

Р. А. АВЕТИСЯН

О D -СВОЙСТВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В настоящей работе мы приводим одно сравнительно простое доказательство аналога классической теоремы Лузина—Данжуа для кратных тригонометрических рядов. Для двойных рядов эта теорема другим методом доказана в работе [1].

Далее мы приводим несколько теорем о D -свойстве кратных функциональных последовательностей.

Сначала приведем следующее

Определение 1. Будем говорить, что система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$ обладает свойством D , если из абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

на множестве положительной меры следует неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$$

(см. [5], стр. 330).

Аналогично определяется D -свойство для кратных последовательностей.

Теорема Лузина—Данжуа утверждает, что система $\{\cos(n\alpha + \alpha_n)\}_{n=1}^{\infty}$, где α_n —произвольные действительные числа, обладает свойством D .

Справедлива следующая

Теорема 1. *Кратная тригонометрическая система обладает свойством D .*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся две леммы. Чтобы сформулировать первую лемму, дадим следующее

Определение 2. Будем говорить, что измеримая функция $T(x)$, отображающая $[0, 1]$ на измеримое множество $T([0, 1])$, принадлежит классу (B, α) если $\exists \alpha < \infty$ такое, что для любого измеримого $E \subset T([0, 1])$

$$\mu(T^{-1}E) \leq \alpha \cdot \mu(E),$$

где $T^{-1}E$ —полный прообраз множества E при отображении T , а μ —мера Лебега.

Лемма 1. Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — измеримые функции, определенные на $[0, 1]$, а $\{T_m\}_{m=1}^\infty, \{Q_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательности измеримых отображений отрезка $[0, 1]$ на себя, причём

- 1) $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ отличны от нуля почти всюду на $[0, 1]$,
- 2) $T_m \in (B, \alpha)$ и $Q_n \in (B, \alpha)$ ($m, n = 1, 2, \dots$).

Тогда для любого множества $E \subset ([0, 1])$, $\mu E = \delta > 0$ имеет место неравенство

$$\int_E |\varphi_1(T_m x)| |\varphi_2(Q_n x)| dx \geq C(\delta) > 0,$$

где $C(\delta)$ не зависит от m и n .

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$F_m = \{x \in [0, 1]: |\varphi_1(T_m x)| \leq \varepsilon\} = T_m^{-1} \{x \in [0, 1]: |\varphi_1(x)| \leq \varepsilon\}.$$

Отсюда, используя условие 2) леммы 1, получим

$$\mu E_m \leq \alpha \cdot \mu \{x \in [0, 1]: |\varphi_1(x)| \leq \varepsilon\}.$$

Точно так же

$$\mu(G_n) = \mu \{x \in [0, 1]: |\varphi_2(Q_n x)| \leq \varepsilon\} \leq \alpha \cdot \mu \{x \in [0, 1]: |\varphi_2(x)| \leq \varepsilon\}.$$

Выберем и зафиксируем настолько малое значение $\varepsilon = \varepsilon_0(\delta)$, чтобы выполнялись неравенства

$$\mu F_m \leq \frac{\delta}{4}, \quad \mu G_n < \frac{\delta}{4} \quad (m, n = 1, 2, \dots).$$

Этого можно добиться, поскольку по условию 1)

$$\mu \{x \in [0, 1]: |\varphi_i(x)| \leq \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad (i = 1, 2)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Обозначив дополнения множеств $E \cap F_m$ и $E \cap G_n$ в E соответственно через L_m и K_n , будем иметь

$$\mu(L_m \cap K_n) \geq \delta - \left(\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} \right) = \frac{\delta}{2} \quad (m, n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \int_E |\varphi_1(T_m x)| |\varphi_2(Q_n x)| dx &\geq \int_{L_m \cap K_n} |\varphi_1(T_m x)| |\varphi_2(Q_n x)| dx \geq \\ &\geq \varepsilon_0^2(\delta) \cdot \mu(L_m \cap K_n) = \frac{\delta}{2} \cdot \varepsilon_0^2(\delta) > 0. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Классы (B, α) не пусты. Действительно, любое измеримое, сохраняющее меру преобразование отрезка $[0, 1]$ принадлежит классу $(B, 1)$. Отображение $ax + b \pmod{1}$ входит в некоторый класс (B, α) . Более нетривиальным примером является отображение $y = f(x)$ ($0 \leq y \leq 1$), где $f(x)$ — строго монотонная функция, причем $f'(x) > p$ всюду на $[0, 1]$. Это отображение принадлежит классу $(B, \frac{1}{p})$ (см. [6], стр. 196 и [7], стр. 895). Ясно, что суперпозиция отображений из классов (B, α) и (B, β) принадлежит классу (B, α, β) . Для дальнейшего отметим также, что отображение $px + \beta_n$, где n — целое, является сохраняющим меру измеримым преобразованием отрезка $[0, 1]$.

Замечание 2. Очевидно, лемма 1 верна для любого конечного числа функций $\varphi_i(x)$ и последовательностей T_m^i ($i = 1, \dots, s$).

Отметим, что для одного частного случая эта лемма по существу доказана нами в работе [4].

Чтобы сформулировать лемму 2, сделаем несколько обозначений: через $x = (x_1, \dots, x_k)$ будем обозначать точку k -мерного пространства; $n = (n_1, \dots, n_k)$ — точка с целыми положительными координатами; $A_n(x)$ — общий член k -кратного тригонометрического ряда (см. [3], стр. 75). Очевидно

$$A_n(x) = a_n(x^{(1)}) \cdot \cos n_k x_k + b_n(x^{(1)}) \cdot \sin n_k x_k, \quad (1)$$

где $x^{(j)} = (x_1, \dots, x_{k-j})$, $k \geq 2$, $1 \leq j < k$, а $a_n(x^{(1)})$ и $b_n(x^{(1)})$ — общие члены $(k-1)$ -кратного тригонометрического ряда с k -мерными числовыми коэффициентами (например, первое слагаемое в выражении $a_n(x^{(1)})$ имеет вид $a_{n_1, \dots, n_k}^1 \sin n_1 x_1 \dots \sin n_{k-1} x_{k-1}$).

Лемма 2. Из сходимости ряда

$$\sum_{n \geq 0} |a_n(x^{(j)})| \quad (1 \leq j < k)$$

на множестве $G \subset [0, 2\pi] \times \dots \times [0, 2\pi] = [0, 2\pi]^{k-j}$, $\mu G > 0$ следует неравенство

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{l=1}^{2^{k-j}} |a_n^l| < \infty,$$

где a_n^l — числовые коэффициенты в выражении $a_n(x^{(j)})$.

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по размерности пространства.

Пусть $k=2$, тогда по условию леммы ряд

$$\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} a_{n_1, n_2}^1 \cos n_1 x_1 + a_{n_1, n_2}^2 \sin n_1 x_1 \quad (2)$$

абсолютно сходится на $G \subset [0, 2\pi]$, $\mu G > 0$.

Обозначим

$$\rho_{n_1 n_2} = \sqrt{a_{n_1 n_2}^1 + a_{n_1 n_2}^2},$$

$$a_{n_1 n_2}^1 = \rho_{n_1 n_2} \sin \alpha_{n_1 n_2}, \quad a_{n_1 n_2}^2 = \rho_{n_1 n_2} \cos \alpha_{n_1 n_2}.$$

Абсолютная сходимость ряда (2) на G означает, что

$$\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \rho_{n_1 n_2} |\sin(n_1 x_1 + \alpha_{n_1 n_2})| < \infty, \quad x_1 \in G. \quad (3)$$

По теореме Егорова можно найти множество $P \subset G$, $\mu P > 0$, на котором ряд (3) сходится равномерно.

Значит

$$\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \rho_{n_1 n_2} \int_P |\sin(n_1 x_1 + \alpha_{n_1 n_2})| dx < \infty.$$

Из этого неравенства и из леммы 1 (при $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = 1$, $T_n x = nx + \alpha_n \pmod{1}$) следует, что

$$\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \rho_{n_1 n_2} < \infty.$$

А это эквивалентно неравенству

$$\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} |a_{n_1 n_2}^1| + |a_{n_1 n_2}^2| < \infty.$$

Пусть утверждение леммы справедливо для $k = s$. Докажем его справедливость для $k = s + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} a_{n_1, \dots, n_{s+1}}(x_1, \dots, x_{s-j+1}) &= b_{n_1, \dots, n_{s+1}}(x_1, \dots, x_{s-j}) \cdot \cos n_{s-j+1} x_{s-j+1} + \\ &+ c_{n_1, \dots, n_{s+1}}(x_1, \dots, x_{s-j}) \sin n_{s-j+1} x_{s-j+1} = \rho_{n_1, \dots, n_{s+1}}(x_1, \dots, x_{s-j}) \times \\ &\times \sin(n_{s-j+1} x_{s-j+1} + \alpha_{n_1, \dots, n_{s+1}}(x_1, \dots, x_{s-j})). \end{aligned}$$

Пусть, по условию леммы, ряд

$$\sum_{n_1, \dots, n_{s+1}=1}^{\infty} |a_{n_1, \dots, n_{s+1}}(x_1, \dots, x_{s-j+1})|$$

равномерно сходится на множестве $P \subset G \subset R^{s+1}$.

По теореме Фубини множество

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_{s-j}) \in R^{s-j} : \int_0^{2\pi} \chi_P(x_1, \dots, x_{s-j+1}) dx_{s-j+1} > 0 \right\}$$

имеет положительную меру в R^{s-j} , где $\chi_P(x_1, \dots, x_{s-j+1})$ — характеристическая функция множества P .

Пользуясь леммой 1, получаем, что в каждой точке множества Q сходится ряд

$$\sum_{n_1, \dots, n_{s+1}=1}^{\infty} \rho_{n_1, \dots, n_{s+1}}(x_1, \dots, x_{s-j}).$$

Отсюда следует сходимость рядов

$$\sum_{n_1, \dots, n_{s+1}=1}^{\infty} |b_{n_1, \dots, n_{s+1}}(x_1, \dots, x_{s-j})| \text{ и } \sum_{n_1, \dots, n_{s+1}=1}^{\infty} |c_{n_1, \dots, n_{s+1}}(x_1, \dots, x_{s-j})|.$$

По предположению индукции отсюда следует, что

$$\sum_{n_1, \dots, n_{s+1}=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^{s-j}} |b_{n_1, \dots, n_{s+1}}^l| < \infty \text{ и } \sum_{n_1, \dots, n_{s+1}=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^{s-j}} |c_{n_1, \dots, n_{s+1}}^l| < \infty.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Используя (1) и предыдущие рассуждения, заключаем, что из сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |A_n(x)|$$

на множестве положительной меры $E \subset R^k$, вытекает сходимость рядов

$$\sum_{n>0} |a_n(x^{(1)})| \text{ и } \sum_{n>0} |b_n(x^{(1)})|$$

на некотором множестве положительной меры $F \subset R^{k-1}$.

Отсюда, по лемме 2, следует утверждение теоремы.

Для функциональных последовательностей известна следующая

Теорема Привалова. Чтобы система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$ обладала свойством D необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n(x)| dx > 0$$

для всех множеств E с положительной мерой (см. [5], стр. 330).

Пусть $\varphi(x)$ — измеримая, периодическая (с периодом 1) функция, определенная на $[0, 1]$, удовлетворяет условию

$$\int_0^1 |\varphi(x)| dx > 0. \quad (4)$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 2. Чтобы последовательность $\{\varphi(A_n x + B_n)\}_{n=1}^{\infty}$ обладала свойством D необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n| = \infty$ (см. [2], теорему 1). Отсюда, в частности, следует, что система $\varphi(nx)$ обладает свойством D .

Теорема Привалова легко переносится на кратные функциональные последовательности. Для простоты сформулируем ее для последовательности $\{f_n(x) f_m(y)\}_{n,m=1}^{\infty}$, $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Теорема. Чтобы система $\{f_n(x) f_m(y)\}_{n,m=1}^{\infty}$ обладала свойством D необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{\max(n, m) \rightarrow \infty} \iint_E |f_n(x) f_m(y)| dx dy > 0$$

для всех множеств E положительной плоской меры.

Интересно отметить, что для случая систем $\{\varphi(nx) \varphi(my)\}_{n,m=1}^{\infty}$ условие (4) уже не является достаточным для того, чтобы эта система обладала свойством D , в чем легко убедиться построением примера. В этом случае легко доказывается следующая

Теорема 3. Чтобы система $\{\varphi(nx) \varphi(my)\}_{n,m=1}^{\infty}$ обладала свойством D необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(x) \neq 0 \quad \text{почти всюду на } [0, 1]. \quad (5)$$

Необходимость условия (5) очевидна, а достаточность следует из леммы 1.

Отметим еще одно следствие из леммы 1.

Следствие. При условиях леммы 1 система $\{\varphi_1(T_m(f_2(x))) \times \times \varphi_2(Q_n f_2(x))\}_{m,n=1}^{\infty}$ обладает свойством D , если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ($0 \leq f_1, f_2 \leq 1$) — строго монотонные функции, с почти всюду отличными от нуля производными.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 27.1.1975

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍԻԱՆ. Ֆունկցիոնալ ճաշողականությունների D -հատկությունը մասին (ամփոփում)

Հոգիածում բերված է բազմապատիկ եռանկյունաչափական շարքերի համար Լուսինի-Դեն-ժուայի թեորեմի նոր ապացույց, Կրկնակի շարքերի համար այլ մեթոդով դա ապացուցված էր [1]-ում:

Այնուհետև բերված են մի քանի պարզազույն թեորեմներ բազմապատիկ ֆունկցիոնալ հաշողականությունների D -հատկության մասին:

R. A. AVETISIAN. On the D -property sequences of functions (summary)

The paper gives a new proof of Lousin—Denjoy theorem for multiple trigonometrical series. Some simple theorems on the D -property multiple functional sequences are also proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Reva and O. Szász. Some theorems on double trigonometric series, Duke Math. J. 9, 1942, 693—705.

2. *J. R. Mclaughlin*. The Denjoy—Luzin theorem on trigonometric series, *Acta Sci. Math.*, 35, 1973, 123—126.
3. *Л. В. Жижиншвили*. О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов, *УМН*, XXVIII, вып. 2 (170), 1973, 65—119.
4. *Р. А. Аветисян*. О множествах абсолютной сходимости кратных тригонометрических рядов, *Мат. заметки*, 13, вып. 5, 1973, 625—637.
5. *Г. Алексич*. Проблемы сходимости ортогональных рядов, *ИИЛ*, М., 1963.
6. *И. П. Натансон*. Теория функций вещественной переменной, Изд. „Наука“, М., 1974.
7. *Н. К. Бари*. Тригонометрические ряды, М., 1961.