag{3.13}$$

где $a_{q,2n}$, $b_{q,2n}$, $a_{p,2n}$, $b_{p,2n}$ — коэффициенты Фурье функций $q(t)$ и $p(t)$ на интервале $[0, a]$, т. е.

$$a_{p,q,2n} = \frac{2}{a}\int_0^a \begin{Bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{Bmatrix} \cos\frac{4n\pi}{a} t\,dt; \quad b_{p,q,2n} = \frac{2}{a}\int_0^a \begin{Bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{Bmatrix} \sin\frac{4n\pi}{a} t\,dt. \tag{3.14}$$

Функция $r(n)$ имеет порядок n^{-2} и определяется по формуле

$$r(n) = \int_0^a dt \int_0^t [p(t)\,q(s) - p(s)\,q(t)] \cos\frac{4n\pi}{a}(t-s)\,ds +$$

$$+ \int_0^a dt \int_0^t [p(t)\,p(s) + q(t)\,q(s)] \sin\frac{4n\pi}{a}(t-s)\,ds.$$

Из (3.13) для величины δ получаем оценку $\delta = O(\varepsilon n^{-1})$. Следовательно, порядок второго члена уравнения (3.13) есть $O(\varepsilon^3 n^{-3})$, в силу чего уравнение (3.13) можно записать в виде

$$\delta^2 = \frac{a^2\varepsilon^2}{4}\left[(a_{q,2n} - b_{p,2n})^2 + (b_{q,2n} + a_{p,2n})^2\right] + O(\varepsilon^3 n^{-3}). \tag{3.15}$$

Решив уравнение (3.15), получим следующую асимптотическую формулу

$$\delta = \pm \frac{a\varepsilon}{2}\left[(a_{q,2n} - b_{p,2n})^2 + (a_{p,2n} + b_{q,2n})^2\right]^{1/2} + O(\varepsilon^2 n^{-2}). \quad (3.16)$$

В силу (3.16), из (3.12) для соответствующих значений λ получаем формулу

$$\lambda_n = \frac{2n\pi}{a} \pm \frac{a\varepsilon}{2}\left[(a_{q,2n} - b_{p,2n})^2 + (a_{p,2n} + b_{q,2n})^2\right]^{1/2} + O(\varepsilon^2 \cdot n^{-2}). \quad (3.17)$$

Аналогичным образом, решив уравнение $F(\mu, \varepsilon) + 2 = 0$ получим асимптотические формулы:

$$\mu_n = \frac{(2n+1)}{a}\pi \pm \frac{a\varepsilon}{2}\left[a_{q,2n+1} - b_{p,2n+1})^2 + (a_{p,2n+1} + b_{q,2n+1})^2\right]^{1/2} + O(\varepsilon^2 \cdot n^{-2}). \quad (3.18)$$

Подытожив результаты пункта 3°, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3.5. *Если в системе* (1.1) *матрица* $A(t) \in C[0, a]$, $A(t+a) = A(t)$, $\forall t \in R = (-\infty; +\infty)$; $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$;

ε — *некоторый малый парамгтр, то спектр этой системы непрерывен с лакунами (пропусками). Крайние точки спектра определяются по асимптотичгским формулам* (3.17) *и* (3.18). *Ширина каждой лакуны* Δ_m *определяется по асимптотической формуле*

$$\Delta_m = |a \cdot \varepsilon|\left[(a_{q,m} - b_{p,m})^2 + (b_{q,m} + a_{p,m})^2\right]^{1/2} + O(m^{-2} \cdot \varepsilon^2), \quad (3.19)$$

где коэффициенты $a_{p,m}$, $b_{p,m}$, $a_{q,m}$, $b_{q,m}$ *определяются по формулам* (3.14) *и являются соответствующими коэффициентами рядов Фурье функции* $p(t)$ *и* $q(t)$ *в интервале* $[0, a]$.

Доказательство теоремы мы закончим, если убедимся, что два линейно независимых решения (3.1) и (3.2) вида Флоке остаются ограниченными на всей оси $t \in R$ и на непрерывных множествах оси λ, где $|F(\lambda, \varepsilon)| < 2$. Для этого заметим, что если $|F(\lambda, \varepsilon)| < 2$, то из (3.13), (3.3) и (3.5'), предположив, что $\operatorname{Im} \lambda > 0$, получим

$$m_{1,2}(\lambda, \varepsilon) = \mp i + O\left[|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1} \exp(a \cdot \operatorname{Im} \lambda)\right],$$

$$\varphi_1 - m_1\varphi_2 = \exp(-i\lambda a)\left[1 + O(|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1})\right],$$

$$\varphi_1 - m_2\varphi_2 = \exp(i\lambda a)\left[1 + O(|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1})\right].$$

В силу последних асимптотических формул из (3.1) и (3.2) при $\operatorname{Im} \lambda = 0$ имеем

$$x^{(1)}(t, \lambda, \varepsilon) = e^{-i\lambda t}\chi^{(1)}(t, \lambda, \varepsilon)\left[1 + O(|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1})\right], \quad (3.20)$$

$$x^{(2)}(t, \lambda, \varepsilon) = e^{i\lambda t}\chi^{(2)}(t, \lambda, \varepsilon)\left[1 + O(|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1})\right]. \quad (3.21)$$

Как следует из (3.20) и (3.21), решения $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ системы (1.1) ограничены на всей оси $t \in R = (-\infty, +\infty)$ при всех λ, удовлетворяющих соотношению $|F(\lambda, \varepsilon)| < 2$. Но последнее неравенство выполняется на всей вещественной оси λ, кроме счетного числа отрезков (см. (3.19)) Δ_m, $m = \pm 1, \pm 2, \cdots$. Теорема доказана.

Следствие 3.6. В частности, если примем $\varepsilon = 0$, то мы вернемся к невозмущенной системе (1.2) и из выведенных формул (3.17), (3.18) получим кратные точки непрерывного спектра (1.2). А из (3.19) следует, что лакуны Δ_m сводятся к точке.

Следствие 3.7. Если рассмотреть невозмущенную систему Дирака (1.1) при значении $\varepsilon = 1$, то все полученные результаты (3.17), (3.19) будут верны для такой системы, если положить в этих формулах $\varepsilon = 1$. В самом деле, все построенные нами выше формулы при малых $|\varepsilon| = \varepsilon_0$ являются целыми функциями по ε и непрерывно зависят от ε, откуда и следует наше утверждение.

Замечание 1. Рассмотренный нами вопрос относится к природе спектра минимального замкнутого оператора L в пространстве $H = L^2(-\infty, +\infty) \oplus L^2(-\infty; \infty)$, порожденного дифференциальным выражением $l = J\dfrac{d}{dt} + A(t)$, где $A(t)$ мала на всем периоде, ее запишем в виде $\varepsilon A(t)$. В случае $\varepsilon = 0$ непрерывная часть спектра покрывает ось $-\infty < \lambda < \infty$. При больших λ в спектре образуется щель, длина которой приближенно равна $|\varepsilon\alpha| [(a_{q,m} - b_{p,m})^2 + (b_{q,m} + a_{p,m})^2]^{1/2}$, где $a_{p,q,m}$, $b_{p,q,m}$ — коэффициенты Фурье функций $p(t)$ и $q(t)$.

Замечание 2. Корни целых функций $F(\lambda) - 2$ и $F(\mu) + 2$ совпадают, соответственно, с собственными числами периодической и антипериодической краевой задачи уравнения (1.1) и на вещественной оси λ расположены так:

$$\cdots, \lambda_{2n-2} < \mu_{2n-2} \leqslant \mu_{2n-1} \leqslant \lambda_{2n-1} \leqslant \lambda_{2n}, \cdots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Замечание 3. Теорема 3.5 остается верной также для более широкого класса функций $A(t)$, чем класс $C[0, a]$; например, для функций $A(t)$ с ограниченной вариацией.

Замечание 4. Оценка (3.19) теряет эффективность, если, например, матрица-функция $A(t)$ имеет всюду ограниченную производную. В этом случае, как известно, коэффициенты Фурье, а вместе с ними и главный член формулы (3.19) суть $O(m^{-2})$ и оценка (3.19) дает не более, чем $\Delta_m = O(\varepsilon^2 m^{-2})$. Для распространения эффективной оценки лакун спектра одномерного периодического оператора Дирака на более гладкие функции $A(t)$ следует в исходных асимптотических формулах (2.8), (2.13) и (3.5) использовать большее число членов, чем используется в настоящей работе. Для бесконечно дифференцируемых функций $A(t)$ нужно построить асимптотический ряд фундаментальной матрицы $X(t, \lambda, \varepsilon)$ решений системы (1.1).

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического института

Поступила 15.I.197

Ս. Գ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ. Պարբերական գրգռվածությամբ դիֆերենցիալ սիստեմի մի քանի ասիմպտոտիկ գնահատականներ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում հիմնավորված է Դիրակի պարբերական դիֆերենցիալ միաչափ սիստեմի լակունների գոյությունն անընդհատ սպեկտրում, ինչպես նաև ստացված են ճշգրիտ ասիմպտոտիկ բանաձևեր սպեկտրի եզրային կետերի համար։ Ցանկացած Δ_m, $m=\pm 1, \pm 2, \ldots$ լակունի երկարության համար ստացվել է ասիմպտոտիկ գնահատական, ընդ որում, ասիմպտոտիկայի գլխավոր անդամի գործակիցն արտահայտվում է սիստեմի պոտենցյալ մատրիցայի առաջին և երկրորդ սյուների էլեմենտների գումարների Ֆուրյեի շարքերի գործակիցներով։ Ստացված է նաև սպեկտրի տեղաշարժման չափը չգրգռված սիստեմից գրգռված սիստեմին անցնելիս։

S. G. SIMONIAN. *Some asymptotic estimates of differential system with periodic disturbance* (summary)

In the paper the existence of lacunal in the continuous spectrum of Dirac's onedimensional differential system is established and the exact asymptotic formulae for the extreme points of spectrum. Are obtained also the asymptotic estimate for the with of any lacuna Δ_m is obtained the main term being expressed by the coefficients of Fourier series of the elements of the potential matrix.

The shifts of the points of spectrum due to the introduction of disturbances are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э. Ч. Титчмарш.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, том II, гл. XXI, ИИЛ, М., 1961.
2. *И. М. Раппопорт.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Гл. I, Изд. АН УССР, Киев, 1954.