ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

М. Ш. ЦАЛЕНКО

КАТЕГОРИИ СООТВЕТСТВИЙ НАД РЕГУЛЯРНЫМИ КАТЕГОРИЯМИ

Введение

Алгебра бинарных отношений играет все возрастающую роль в универсальной алгебре [10], гомологической алгебре [13], в теории представлений [7] и во многих других разделах математики. В основе использования этой алгебры лежит возможность вложения категорий гомоморфизмов, т. е. отображений, согласованных со структурой объектов, в более широкие категории бинарных отношений, или соответствий, в которых гомоморфизмы обратимы в обычном полугрупповом смысле: для каждого гомоморфизма φ существует такой морфизм ψ, что $\varphi = \varphi\psi\varphi$ и $\psi = \psi\varphi\psi$. В 1962 году Д. Пуппе [15] обнаружил, что категории отношений над абелевыми категориями могут быть описаны аксиоматически и находятся во взаимно однозначном соответствии с абелевыми категориями. В работах автора [19], М. С. Бургина [5], [6], Д. А. Райкова [16] (см. также Х. Бринкман [2], Х. Бринкман, Д. Пуппе [3]) этот результат был перенесен на различные другие классы категорий. Однако, результаты указанных работ неприменимы, в частности, к категориям множеств, множеств с отмеченной точкой, к многообразиям универсальных алгебр без нулевых подалгебр, к различным категориям топологических пространств. В настоящей работе выделен класс регулярных категорий, близких к регулярным категориям в смысле Барра [1], для которых оказывается возможным построить и описать категории соответствий. Регулярные категории охватывают как перечисленные выше категории, кроме категорий топологических пространств, так и рассмотренные в работах [19], [6], [16] классы категорий, кроме γ-категорий М. С. Бургина без произведений. Регулярные категории призваны, по-видимому, играть ту же роль в теории гомотопий, что и абелевы категории в теории гомологий (см. [1], а также [4]).

Работа распадается на две части. В первой части описано построение категорий соответствий над широким классом бикатегорий. Идея такого построения рассказывалась автором несколько лет назад на семинаре по теории категорий в МГУ, содержалась в работе [3] и для бикатегорий с конечными пределами описана в работе Клейна [9]. Оказалась, что исходная категория вкладывается в категорию соответствий в качестве подкатегории всех гомоморфизмов, или собственных морфизмов (точное определение см. в § 2), тогда и только тогда, когда все допустимые эпиморфизмы регулярны (полярны по терминологии, принятой в книге [17]). Для категории множеств устанавливается возможность построения двух неизоморфных категорий соответствий, в то время, как для категории топологических пространств устанавливается невозможность вложения в категорию соответствий в качестве подкатегории всех собственных морфизмов. Проведенное исследование позволяет выделить класс регулярных категорий.

Вторая часть работы посвящена аксиоматической теории класса категорий с инволюцией, который оказывается классом категорий соответствий над регулярными категориями. Переход к общим категориям с инволюцией позволяет установить, в частности, большинство общих фактов об отображениях, гомоморфизмах, бинарных отношениях, которые составляют введение в любой курс универсальной алгебры (ср. [10], гл. 1, §§ 2, 3, или [11], гл. 1, или [14], гл. 1, § 1). Результаты первой и второй частей в совокупности устанавливают между регулярными категориями и их категориями соответствий взаимно однозначное соответствие. Как следствие результатов настоящей работы и работы Барра [1] устанавливается возможность представления категорий соответствий над малыми регулярными категориями бинарными отношениями множеств.

Терминология и обозначения следуют книге [17], отступления оговорены в тексте.

§ 1. Построение категорий соответствий

1.1. Подобъекты пары объектов. Вводимое ниже понятие подобъекта пары объектов произвольной категории является частным случаем общего определения подобъекта семейства объектов, данного автором в работе [18].

Пусть $\mathbf{K}$ — произвольная категория. Для фиксированной пары объектов $A, B \in \mathbf{K}$ через $P(A, B)$ обозначим класс пар морфизмов (α, β) с общим началом X и с концами в A и в B соответственно. Будем говорить, что пара $(\alpha, \beta) \in P(A, B)$ *делится справа* на пару $(\alpha', \beta') \in P(A, B)$ и писать $(\alpha, \beta) = \gamma(\alpha', \beta')$, если $\alpha = \gamma\alpha'$, $\beta = \gamma\beta'$ для некоторого морфизма γ; морфизм γ называется левым делителем пары (α, β). Две пары (α, β) и (α', β') из $P(A, B)$ *эквивалентны*, если $\alpha = \gamma\alpha'$, $\beta = \gamma\beta'$ для некоторого изоморфизма γ. Пара (α, β) называется *разделяющей*, если из равенств $\varphi\alpha = \psi\alpha$, $\varphi\beta = \psi\beta$ вытекает равенство $\varphi = \psi$.

Если разделяющая пара (α, β) делится справа на разделяющую пару (α', β'), то говорят, что (α, β) *предшествует* (α', β'). В этом случае равенства $\alpha = \gamma\alpha'$, $\beta = \gamma\beta'$ однозначно определяют морфизм γ, который к тому же является мономорфизмом. Две разделяющие пары предшествуют друг другу тогда и только тогда, когда они эквивалентны. Класс эквивалентных разделяющих пар называется *подобъектом пары объектов* A, B и обозначается $(\alpha, \beta]$ или $(X, \alpha, \beta]$, где $\alpha \in H(X, A)$, $\beta \in H(X, B)$. Отношение предшествования разделяющих пар, очевидно, индуцирует отношение частичного порядка между подобъектами пары A, B.

Пусть $\mathbf{K} = (\mathbf{K}, \mathbf{E}\mathfrak{M})$ — бикатегория. Подобъект $(\alpha, \beta]$ пары объектов A, B называется *допустимым*, если у пары α, β нет левых делителей из $\mathbf{E} \setminus Iso\,\mathbf{K}$; класс допустимых подобъектов обозначается $S_p(A, B)$.

1.2. Допустимые разложения пар морфизмов. Пусть $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ — бикатегория. Для каждой пары объектов A, B зафиксируем класс $R(A, B)$ подобъектов вида $(\mu\alpha, \mu\beta)$, где $\mu \in \mathfrak{M}$ и $(\alpha, \beta] \in S_p(A, B)$. В силу замкнутости $\mathfrak{M}$ относительно умножения класс $R(A, B)$ вместе с подобъектом $(\gamma, \delta]$, содержит подобъекты $(\tau\gamma, \tau\delta]$, где $\tau \in \mathfrak{M}$.

Будем говорить, что бикатегория $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ является бикатегорией *с каноническими разложениями*, если выполнены следующие два условия:

a) всякая пара $(\alpha, \beta) \in P(A, B)$ разлагается в произведение $(\alpha, \beta) = \nu(\alpha', \beta')$, где $\nu \in \mathbf{E}$, $(\alpha', \beta'] \in R(A, B)$;

b) если $(\alpha, \beta) = \nu(\alpha', \beta') = \rho(\alpha'', \beta'')$, где $\nu, \rho \in \mathbf{E}$, $(\alpha', \beta']$, $(\alpha'', \beta''] \in R(A, B)$, то существует такой изоморфизм ξ, что $\rho = \nu\xi$.

Отметим, что пары (α', β') и (α'', β''), фигурирующие в условии 2), связаны равенством $(\alpha', \beta') = \xi(\alpha'', \beta'')$ и поэтому $(\alpha', \beta'] = (\alpha'', \beta'']$. Этот подобъект будет обозначаться $\mathrm{Im}(\alpha, \beta)$.

Лемма 1.1. *Пусть* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ — *бикатегория с каноническими разложениями. Если* $(\alpha, \beta) = \varphi(\gamma, \delta)$, (α, β), $(\gamma, \delta) \in P(A, B)$, *то* $\mathrm{Im}(\alpha, \beta) \leqslant \mathrm{Im}(\gamma, \delta)$.

Доказательство. Пусть $(\gamma, \delta) = \rho(\gamma', \delta')$, где $\rho \in \mathbf{E}$, $(\gamma', \delta'] \in R(A, B)$, $\varphi\rho = \nu\mu$, $\nu \in \mathbf{E}$, $\mu \in \mathfrak{M}$. Тогда $(\alpha, \beta) = \varphi(\gamma, \delta) = \varphi\rho(\gamma', \delta') = \nu(\mu\gamma', \mu\delta')$, откуда $\mathrm{Im}(\alpha, \beta) = (\mu\gamma', \mu\delta'] \leqslant (\gamma', \delta'] = \mathrm{Im}(\gamma, \delta)$.

Лемма 1.2. *Пусть* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ — *бикатегория с каноническими разложениями. Если* $(\alpha, \beta) = \varphi(\gamma, \delta)$ *и* $(\alpha, \beta]$, $(\gamma, \delta] \in R(A, B)$, *то* $\varphi \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть $\varphi = \rho\tau$, $\rho \in \mathbf{E}$, $\tau \in \mathfrak{M}$. Тогда $(\alpha, \beta) = 1 \times (\alpha, \beta) = \varphi(\gamma, \delta) = \rho(\tau\gamma, \tau\delta)$. Поскольку $(\alpha, \beta]$, $(\tau\gamma, \tau\delta] \in R(A, B)$, 1, $\rho \in \mathbf{E}$, то в силу условия 2) $\rho \in Iso\,\mathbf{K}$. Следовательно, $\varphi = \rho\tau \in \mathfrak{M}$.

Категория $\mathbf{K}$ называется категорией *с регулярными кообразами*, если всякий морфизм $\alpha \in \mathbf{K}$ обладает разложением $\alpha = \nu\mu$, где ν — регулярный эпиморфизм, μ — мономорфизм. В книге [17] показано, что категория $\mathbf{K}$ с регулярными кообразами является бикатегорией $(\mathbf{K}, \mathbf{E}_r, \mathrm{Mon}\,\mathbf{K})$, где $\mathbf{E}_r$ — класс регулярных эпиморфизмов.

---

* Регулярные эпиморфизмы в книге [17] называются полярными. Эпиморфизм ν регулярен, если всякий морфизм γ, для которого из равенства $\alpha\nu = \beta\nu$ всегда следует $\alpha\gamma = \beta\gamma$, представим в виде $\gamma = \nu\gamma'$.

Лемма 1.3. *Пусть бикатегория* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ *удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathbf{E} \cap \mathrm{Mon}\,\mathbf{K} = \mathrm{Iso}\,\mathbf{K}$;

2) $\mathbf{E} = \mathbf{E}_r$;

3) $\mathbf{K}$ *замкнута относительно конечных произведений*;*

4) *для каждой пары морфизмов* $\rho \in \mathbf{E}$, $\mu \in \mathfrak{M}$ *с общим началом существует универсальный квадрат.*

Тогда для любой пары объектов $A, B \in \mathbf{K}$ $R(A, B) = S_p(A, B)$.

Доказательство. 1). Докажем, что всякий подобъект $(\alpha, \beta]$ пары A, B является допустимым. Пусть $(\alpha, \beta) = \rho(\alpha', \beta')$, где $\rho \in \mathbf{E}'$. Тогда, как легко видеть, $\rho \in \mathrm{Mon}\,\mathbf{K}$ и по условию 1) $\rho \in \mathrm{Iso}\,\mathbf{K}$, откуда $(\alpha, \beta] \in S_p(A, B)$;

2). Если $\mathbf{E} = \mathbf{E}_r$, то по лемме V. 2. 2 книги [17] $\mathbf{E}_r \cap \mathrm{Mon}\,\mathbf{K} = \mathrm{Iso}\,\mathbf{K}$, и остается сослаться на доказанное выше.

3). Сопоставим каждому $(\alpha, \beta] \in S_p(A, B)$ подобъект $(\alpha \times \beta] \in S_p(A \times B)$. Без труда проверяется, что это сопоставление биективно. Если $\mu \in \mathfrak{M}$, то $\mu(\alpha \times \beta) \in \mathfrak{M}$, и поэтому $(\mu\alpha, \mu\beta] \in S_p(A, B)$.

4). Пусть $(\alpha, \beta] \in S_p(A, B)$, $\mu \in \mathfrak{M}$ и $(\mu\alpha, \mu\beta) = \rho(\alpha', \beta')$, где $\rho \in \mathbf{E}$. Если $\mu\rho' = \rho\mu'$, где ρ' и μ' — морфизмы, входящие в универсальный квадрат относительно ρ и μ, то из равенства $\mu\alpha = \rho\alpha'$ вытекает существование такого φ, что $\alpha = \rho'\varphi$, а из равенства $\mu\beta = \rho\beta'$ вытекает существование такого ψ, что $\beta = \rho'\psi$. Отсюда $(\alpha, \beta) = \rho'(\varphi, \psi)$. Известно, что $\rho' \in \mathbf{E}$, поскольку $\rho \in \mathbf{E}$. Но $(\alpha, \beta] \in S_p(A, B)$. Значит, $\rho' \in \mathrm{Iso}\,\mathbf{K}$. Из равенства $\mu\rho' = \rho\mu'$ теперь следует, что $\mu = \rho(\mu'\rho'^{-1})$. По свойствам бикатегории $\rho \in \mathfrak{M}$, и, следовательно, $\rho \in \mathrm{Iso}\,\mathbf{K}$. Таким образом, $(\mu\alpha, \mu\beta] \in S_p(A, B)$.

Следующая диаграмма с коммутативными квадратами изображает бикатегорию, в которой утверждение леммы 1.3 не выполнено:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mu \in \mathfrak{M}"] \arrow[d, "\rho \in E"'] & R \arrow[dd, "\beta \in E"] \arrow[dr, "\alpha \in E"] & \\
Y \arrow[rr, "\alpha' \in \mathfrak{M}"] \arrow[dr, "\beta' \in \mathfrak{M}"'] & & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Именно, $(\alpha, \beta] \in S_p(A, B)$, $(\mu\alpha, \mu\beta] \in R(A, B]$, но $(\mu\alpha, \mu\beta] \bar{\in} S_p(A, B)$.

Лемма 1.4. *Категория* $\mathbf{K}$ *с регулярными кообразами обладает каноническими разложениями, если выполнено условие* а).

---

* Прямых произведений по терминологии книги [17].

Доказательство. Пусть $(\alpha, \beta) = \nu(\alpha', \beta') = \rho(\alpha'', \beta'')$, где $\nu, \rho \in \mathbf{E}_r$, $(\alpha', \beta']$, $(\alpha'', \beta''] \in S_p(A, B)$. Если $\varphi\nu = \psi\nu$, то $\varphi\nu\alpha' = \psi\nu\alpha' = (\varphi\rho)\,\alpha'' = (\psi\rho)\,\alpha''$ и аналогично $(\varphi\rho)\,\beta'' = (\psi\rho)\,\beta''$. Поскольку пара (α'', β'') — разделяющая, $\varphi\rho = \psi\rho$. Так как ν — регулярный эпиморфизм, то $\rho = \nu\xi$. По симметрии $\nu = \rho\xi'$ откуда $\xi' = \xi^{-1}$, и лемма доказана.

Лемма 1.5. *Бикатегория* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ *с конечными произведениями обладает каноническими разложениями.*

Доказательство. Каждая пара морфизмов $(\alpha, \beta) \in P(A, B)$ однозначно определяется морфизмом $\gamma = \alpha \times \beta$ с концом $A \times B\,(\pi_1, \pi_2)$. Если $\gamma = \nu\mu$, $\nu \in \mathbf{E}$, $\mu \in \mathfrak{M}$, то $(\alpha, \beta) = \nu(\alpha', \beta')$, где $\alpha' = \mu\pi_1$, $\beta' = \mu\pi_2$. В доказательстве утверждения 3) леммы 1.3 отмечалось, что подобъект $(\alpha', \beta']$ допустим, поскольку $\mu \in \mathfrak{M}$. Если $(\alpha, \beta) = \rho(\alpha'', \beta'')$, где $\rho \in \mathbf{E}$, $(\alpha'', \beta''] \in S_p(A, B)$ — второе разложение пары (α, β), то $\gamma = \alpha \times \beta = \rho\alpha'' \times \rho\beta'' = \rho(\alpha'' \times \beta'') = \nu\mu$, откуда $\rho = \nu\xi$, где $\xi \in \operatorname{Iso} \mathbf{K}$, ибо $\alpha'' \times \beta'' \in \mathfrak{M}$.

Следующая теорема усиливает и уточняет известный результат Исбелла [12]. Поскольку в дальнейшем она не используется, доказательство опускается.

Теорема 1.6. *Пусть категория* $\mathbf{K}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *всякая пара морфизмов* $\varphi, \psi \in H(A, B)$, *обладающая правым уравнителем, имеет коядро;*

2) *для каждого объекта* $A \in \mathbf{K}$ *экстремальные факторобъекты образуют множество;*

3) *всякая диаграмма вида*

$$A_0 \xrightarrow{\nu_0} A_1 \xrightarrow{\nu_1} \cdots A_\alpha \xrightarrow{\nu_\alpha} \cdots,$$

состоящая из экстремальных эпиморфизмов, имеет прямой предел.

Тогда категория $\mathbf{K}$ *является бикатегорией* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \operatorname{Mon} \mathbf{K})$, *где* $\mathbf{E}$ — *класс экстремальных эпиморфизмов, обладающей каноническими разложениями.*

1.3. Умножение пар морфизмов. Предположим, что в категории $\mathbf{K}$ каждая пара морфизмов $\alpha\colon A \to C$, $\beta\colon B \to C$ обладает коуниверсальным квадратом. Поскольку коуниверсальный квадрат для данной пары α, β определен с точностью до изоморфизма, с помощью аксиомы выбора зафиксируем для каждой пары α, β коуниверсальный квадрат, который будет обозначаться $[\varphi, \alpha, \beta, \psi]$, где $\varphi\alpha = \psi\beta$. Пара (φ, ψ) определяет подобъект $(\varphi, \psi]$ пары объектов A, B. Этот подобъект допустим в любой бикатегорной структуре категории $\mathbf{K}$, если таковые существуют. В частности, пара (δ_1, δ_2), входящая в коуниверсальный квадрат $[\delta_1, \alpha, \alpha, \delta_2]$, называется *ядерной парой* морфизма $\alpha\colon A \to C$ и обозначается $\operatorname{Ker} \alpha$. Она определяет допустимый подобъект $(\delta_1, \delta_2]$ пары объектов A, A, который обозначается $\operatorname{Ker} \alpha$.

Отметим, что морфизмы δ_1 и δ_2 обладают общим левым обратным и поэтому являются регулярными эпиморфизмами; кроме того, отсюда следует, что для любого α $\operatorname{Ker}\alpha \geqslant (1_A,\ 1_A]$.

В классе всех пар морфизмов категории $\mathbf{K}$ с общим началом следующим образом можно ввести частичное умножение: если $(\alpha,\ \beta) \in P(A,\ B)$, $(\gamma,\ \delta) \in P(B,\ C)$ и $[\varphi,\ \beta,\ \gamma,\ \psi]$—коуниверсальный квадрат, то

$$(\alpha,\ \beta) \circ (\gamma,\ \delta) = (\varphi\alpha,\ \psi\delta).$$

Лемма 1.7. *Эквивалентность пар является конгруэнцией относительно частичного умножения. Если* $(\alpha,\ \beta) \in P(A,\ B)$, $(\gamma,\ \delta) \in P(B,\ C)$, $(\varepsilon,\ \varkappa) \in P(C,\ D)$, *то произведения* $((\alpha,\ \beta) \circ (\gamma,\ \delta)) \circ (\varepsilon,\ \varkappa)$ *и* $(\alpha,\ \beta) \circ ((\gamma,\ \delta) \circ (\varepsilon,\ \varkappa))$ *эквивалентны.*

Доказательство основано на формальном использовании свойств коуниверсальных квадратов.

1.4. Дополнительные аксиомы. Начиная с этого момента, предполагается, что рассматриваемые категории являются бикатегориями. Формулируемые ниже аксиомы выделяют класс бикатегорий, для которых оказывается возможным построить категорию соответствий.

Аксиома (С1). Для каждой пары объектов A, B из $\mathbf{K}$ допустимые подобъекты этой пары образуют множество.

Аксиома (С2). Бикатегория $(\mathbf{K},\ \mathbf{E},\ \mathfrak{M})$ обладает каноническими разложениями.

Аксиома (С3). Для каждой пары морфизмов с общим концом существует коуниверсальный квадрат.

Аксиома (С4). Если в коуниверсальном квадрате $[\varphi,\ \alpha,\ \beta,\ \psi]$ $\alpha \in \mathbf{E}$, то $\psi \in \mathbf{E}$.

Лемма 1.8. *Бикатегория* $(\mathbf{K},\ \mathbf{E},\ \mathfrak{M})$, *в которой выполнена аксиома* (С1), *является локально малой слева бикатегорией. Локально малая слева бикатегория с конечными произведениями удовлетворяет аксиомам* (С1) *и* (С2).

Доказательство. Каждому допустимому мономорфизму $\mu\colon U \to A$ сопоставим подобъект $(\mu,\ \mu]$ пары объектов A, A. Этот подобъект допустим, ибо всякий эпиморфный левый делитель допустимого мономорфизма является изоморфизмом. Пусть $\sigma\colon V \to A$ — второй мономорфизм и пусть $(\mu,\ \mu] = (\sigma,\ \sigma]$. Значит, $\sigma = \xi\mu$ для некоторого $\xi \in \operatorname{Iso}\mathbf{K}$, т. е. подобъекты $(U,\ \mu]$ и $(V,\ \sigma]$ совпадают. Обратно, если $\sigma = \xi\mu$, $\xi \in \operatorname{Iso}\mathbf{K}$, то $(\sigma,\ \sigma) = \xi(\mu,\ \mu)$, откуда $(\sigma,\ \sigma] = (\mu,\ \mu]$. Таким образом, допустимые подобъекты объекта A находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножеством множества $S_p(A,\ A)$, что и доказывает первое утверждение леммы. Второе утверждение вытекает из доказательства леммы 1.3.

Следствие 1.9. *Если в бикатегории* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ *выполнена аксиома* (С1), *то классы* $R(A, B)$, $A, B \in Ob\,\mathbf{K}$ *являются множествами.*

Следующий результат доказан в [17].

Лемма 1.10. *Бикатегория* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ *с конечными произведениями тогда и только тогда удовлетворяет аксиоме* (С3), *когда допустимые подобъекты любого объекта образуют полуструктуру по пересечениям.*

1.5. Слабая эквивалентность пар морфизмов.

Пусть в бикатегории $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ выполнена аксиома (С2). Пары морфизмов (α, β), $(\gamma, \delta) \in P(A, B)$ назовом *слабо эквивалентными*, $(\alpha, \beta) \overset{s}{\sim} (\gamma, \delta)$, если $\mathrm{Im}(\alpha, \beta) = \mathrm{Im}(\gamma, \delta)$. Рефлексивность, симметричность и транзитивность слабой эквивалентности очевидны. Эквивалентные пары морфизмов слабо эквивалентны. Если $(\alpha, \beta) = \nu(\alpha', \beta')$, где $\nu \in \mathbf{E}$, то в силу аксиомы (С2), пары (α, β) и (α', β') слабо эквивалентны: каноническое разложение для (α, β) получается из канонического разложения для (α', β') умножением слева на ν, что не меняет $\mathrm{Im}(\alpha', \beta')$.

Теорема 1.11. *Пусть бикатегория* $\mathbf{K} = (\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ *удовлетворяет аксиомам* (С2) *и* (С3). *Слабая эквивалентность пар морфизмов является конгруенцией относительно умножения пар морфизмов тогда и только тогда, когда выполнена аксиома* (С4).

Доказательство. Необходимость. Пусть дан коуниверсальный квадрат $[\varphi, \alpha, \beta, \psi]$, в котором $\alpha \in \mathbf{E} \cap H(A, B)$, $\beta \in H(C, B)$. Тогда $(\alpha, \alpha) \circ (\beta, 1) = (\varphi\alpha, \psi)$. Пара $(\alpha, \alpha) = \alpha(1_B, 1_B)$ слабо эквивалентна паре $(1_B, 1_B)$. Поэтому $(\varphi\alpha, \psi) = (\alpha, \alpha) \circ (\beta, 1) \overset{s}{\sim} (1_B, 1_B) \circ$ $\circ (\beta, 1_C) \overset{s}{\sim} (\beta, 1_C)$. Но $\mathrm{Im}(\beta, 1_C) = (\beta, 1_C]$. Поэтому существует такой морфизм $\rho \in \mathbf{E}$, что $\psi\alpha = \rho\beta$, $\psi = \rho 1_C = \rho$, т. е. $\psi \in \mathbf{E}$, и аксиома (С4) выполнена.

Для доказательства достаточности аксиомы (С4) установим следующую лемму.

Лемма 1.12. *Если в категории* $\mathbf{K}$ *выполнена аксиома* (С3), *то всякая диаграмма вида*

$$\begin{tikzcd}
 & & \bullet \arrow[d, "\rho"] \\
 & & \bullet \arrow[d, "\delta"] \\
\bullet \arrow[r, "\gamma"] & \bullet \arrow[r, "\beta"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

вкладывается в коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\lambda"'] & \bullet \arrow[r, "\eta_2"] \arrow[d, "\eta_1"] & \bullet \arrow[d, "\rho"] \\
\bullet \arrow[r, "\theta_2"] \arrow[d, "\theta_1"'] & \bullet \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] & \bullet \arrow[d, "\gamma"] \\
\bullet \arrow[r, "\nu"] & \bullet \arrow[r, "\beta"] & \bullet
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

в которой все квадраты и прямоугольники коуниверсальны. Если в K *выполнена аксиома* (C4) *и если* $\nu, \rho \in$ E, *то морфизм* $\lambda\theta_2 = \varkappa\eta_1$ *принадлежит* E.

Доказательство. Диаграмма (1) строится путем четырехкратного применения аксиомы (C3). Коуниверсальность вертикальных и горизонтальных прямоугольников этой диаграммы доказана, например, в [17], лемма 1.7.5. Поэтому остается установить коуниверсальность внешнего квадрата.

Пусть $\alpha_1(\nu\beta) = \alpha_2(\rho\gamma)$, или $(\alpha_1\nu)\beta = (\alpha_2\rho)\gamma$. В силу коуниверсальности нижнего правого квадрата диаграммы (1) существует однозначно определенный морфизм ε, для которого $\alpha_1\nu = \varepsilon\varphi$, $\alpha_2\rho = \varepsilon\psi$. В силу коуниверсальности нижнего левого и верхнего правого квадратов существуют однозначно определенные морфизмы ε_1 и ε_2, для которых $\varepsilon_1\theta_1 = \alpha_1$, $\varepsilon_1\theta_2 = \varepsilon = \varepsilon_2\eta_1$, $\varepsilon_2\eta_2 = \alpha_2$. Наконец, в силу коуниверсальности верхнего левого квадрата $\varepsilon_1 = \xi\lambda$, $\varepsilon_2 = \xi\varkappa$ для единственного ξ. Отсюда $\alpha_1 = \varepsilon_1\theta_1 = \xi(\lambda\theta_1)$, $\alpha_2 = \varepsilon_2\eta_2 = \xi(\varkappa\eta_2)$.

Для доказательства единственности морфизма ξ покажем, что пара $(\lambda\theta_1, \varkappa\eta_2)$ разделяющая. Пусть $\gamma_1(\lambda\theta_1) = \gamma_2(\lambda\theta_1)$, $\gamma_1(\varkappa\eta_2) = \gamma_2(\varkappa\eta_2)$. Покажем, что $\gamma_1\lambda\theta_2 = \gamma_2\lambda\theta_2$. Действительно,

$$(\gamma_1\lambda\theta_2)\varphi = \gamma_1\lambda\theta_1\nu = \gamma_2\lambda\theta_1\nu = (\gamma_2\lambda\theta_2)\varphi,$$

$$(\gamma_1\lambda\theta_2)\psi = \gamma_1\varkappa\eta_2\rho = \gamma_2\varkappa\eta_2\rho = (\gamma_2\lambda\theta_2)\psi.$$

Поскольку пара (φ, ψ) — разделяющая (см. п. 1.3), $\gamma_1\lambda\theta_2 = \gamma_2\lambda\theta_2$. Поскольку пара (θ_1, θ_2) — разделяющая, $\gamma_1\lambda = \gamma_2\lambda$. По симметрии $\gamma_1\varkappa = \gamma_2\varkappa$. Отсюда $\gamma_1 = \gamma_2$, что и требовалось доказать.

Последнее утверждение леммы очевидно.

Докажем теперь достаточность условий теоремы 1.11. Пусть $(\alpha, \beta) \in P(A, B)$, $(\gamma, \delta) \in P(B, C)$ и пусть $\operatorname{Im}(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta']$, $\operatorname{Im}(\gamma, \delta) = (\gamma', \delta']$. Значит, $(\alpha, \beta) = \nu(\alpha', \beta')$, $(\gamma, \delta) = \rho(\gamma', \delta')$, где $\nu, \rho \in$ E. Диаграмма (1), в которой β и γ нужно заменить на β' и γ'. Лемма 1.12 и замечания, сделанные после определения слабой эквивалентности, позволяют установить следующую последовательность соотношений:

$$(\alpha', \beta') \circ (\gamma', \delta') = (\varphi\alpha', \psi\delta') \overset{s}{\sim} (\lambda\theta_2\varphi\alpha', \varkappa\tau_1\psi\delta') =$$
$$= (\lambda\theta_1\nu\alpha', \varkappa\tau_2\rho\delta') \sim (\nu\alpha', \nu\beta') \circ (\rho\gamma', \rho\delta') = (\alpha, \beta) \circ (\gamma, \delta).$$

Поскольку пары (α', β') и (γ', δ') определены с точностью до эквивалентности, которая является конгруэнцией относительно умножения пар морфизмов, соотношение $(\alpha', \beta') \circ (\gamma', \delta') \overset{s}{\sim} (\alpha, \beta) \circ (\gamma, \delta)$ доказывает теорему.

Следствие 1.13. *Если бикатегория* $\mathbf{K} = (\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ *удовлетворяет аксиомам* (C1)—(C4), *то объекты категории* $\mathbf{K}$, *вместе с множествами* $R(A, B)$, *в качестве морфизмов, образуют категорию соответствий* $\mathbf{R}(\mathbf{K})$ *над* $\mathbf{K}$, *умножение в которой задается правилом*:

$$(\alpha, \beta] \circ (\gamma, \delta] = \mathrm{Im}\,((\alpha, \beta) \circ (\gamma, \delta)).$$

Теорема 1.11 и следствие 1.13 содержат в себе, в частности, результаты работы А. Клейна [9].

Замечание. Если в диаграмме (1) отбросить морфизмы β и γ, то оставшаяся часть может рассматриваться как обобщение „Kommaconstruction" Ловера (см., напр., [21], стр. 22).

1.6. Примеры категорий, удовлетворяющих аксиомам (C1)—(C4).

1. Любое предмногообразие $\mathbf{A}$ универсальных алгебр является локально малой бикатегорией $\mathbf{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{E}_r, \mathrm{Mon}\,\mathbf{A})$ с произведениями и поэтому удовлетворяет аксиомам (C1)—(C3) в силу лемм 1.3 и 1.5. Регулярные эпиморфизмы категории $\mathbf{A}$—это в точности сюръективные гомоморфизмы. Известно, что коуниверсальный квадрат относительно гомоморфизмов $\alpha: A \to C$, $\beta: B \to C$ можно построить как подалгебру U произведения $A \times B$ (π_1, π_2), состоящую из всех пар (a, b), для которых $a\alpha = b\beta$, вместе с гомоморфизмами $\varphi = \pi_1|u : U \to A$, $\psi = \pi_2|u: U \to B$. Если α — сюръективный гомоморфизм, то для всякого $b \in B$ существует такой элемент $a \in A$, что $a\alpha = b\beta$. Поэтому ψ—сюръективный гомоморфизм, т. е. в категории $\mathbf{A}$ выполнена аксиома (C4). В частности, категория множеств $\mathbf{S}$ удовлетворяет аксиомам (C1)—(C4).

Без труда проверяется, что категория $\mathbf{R}(\mathbf{A})$ для предмногообразия $\mathbf{A}$ совпадает с категорией бинарных отношений.

2. Любая категория функторов $\mathbf{F}(\mathbf{V}, \mathbf{K})$ из малой категории $\mathbf{V}$ в бикатегорию $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$, удовлетворяющую аксиомам (C1)—(C4), также удовлетворяет аксиомам (C1)—(C4), если в качестве допустимых эпиморфизмов (мономорфизмов) выбрать также естественные преобразования φ, для которых $\varphi_D \in \mathbf{E}$ $(\varphi_D \in \mathfrak{M})$ при любом $D \in Ob\mathbf{V}$.

3. Любая полуструктура по пересечениям P, рассматриваемая как категория, является бикатегорией $P = (P, \mathrm{Iso}\,P, \mathrm{Mor}\,P)$, удовлетворяющей аксиомам (C1)—(C4). Полуструктура P может рассматриваться также как коммутативная полугруппа идемпотентов. Легко проверить, что категория $\mathbf{R}(P)$ совпадает с разверткой полугруппы

P [20]: развертка состоит из троек (a, b, c), $a, b, c \in P$, $b \leqslant a$, $b \leqslant c$, умножение которых задается правилом

$$(a, b, c) \circ (c, d, e) = (a, b \cap d, e).$$

4. В категории топологических пространств $\mathbf{T}$ существует бикатегорная структура $(\mathbf{T}, \mathbf{E}_r, \mathrm{Mon}\, \mathbf{T})$, удовлетворяющая аксиомам (C1)—(C3), но не удовлетворяющая, как показал Г. Келли [8], аксиоме (C4). С другой стороны, в категории $\mathbf{T}$ существует вторая бикатегорная структура $(\mathbf{T}, \mathrm{Epi}\, \mathbf{T}, \mathfrak{M}_r)$, где $\mathfrak{M}_r$ — класс регулярных мономорфизмов, совпадающий с классом гомеоморфных вложений, которая удовлетворяет всем аксиомам (C1)—(C4). Однако, категория $\mathbf{R}(\mathbf{T})$, построенная относительно второй бикатегорной структуры, как нетрудно видеть, эквивалентна категории $\mathbf{R}(\mathbf{S})$ и поэтому не представляет интереса.

1.7. Дуализация. Двойственным к понятию (допустимого) подъобъекта пары объектов A, B является понятие (допустимого) факторобъекта пары A, B как класса эквивалентных плотных пар морфизмов $\alpha: A \to X$, $\beta: B \to X$ (не имеющих правых делителей в $\mathfrak{M} \setminus \mathrm{Iso}\, \mathbf{K}$ в случае бикатегории). При выполнении в $\mathbf{K}$ аксиом (C1*) — (C4*), двойственных (C1)—(C4), можно построить категорию $\mathbf{R}'(\mathbf{K})$ косоответствий над $\mathbf{K}$. Категория множеств $\mathbf{S}$ удовлетворяет (относительно своей единственной бикатегорной структуры) как аксиомам (C1)—(C4), так и аксиомам (C1*)—(C4*). Выполнение аксиом (C1*)—(C3*) вытекает из локальной малости справа, существование копроизведений* и объединений факторобъектов любого объекта. Установим выполнение аксиомы (C4*). Пусть $\mu: C \to A$—инъективное отображение, $\beta: C \to B$—любое отображение. Пусть $D = (A \setminus C\mu) * B$ и $\psi_1: A \setminus C\mu \to D$, $\psi: B \to D$ — соответствующие вложения. Положим

$$a\varphi = \begin{cases} a\psi_1, & \text{если } a \in A \setminus C\mu; \\ c\beta\psi, & \text{если } a = c\mu. \end{cases}$$

Отображение φ корректно, ибо μ — инъективное отображение. Ясно, что $\mu\varphi = \beta\psi$. Без труда проверяется универсальность построенного квадрата. По построению ψ—инъективное отображение, т. е. аксиома (C4*) выполнена. Следовательно, для категории $\mathbf{S}$ можно построить категорию $\mathbf{R}'(\mathbf{S})$ косоответствий. В § 2 будет показано, что категории $\mathbf{R}(\mathbf{S})$ и $\mathbf{R}'(\mathbf{S})$ неизоморфны.

Любая абелева категория $\mathbf{U}$ тоже удовлетворяет аксиомам (C1*) и (C4*), однако категории $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ и $\mathbf{R}'(\mathbf{U})$ оказываются изоморфными.

§ 2. Категории соответствий как категории с инволюцией

2.1. Собственные морфизмы категорий с инволюцией. Напомним [15], что категория $\mathbf{R}$ называется категорией с ин-

---

* Свободных произведений по терминологии книги [17].

волюцией, или I-категорией, если каждое множество $H_{\mathbf{R}}(A, B)$ частично упорядочено отношением $\subset$ и если каждому морфизму $\alpha \in H_{\mathbf{R}}(A, B)$ сопоставлен морфизм $\alpha^* \in H_{\mathbf{R}}(B, A)$, причем выполнены следующие условия:

a) $(\alpha^*)^* = \alpha$; b) $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$; c) если $\alpha \subset \beta$, то $\alpha^* \subset \beta^*$; d) если $\alpha \subset \beta$ то $\gamma\alpha \subset \gamma\beta$ для любого γ. Отображение $\alpha \to \alpha^*$ называется инволюцией. В категориях с инволюцией действует следующий усиленный принцип двойственности [20]: если утверждение P справедливо, то двойственное утверждение P^*, полученное из P перестановкой множителей во всех входящих в P произведениях морфизмов и с сохранением логической структуры, включая отношение порядка и инволюцию, также справедливо. Детальное рассмотрение явлений двойственности в I-категориях дано в [2].

Зафиксируем I-категорию $\mathbf{R}$. Морфизм $\alpha \in H_{\mathbf{R}}(A, B)$ назовем *D-регулярным*, если

$$\alpha\alpha^* \supset 1_A; \tag{2}$$

I-регулярным, если

$$\alpha^*\alpha \subset 1_B. \tag{3}$$

Двойственно определяются *B* и *K-регулярные* морфизмы.

Лемма 2.1. *D-регулярные морфизмы категории* $\mathbf{R}$ *образуют подкатегорию.*

Доказательство. Поскольку $1^* = 1$ (см. [15]); $11^* = 1$. Если для α и β выполнено условие (2), то в силу монотонности умножения $(\alpha\beta)(\alpha\beta)^* = \alpha(\beta\beta^*)\alpha^* \supset \alpha\alpha^* \supset 1$.

Аналогично доказывается

Лемма 2.2. *I-регулярные морфизмы категории* $\mathbf{R}$ *образуют подкатегорию.*

D I-регулярные морфизмы будут называться *собственными*. Ввиду предыдущих лемм собственные морфизмы образуют подкатегорию $\mathbf{P}(\mathbf{R})$ категории $\mathbf{R}$. Собственный морфизм μ назовем *инъекцией*, если

$$\mu\mu^* = 1. \tag{4}$$

Собственный морфизм ν назовем *проекцией*, если

$$\nu^*\nu = 1. \tag{5}$$

Без труда проверяется, что инъекции образуют подкатегорию $\mathrm{In}\,\mathbf{R}$ категории $\mathbf{R}$, а проекции образуют подкатегорию $P_r\mathbf{R}$ категории $\mathbf{R}$. Из (4) и (5) следует, что $\mathrm{In}\,\mathbf{R} \cap P_r\mathbf{R} \subseteq \mathrm{Iso}\,\mathbf{R}$.

Лемма 2.3. *Если* $\alpha \in \mathrm{Iso}\,\mathbf{P}(\mathbf{R})$, *то* $\alpha^{-1} = \alpha^*$.

Доказательство. Умножая равенство $\alpha\alpha^{-1} = 1$ слева на α^* и используя (3), получим $\alpha^* = (\alpha^*\alpha)\alpha^{-1} \subset \alpha^{-1}$. Поскольку α и α^{-1} равноправны, $(\alpha^{-1})^* \subset (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$. В силу инволюции $\alpha^{-1} \subset \alpha^*$, что в сравнении с предыдущим дает $\alpha^{-1} = \alpha^*$.

Следствие 2.4. $\mathrm{In}\,\mathbf{R} \cap P_r\mathbf{R} = \mathrm{Iso}\,\mathbf{P}(\mathbf{R})$.

Лемма 2.5. *Если* $\alpha=\beta\mu$, *где* $\alpha\in \mathbf{P}(\mathbf{R})$, $\mu\in \mathrm{In}\,\mathbf{R}$, *то* $\beta\in \mathbf{P}(\mathbf{R})$.

Доказательство. В силу (2) и (4) $1\subset\alpha\alpha^*=\beta\mu\mu^*\beta^*=\beta\beta^*$. В силу (3) и (4) $1=\mu\mu^*\supset\mu\alpha^*\alpha\mu^*=\mu\mu^*\beta^*\beta\mu\mu^*=\beta^*\beta$.

Лемма 2.6. *Если* $\alpha=\nu\beta$, $\alpha\in \mathbf{P}(\mathbf{R})$, $\nu\in P_r\mathbf{R}$, *то* $\beta\in \mathbf{P}(\mathbf{R})$.

Доказательство. В силу (5) $\beta=\nu^*\alpha$, отсюда $\beta\beta^*=\nu^*\alpha\alpha^*\nu\supset\supset\nu^*\nu=1$ и $\beta^*\beta=\alpha^*\nu^*\nu\alpha=\alpha^*\alpha\subset 1$.

Лемма 2.7. *Пусть* $\mu=\mu_1\mu_2$, $\mu\in \mathrm{In}\,\mathbf{R}$. *Если* $\mu_1,\mu_2\in \mathbf{P}(\mathbf{R})$ *или если* $\mu_2\in \mathrm{In}\,\mathbf{R}$, *то* $\mu_1\in \mathrm{In}\,R$.

Доказательство. По условию $1=\mu\mu^*=\mu_1\mu_2\mu_2^*\mu_1^*$. Если $\mu_2\in \in \mathbf{P}(\mathbf{R})$, то $1=\mu_1\mu_2\mu_2^*\mu_1^*\supset\mu_1\mu_1^*$ в силу (2). С другой стороны, $\mu_1\in \mathbf{P}(\mathbf{R})$, значит, $\mu_1\mu_1^*\supset 1$, откуда $\mu_1\in \mathrm{In}\,\mathbf{R}$. Если $\mu_2\in \mathrm{In}\,\mathbf{R}$, то сразу получим $1=\mu_1\mu_2\mu_2^*\mu_1^*=\mu_1\mu_1^*$. По лемме 2.5 μ_1 — собственный морфизм. Значит, $\mu_1\in \mathrm{In}\,\mathbf{R}$.

Аналогичная лемма справедлива для проекций.

2.2. Подкатегории собственных морфизмов категорий соответствий.

Теорема 2.8. *Пусть бикатегория* $\mathbf{K}=(\mathbf{K},\Xi,\mathfrak{M})$ *удовлетворяет аксиомам* (C1)—(C4). *Тогда категория соответствий* $\mathbf{R}(\mathbf{K})$ *является категорией с инволюцией и существует изоморфное вложение* $\Gamma:\mathbf{K}\to \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$, *при котором* $\Gamma(\mathbf{E})\subseteq P_r\,\mathbf{R}(\mathbf{K})$, $\Gamma(\mathrm{Mon}\,\mathbf{K})\subseteq\subseteq \mathrm{In}\,\mathbf{R}$.

Доказательство. Каждое множество $H_{\mathbf{K}(\mathbf{R})}(A,B)=R(A,B)$ является частично упорядоченным (п. 1.1.). Для $(\alpha,\beta]\in R(A,B)$ положим $(\alpha,\beta]^*=(\beta,\alpha]\in R(B,A)$. Выполнение условий a)—c) определения I-категорий очевидно. Проверим выполнение условия d). Пусть $(\alpha,\beta]\in\in R(A,B)$, $(\gamma_1,\delta_1]$, $(\gamma_2,\delta_2]\in R(B,C)$ и $(\gamma_1,\delta_1]\leqslant(\gamma_2,\delta_2]$. Тогда $\gamma_1=\mu\gamma_2$, $\delta_1=\mu\delta_2$ для некоторого μ, причем в силу леммы 1.2 $\mu\in\mathfrak{M}$. Выберем коуниверсальные квадраты $[\varphi_1,\beta,\gamma_1,\psi_1]$ и $[\varphi_2,\beta,\gamma_2,\psi_2]$. Поскольку $\varphi_1\beta=\psi_1\gamma_1=(\psi_1\mu)\gamma_2$, существует такой морфизм ξ, что $\varphi_1=\xi\varphi_2$, $\psi_1\mu=\xi\psi_2$. Следовательно, $(\alpha,\beta)\circ(\gamma_1,\delta_1)=(\varphi_1\alpha,\psi_1\delta_1)=(\xi\varphi_2\alpha,\psi_1\mu\delta_2)=(\xi\varphi_2\alpha,\xi\psi_2\delta_2)==\xi(\varphi_2\alpha,\psi_2\delta_2)=\xi((\alpha,\beta)\circ(\gamma_2,\delta_2))$. По лемме 1.1. $\mathrm{Im}((\alpha,\beta)\circ(\gamma_1,\delta_1))\leqslant\leqslant\mathrm{Im}((\alpha,\beta)\circ(\gamma_2,\delta_2))$, что и доказывает выполнение условия α).

Положим для $\alpha\in H_{\mathbf{K}}(A,B)$ $\Gamma(\alpha)=(1_A,\alpha]\in R(A,B)=H_{\mathbf{R}(\mathbf{K})}(A,B)$ и покажем, что отображение $\Gamma:\mathbf{K}\to \mathbf{R}(\mathbf{K})$ является изоморфным вложением. Очевидно, что отображение Γ переводит единицы в единицы. Пусть $\alpha\in H_{\mathbf{R}}(A,B)$, $\beta\in H_{\mathbf{R}}(B,C)$. Тогда $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=(1,\alpha]\circ(1,\beta]==(1,\alpha\beta]=\Gamma(\alpha\beta)$, поскольку в коуниверсальном квадрате против единицы всегда лежит изоморфизм. Если $\Gamma(\alpha)=(1,\alpha]=(1,\beta]=\Gamma(\beta)$, то $1=\xi\cdot 1$, $\beta=\xi\alpha$ для некоторого ξ. Но $\xi=1$, поэтому $\beta=\alpha$, т. е. Γ — изоморфное вложение.

Покажем, что для любого $\alpha\in H_{\mathbf{K}}(A,B)$ $\Gamma(\alpha)\in \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$. Пусть $\alpha=\nu\mu$, $\nu\in\mathbf{E}$, $\mu\in\mathfrak{M}$. Тогда $(\alpha,1)\circ(1,\alpha)=(\alpha,\alpha)=\nu(\mu,\mu)$, откуда $(\alpha,1)\circ(1,\alpha)\overset{s}{\sim}(\mu,\mu)$, т. е.

$$\Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\alpha)=(1,\alpha]^*\circ(1,\alpha]=(\mu,\mu]\leqslant(1,1].$$

С другой стороны, если $(\delta_1, \delta_2) = \ker \alpha$, то

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha)^* = (1, \alpha] \circ (1, \alpha]^* = (\delta_1, \delta_2] = \ker \alpha \geqslant (1,1]$$

по отмеченному в п. 1.3. свойству ядерных пар морфизмов. Таким образом, $\Gamma(\alpha) \in \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$.

Если μ — мономорфизм, то $\mathrm{Ker}\,\mu = (1,1]$. Поэтому $\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu)^* = (1, \mu] \circ (1, \mu]^* = (1,1]$, т. е. $\Gamma(\mu) \in \mathrm{In}\,\mathbf{R}(\mathbf{K})$.

Если $\nu \in \mathbf{E}$, то пара (ν, ν) слабо эквивалентна паре $(1,1)$. Поэтому $\Gamma(\nu)^*\,\Gamma(\nu) = (1, \nu]^* \circ (1, \nu] = (1,1]$, т. е. $\Gamma(\nu) \in P_r\,\mathbf{R}(\mathbf{K})$.

Отметим, что для каждого морфизма $(\alpha, \beta] \in H_{R(K)}(A, B)$ имеет место равенство

$$(\alpha, \beta] = \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\beta), \tag{6}$$

поскольку $(\alpha, \beta) = (\alpha, 1) \circ (1, \beta)$.

Если $[\varphi, \beta, \gamma, \psi]$ — коуниверсальный квадрат, то $(\varphi, \psi) = (1, \beta) \circ (\gamma, 1) = (\varphi, 1) \circ (1, \psi)$, откуда

$$\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)^* = \Gamma(\varphi)^*\,\Gamma(\psi). \tag{7}$$

Отсюда

$$(\alpha, \beta] \circ (\gamma, \delta] = \Gamma(\varphi\alpha)^*\,\Gamma(\psi\delta), \tag{8}$$

поскольку

$$(\alpha, \beta] \circ (\gamma, \delta] = \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)^*\,\Gamma(\delta) =$$
$$= \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\varphi)^*\,\Gamma(\psi)\,\Gamma(\delta) = \Gamma(\varphi\alpha)^*\,\Gamma(\psi\delta).$$

Теорема 2.9. *В условиях теоремы 2.8 функтор $\Gamma: \mathbf{K} \to \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$ полон тогда и только тогда, когда каждый допустимый эпиморфизм регулярен.*

Доказательство. Необходимость. Пусть функтор Γ полон и $\nu \in \mathbf{E}$. Если $\mathrm{Ker}\,\nu = (\delta_1, \delta_2]$, то ввиду (7) $\Gamma(\nu)\,\Gamma(\nu)^* = \Gamma(\delta_1)^*\,\Gamma(\delta_2)$. Если $\delta_1\beta = \delta_2\beta$, то $\Gamma(\delta_1)\,\Gamma(\beta) = \Gamma(\delta_2)\,\Gamma(\beta)$, откуда в силу (5) $\Gamma(\beta) = \Gamma(\delta_1)^*\,\Gamma(\delta_2)\,\Gamma(\beta) = \Gamma(\nu)\,\Gamma(\nu)^*\,\Gamma(\beta)$, поскольку $\Gamma(\delta_1) \in P_r(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$ по теореме 2.8. Так как по той же теореме $\Gamma(\beta) \in \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$ и $\Gamma(\nu) \in P_r\,\mathbf{R}$, то по лемме 2.6 $\Gamma(\nu)^*\,\Gamma(\beta) \in \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$, откуда по условию $\Gamma(\nu)^*\,\Gamma(\beta) = \Gamma(\beta')$. Следовательно, $\Gamma(\beta) = \Gamma(\nu)\,\Gamma(\beta') = \Gamma(\nu\beta')$ и $\beta = \nu\beta'$, ибо Γ — вложение. Таким образом, $\nu = \mathrm{coker}\,(\delta_1, \delta_2)$ и, значит, ν — регулярный эпиморфизм.

Достаточность. Пусть $(\alpha, \beta] \in H_{R(K)}(A, B) \cap \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$. Выберем допустимые разложения $\nu\mu$ и $\pi\sigma$ морфизмов α и β соответственно и зафиксируем ядерные пары $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \ker \alpha = \ker \nu$ и $(\delta_1\delta_2) = \ker \beta = \ker \pi$. По теореме 2.8 $\Gamma(\sigma) \in \mathrm{In}\,\mathbf{R}(\mathbf{K})$. Поэтому ввиду (7)

$$(\alpha, \beta] \circ (\alpha, \beta]^* = \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\beta)^*\,\Gamma(\beta)^*\,\Gamma(\alpha) =$$
$$= \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\pi)\,\Gamma(\sigma)\,\Gamma(\sigma)^*\,\Gamma(\pi)^*\,\Gamma(\alpha) =$$
$$= \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\pi)\,\Gamma(\pi)^*\,\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\delta_1)^*\,\Gamma(\delta_2)\Gamma(\alpha) = \Gamma(\delta_1\alpha)^*\,\Gamma(\delta_2\alpha).$$

Возьмем каноническое разложение пары $(\delta_1\alpha, \delta_2\alpha) = \rho(\alpha_1, \alpha_2)$. Поскольку $\Gamma(\rho) \in P_r\,\mathbf{R}(\mathbf{K})$ по теореме 2.8,

$$\Gamma(\delta_1\alpha)^*\Gamma(\delta_2\alpha)=\Gamma(\rho\alpha_1)^*\Gamma(\rho\alpha_2)=\Gamma(\alpha_1)^*\Gamma(\rho)^*\Gamma(\rho)\Gamma(\alpha_2)=$$
$$=\Gamma(\alpha_1)^*\Gamma(\alpha_2)=(\alpha_1,\ \alpha_2].$$

Так как

$$(\alpha,\ \beta]\in \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K})),\ \text{то}\ (\alpha,\ \beta]\circ(\alpha,\ \beta]^*=(\alpha_1,\ \alpha_2]\geqslant(1_A,\ 1_A].$$

Значит, для некоторого λ выполнены равенства $1_A=\lambda\alpha_1=\lambda\alpha_2$, откуда $\alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbf{E}$. Поэтому $\delta_1\alpha=\rho\alpha_1\in\mathbf{E}$ и $\alpha\in\mathbf{E}$.

Ввиду проведенной выше выкладки

$$(\beta,\ \alpha]\circ(\beta,\ \alpha]^*=(\alpha,\ \beta]^*\circ(\alpha,\ \beta]=\Gamma(\varepsilon_1\beta)^*\ \Gamma(\varepsilon_2\beta)=(\beta_1,\ \beta_2],$$

где $\varkappa(\beta_1,\ \beta_2)$ — каноническое разложение пары $(\varepsilon_1\beta,\ \varepsilon_2\beta)$. Так как $(\alpha,\ \beta]\in\in\mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$, то $(\beta_1,\ \beta_2]\leqslant(1_B,\ 1_B]$, т. е. $\beta_1=\tau\cdot 1_B=\beta_2$. Отсюда $\varepsilon_1\beta=\varkappa\beta_1==\varkappa\beta_2=\varepsilon_2\beta$. По условию α — регулярный эпиморфизм и, значит, $\alpha=\operatorname{coker}\operatorname{kep}\alpha=\operatorname{coker}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$. Следовательно, $\beta=\alpha\beta'$, откуда $(\alpha,\ \beta)==(\alpha,\ \alpha\beta')=\alpha(1,\ \beta')\overset{s}{\sim}(1,\ \beta')$. Поэтому $(\alpha,\ \beta]=(1,\ \beta']=\Gamma(\beta')$, и теорема доказана.

2.3. Регулярные категории. Категорию $\mathbf{K}$ назовем *регулярной*, если она является категорией с регулярными кообразами и удовлетворяет аксиомам (C1)—(C4). Теорема 2.8 и 2.9 приводят к такому результату.

Следствие 2.10. *Всякая регулярная категория является подкатегорией всех собственных морфизмов своей категории соответствий.*

2.4. I-функторы. Функтор F: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}'$ между I-категориями $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ называется *I-функтором*, если он удовлетворяет следующим условиям: a) $F(\alpha^*)=F(\alpha)^*$; b) из $\alpha\subset\beta$ следует $F(\alpha)\subset F(\beta)$.

Очевидно, что всякий I-функтор F переводит B—, K—, D—, I-регулярные морфизмы в B—, K—, D—, I-регулярные морфизмы и, в частности, индуцирует функтор $\overline{F}=F|_{\mathbf{P}(\mathbf{R})}$: $\mathbf{P}(\mathbf{R})\to\mathbf{P}(\mathbf{R}')$, переводящий проекции в проекции и инъекции в инъекции.

Теорема 2.11. *Пусть бикатегории* $(\mathbf{K},\ \mathbf{E},\ \mathfrak{M})$ *и* $(\mathbf{K}',\ \mathbf{E}',\ \mathfrak{M}')$ *удовлетворяют аксиомам* (C1) — (C4) *с функторами вложения* $\Gamma\colon\mathbf{K}\to\mathbf{R}(\mathbf{K})$ *и* $\Gamma'\colon\mathbf{K}'\to\mathbf{R}(\mathbf{K}')$ *соответственно. Если* $F\colon\mathbf{K}\to\mathbf{K}'$ — *ковариантный функтор, перестановочный с коуниверсальными квадратами, и если* $F(\mathbf{E})\subseteq\mathbf{E}'$, *то существует единственный I-функтор* $\widetilde{F}\colon\mathbf{R}(\mathbf{K})\to\mathbf{R}(\mathbf{K}')$, *для которого* $\Gamma\widetilde{F}=F\,\Gamma'$.

Доказательство. Ввиду (6) всякий морфизм $\varphi=(\alpha,\ \beta]\in\in H_{\mathbf{R}(\mathbf{K})}(A,\ B)$ имеет вид $\varphi=\Gamma(\alpha)^*\ \Gamma(\beta)$. Поэтому, если функтор $\widetilde{F}$ существует, то

$$\widetilde{F}(\varphi)=\widetilde{F}(\Gamma(\alpha)^*\ \Gamma(\beta))=\Gamma'(F(\alpha))^*\ \Gamma'(F(\beta)). \tag{9}$$

Покажем, что правая часть равенств (9) может быть принята за определение функтора $\widetilde{F}$. Пусть $(\alpha',\ \beta')\in P(A,\ B)$ — любая пара морфизмов, для которой $\varphi=\Gamma(\alpha')^*\ \Gamma(\beta')$. Это значит, что пары $(\alpha,\ \beta)$ и

(α', β') слабо эквивалентны, т. е. $\alpha' = \nu\alpha$, $\beta' = \nu\beta$ для некоторого $\nu \in \mathbf{E}$. Следовательно

$$\Gamma'(F(\alpha'))^* \Gamma'(F(\beta')) = [\Gamma'(F(\nu))\Gamma'(F(\alpha))]^* \Gamma'(F(\nu))\Gamma'(F(\beta)) =$$

$$= \Gamma'(F(\alpha))^* \Gamma'(F(\nu))^* \Gamma'(F(\nu))\Gamma'(F(\beta)) = \Gamma'(F(\alpha))^* \Gamma'(F(\beta)) = \tilde{F}(\varphi),$$

поскольку $F(\nu) \in \mathbf{E}'$ по условию и $\Gamma'(F(\nu)) \in P, \mathbf{R}(\mathbf{K}')$ по теореме 2.8.

Последние равенства показывают, в частности, что отображение $\tilde{F}$ определено формулой (9) корректно.

Очевидно, что $\tilde{F}(1_A) = 1_{\tilde{F(A)}} = 1_{F(A)}$. Пусть $\varphi = (\alpha, \beta) \in H_{\mathbf{R}(\mathbf{K})}(A, B)$, $\psi = (\gamma, \delta] \in H_{\mathbf{R}(\mathbf{K})}(B, C)$ и $[\varepsilon_1, \beta, \gamma, \varepsilon_2]$ — коуниверсальный квадрат. Ввиду (8) и перестановочности функтора F с коуниверсальными квадратами справедливы следующие равенства:

$$\tilde{F}(\varphi\psi) = \tilde{F}[\Gamma(\varepsilon_1\alpha)^* \Gamma(\varepsilon_2\delta)] = \Gamma'(F(\varepsilon_1\alpha))^* \Gamma(F(\varepsilon_2\delta)) = \Gamma'(F(\alpha))^* \Gamma'(F(\varepsilon_1))^*$$

$$\Gamma'(F(\varepsilon_2))\Gamma'(F(\delta)) = \Gamma'(F(\alpha))^* \Gamma'(F(\beta))\Gamma'(F(\gamma))^* \Gamma'(F(\delta)) = \tilde{F}(\varphi)\tilde{F}(\psi).$$

Таким образом, $\tilde{F}$ — функтор. Пусть теперь $\varphi = (\alpha, \beta] \leqslant \psi(\gamma, \delta)$. Тогда $(\alpha, \beta) = \mu(\gamma, \delta)$, где по лемме 1.2 $\mu \in \mathfrak{M}$. Поскольку $\ker \mu = (1.1)$ и функтор F перестановочен с коуниверсальными квадратами $F(\mu) \in$ Mon $\mathbf{K}'$. В силу теоремы 2.8 $\Gamma'(F(\mu)) \in \mathrm{In}\,\mathbf{R}(\mathbf{K}')$. Следовательно

$$\tilde{F}(\varphi) = \Gamma'(F(\alpha))^* \Gamma'(F(\beta)) = \Gamma'(F(\gamma))^* \Gamma'(F(\mu))^* \Gamma'(F(\mu))\Gamma'(F(\delta)) \subset$$

$$\subset \Gamma'(F(\alpha'))^* \Gamma'(F(\delta)) = \tilde{F}(\psi).$$

Очевидно, что $\tilde{F}(\varphi)^* = \tilde{F}(\varphi^*)$. Значит, $\tilde{F}$ — I-функтор, и теорема доказана.

2.5. **Представление категорий соответствий над регулярными категориями.** Барр [1] назвал регулярными категории, удовлетворяющие следующим условиям: a) существует правый нуль; b) каждый морфизм имеет ядерную пару; c) каждая ядерная пара имеет коядро; d) каждая пара морфизмов (α, ν) с общим концом, в которой ν—регулярный эпиморфизм, имеет коуниверсальный квадрат $[\varphi, \alpha, \nu, \psi]$, причем φ—регулярный эпиморфизм.

Предложение 2.12. *Категория* $\mathbf{K}$, *удовлетворяющая условиям* b)—d), *является категорией с регулярными кообразами.*

Начнем с предварительных рассмотрений. Диаграмму (10) назовем коммутативной, если $\delta_i\alpha = \beta\varepsilon_i$, $i = 1, 2$. Коммутативную диаграмму (10) назовем коуниверсальной относительно пары $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и морфизма α, если для коммутативной диаграммы (11) существует такой единственный морфизм γ, что $\psi = \gamma\beta$, $\varphi_i = \gamma\delta_i$, $i = 1, 2$.

Лемма 2.13. *Если категория* $\mathbf{K}$ *удовлетворяет условиям* b) *и* c), *то для любой ядерной пары* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *и для любого морфизма* α *существует коуниверсальная коммутативная диаграмма.*

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, shift left, "\delta_1"] \arrow[r, shift right, "\delta_2"'] \arrow[d, "\beta"'] & \cdot \arrow[d, "\alpha"] \\ \cdot \arrow[r, shift left, "\varepsilon_1"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon_2"'] & \cdot \end{tikzcd} \qquad (10)$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, shift left, "\delta_1"] \arrow[r, shift right, "\delta_2"'] \arrow[d, "\gamma"'] & \cdot \arrow[d, "\alpha"] \\ \cdot \arrow[r, shift left, "\varepsilon_1"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon_2"'] & \cdot \end{tikzcd} \qquad (11)$$

Доказательство. Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \ker \nu$, $(\delta_1, \delta_2) = \ker \alpha\nu$. Так как $(\delta_1\alpha)\nu = (\delta_2\alpha)\nu$, то существует такой единственный морфизм β, что $\delta_i\alpha = \beta\varepsilon_i$, $i = 1, 2$.

Предположим, что дана коммутативная диаграмма (11). Тогда $\varphi_1(\alpha\nu) = \psi(\varepsilon_1\nu) = \psi(\varepsilon_2\nu) = \varphi_2(\alpha\nu)$, откуда $\varphi_i = \gamma\delta_i$, $i = 1, 2$, для единственного морфизма γ. Кроме того, $(\gamma\beta)\varepsilon_i = \gamma\delta_i\alpha = \varphi_i\alpha = \psi\varepsilon_i$, $i = 1, 2$, откуда, $\gamma\beta = \psi$, так как пара $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$—разделяющая. Лемма доказана.

Лемма 2.14. *Если в категории* K *выполнены условия* b) — d), *то в коуниверсальной диаграмме* (10) *против регулярного эпиморфизма* α *лежит эпиморфизм* β.

Доказательство. Пусть $[\alpha_1, \varepsilon_1, \alpha, \psi_1]$, $[\alpha_2, \varepsilon_2, \alpha, \psi_2]$, $[\eta_1, \alpha_1, \alpha_2, \eta_2]$ — коуниверсальные квадраты, существующие по условию d), поскольку ε_1, ε_2 и α — регулярные эпиморфизмы. Поэтому и все остальные морфизмы из этих квадратов — регулярные эпиморфизмы. Положим $\psi = \eta_1\alpha_1 = \eta_2\alpha_2$, $\varphi_i = \eta_i\psi_i$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\varphi_i\alpha = \eta_i\psi_i\alpha = \eta_i\alpha_i\varepsilon_i = \psi\varepsilon_i, \quad i = 1, 2.$$

По определению коуниверсальной диаграммы существует такой морфизм γ, что $\psi = \gamma\beta$, $\varphi_i = \gamma\delta_i$, $i = 1, 2$. Так как ψ—эпиморфизм, и лемма доказана.

Доказательство предложения 2.12. Пусть $\alpha\colon A \to B$ — произвольный морфизм, $(\delta_1, \delta_2) = \ker \alpha$, $\nu = \operatorname{coker}(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\alpha = \nu\mu$. Если $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \ker \mu$, то ввиду $(\delta_1 \nu)\mu = \delta_1 \alpha = \delta_2 \alpha = (\delta_2 \nu)\mu$, существует такой единственный морфизм β, что $\delta_i \nu = \beta \varepsilon_i$, $i = 1, 2$. Таким образом, в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, shift left, "\delta_1"] \arrow[r, shift right, "\delta_2"'] \arrow[d, "\beta"'] & \cdot \arrow[d, "\nu"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
\cdot \arrow[r, shift left, "\varepsilon_1"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon_2"'] & \cdot \arrow[r, "\mu"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

квадрат коуниверсален в силу построения, описанного в доказательстве леммы 2.13. По лемме 2.14 $\beta = \operatorname{Epi} \mathbf{K}$. Так как $\beta\varepsilon_1 = \delta_1\nu = \delta_2\nu = \beta\varepsilon_2$, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, откуда $\mu \in \operatorname{Mon} \mathbf{K}$, и предложение доказано.

Следствие 2.15. *В условиях леммы* 2.14 β — *регулярный эпиморфизм.*

Доказательство. Построенный при доказательстве леммы 2.14 морфизм ψ является регулярным эпиморфизмом как произведение двух регулярных эпиморфизмов. Поэтому β, будучи правым делителем ψ, является регулярным эпиморфизмом.

Следствие 2.16. *При выполнении условий* b) *и* d) *условие* c) *равносильно существованию в* $\mathbf{K}$ *бикатегорной структуры* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \operatorname{Mon} \mathbf{K})$.

Доказательство. Достаточность условия c) доказана в предложении 2.12. Если же в бикатегории $(\mathbf{K}, \mathbf{E}_r, \operatorname{Mon} \mathbf{K})$ выполнено условие b) и если $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \ker \alpha$, то $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \ker \nu$, где $\alpha = \nu\mu$, $\nu \in \mathbf{E}_r$, $\mu \in \operatorname{Mon} \mathbf{K}$, и $\nu = \operatorname{coker}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, в силу предложения V.3.10 книги [17].

Теорема 2.17. *Для всякой категории соответствий* $\mathbf{R}(\mathbf{K})$ *над малой регулярной категорией с правым нулем без собственных подобъектов существует* I*-изоморфное вложение в категорию соответствий* $\mathbf{R}(\mathbf{S})$ *над категорией множеств* $\mathbf{S}$.

Доказательство. По условию 2.16 регулярная категория в нашем смысле удовлетворяет условиям b) — d). Наличие правого нуля есть требование a). Отсутствие собственных подобъектов обеспечивает выполнение условий теоремы 3 работы Барра [1], по которой существует изоморфное вложение категории $\mathbf{K}$ в категорию $\mathbf{S}$, перестановочное с коуниверсальными квадратами и переводящее регулярные эпиморфизмы в регулярные эпиморфизмы. По теореме 2.11 это вложение продолжается до I-вложения $\mathbf{R}(\mathbf{K})$ в $\mathbf{R}(\mathbf{S})$, что и утверждалось.

2.6. Дуализация. Категория косоответствий $\mathbf{R}(\mathbf{K})$ над категорией $\mathbf{K}$, удовлетворяющей аксиомам (C1*)—(C4*), также является категорией с инволюцией, в которую категория $\mathbf{K}$ изоморфно вкладывается. В случае категории множеств $\mathbf{S}$ категории $\mathbf{R}(\mathbf{S})$ и $\mathbf{R}'(\mathbf{S})$ неизоморфны, хотя бы потому, что все множества $H_{\mathbf{R}(\mathbf{S})}(\varnothing, X)$ пусты, а множество $H_{\mathbf{R}'(\mathbf{S})}(X, Y)$ может быть пустым только при $X = Y = \varnothing$.

С другой стороны, для абелевой категории $\mathbf{U}$ можно показать, что сопоставляя каждому подобъекту $(u, \mu]$ объекта $A \times B$ коядро μ, мы получим изоморфизм $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ и $\mathbf{R}'(\mathbf{U})$, перестановочный с инволюцией, но обращающий порядок. Категория $\mathbf{R}'(\mathbf{U})$ I-изоморфна категории $\mathbf{R}(\mathbf{U}^*)$, где $\mathbf{U}^*$—категория, двойственная к $\mathbf{U}$.

§ 3. Некоторые свойства категорий R(K)

3.1. Существование пересечений. Частично упорядоченное множество S назовем *условной полуструктурой по пересечениям*, если пересечение элементов a, $b \in S$ существует тогда и только тогда, когда множество $\{a, b\}$ ограничено снизу.

Теорема 3.1. *Пусть бикатегория* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ *удовлетворяет аксиомам* (C1)—(C4). *В категории* $\mathbf{R}(\mathbf{K})$ *каждое множество* $H_{\mathbf{R}(\mathbf{K})}(A, B)$ *является условной полуструктурой тогда и только тогда, когда каждая пара морфизмов* α, $\beta \in H_{\mathbf{K}}(A, B)$, *имеющая левый уравнитель, обладает ядром.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\gamma\alpha = \gamma\beta$. Можно считать, что $\gamma \in \mathfrak{M}$. Тогда $(\gamma, \gamma\alpha] = (\gamma(1, \alpha)] = (\gamma(1, \beta)]$, откуда видно, что пара подобъектов $(1_A, \alpha]$, $(1_A, \beta] \in R(A, B)$ ограничена снизу подобъектом $(\gamma, \gamma\alpha]$. Следовательно, существует пересечение $(1_A, \alpha] \cap \cap (1_A, \beta] = (\mu_1, \mu_2]$. Значит, $(\mu_1, \mu_2) = \varphi_1(1_A, \alpha) = \varphi_2(1_A, \beta)$ для некоторых φ_1 и φ_2, откуда $\mu_1 = \varphi_1 = \varphi_2$ и $\mu_2 = \varphi_1\alpha = \varphi_2\beta = \mu_1\alpha = \mu_1\beta$. Следовательно, $(\mu_1, \mu_2) = \mu_1(1_A, \alpha) = \mu_1(1_A, \beta)$. Равенство $\mu_1 = \ker(\alpha, \beta)$ устанавливается повторением первой части доказательства.

Достаточность. Пусть $(\alpha, \beta]$, $(\gamma, \delta] \in R(A, B)$ и $(\lambda, \varkappa] \leqslant (\alpha, \beta]$, $(\lambda, \varkappa] < (\gamma, \delta]$. Выберем коуниверсальные квадраты $[\varepsilon_1, \alpha, \gamma, \varepsilon_2][\delta_1, \beta, \delta, \delta_2]$, $[\varphi, \varepsilon_1, \delta_1, \psi]$ и покажем, что пара морфизмов $(\varphi\varepsilon_2, \psi\delta_2)$ обладает левым уравнителем. По выбору подобъекта $(\lambda, \varkappa]$ существуют такие морфизмы ξ и η, что $(\lambda, \varkappa) = \xi(\alpha, \beta) = \eta(\gamma, \delta)$, откуда

$$\lambda = \xi\alpha = \eta\gamma, \quad \varkappa = \xi\beta = \eta\delta.$$

Ввиду коуниверсальности выбранных квадратов существуют такие морфизмы θ_1 и θ_2, что

$$\xi = \theta_1\varepsilon_1 = \theta_2\delta_1, \quad \eta = \theta_1\varepsilon_2 = \theta_2\delta_2.$$

Поэтому существует такой морфизм θ, что

$$\theta_1 = \theta\varphi, \ \theta_2 = \theta\psi.$$

Следовательно, $\theta(\varphi\varepsilon_2) = \theta_1\varepsilon_2 = \theta_2\delta_2 = \theta(\psi\delta_2)$. По условию существует $\ker(\varphi\varepsilon_2, \psi\delta_2) = \mu$. Так как $\mu\varphi\varepsilon_2 = \mu\psi\delta_2$, то пара $(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma, \mu\psi\delta_2\delta)$ делится справа на пару (γ, δ). С другой стороны, $\mu\varphi\varepsilon_2\gamma = \mu\varphi\varepsilon_1\alpha = (\mu\psi\delta_1)\alpha$, $\mu\psi\delta_2\delta = (\mu\psi\delta_1)\beta$, т. е. пара $(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma, \mu\psi\delta_2\delta)$ делится справа на пару (α, β). По лемме 1.1. $\mathrm{Im}\,(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma,\ \mu\psi\delta_2\delta) \leqslant (\alpha, \beta]$ и $\mathrm{Im}\,(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma,\ \mu\psi\delta_2\delta) \leqslant (\gamma, \delta]$. Поскольку $\theta\,(\varphi\varepsilon_2) = \theta\,(\psi\delta_2)$, то $\theta = \theta'\mu$. Отсюда

$$\lambda = \xi\alpha = \theta_1\varepsilon_1\alpha = \theta\varphi\varepsilon_1\alpha = \theta'\mu\varphi\varepsilon_1\alpha = \theta'\,(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma),$$

$$\varkappa = \eta\delta = \theta_2\delta_2\delta = \theta\psi\delta_2\delta = \theta'\,(\mu\psi\delta_2\delta).$$

Вновь по лемме 1.1 $\mathrm{Im}\,(\lambda, \varkappa) = (\lambda, \varkappa] \leqslant \mathrm{Im}\,(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma,\ \mu\psi\delta_2\delta)$. Поскольку пара $(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma,\ \mu\psi\delta_2\delta)$ не зависит от выбора $(\lambda, \varkappa]$, доказано, что $\mathrm{Im}\,(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma,\ \mu\psi\delta_2\delta) = (\alpha, \beta] \cap (\gamma, \delta]$. Теорема доказана.

Следствие 3.2. *В условиях теоремы* 3.1 *каждое множество* $H_{\mathbf{R}(\mathbf{K})}(A, B)$ *является полуструктурой по пересечениям тогда и только тогда, когда каждая пара морфизмов* $\varepsilon, \beta \in H_{\mathbf{K}}(A, B)$ *имеет ядро.*

3.2. Диаграммный поиск в категориях $\mathbf{R}$ ($\mathbf{K}$). Установим следующее обобщение леммы 9. 4 работы Пуппе [15].

Предложение 3.3. *Пусть категория* $\mathbf{K}$ *удовлетворяет аксиомам* (C1)—(C4). *Если* $(\alpha, \beta] \in R\,(A, B)$, $(\gamma, \delta] \in R\,(B, C)$, *то пара* $(\varphi, \psi) \in P\,(A, C)$ *делится справа на произведение* $(\alpha, \beta] \circ (\gamma, \delta]$ *тогда и только тогда, когда существует такой допустимый эпиморфизм* ν *и такой морфизм* η, *что пара* $(\nu\alpha, \eta)$ *делится справа на* (γ, δ), а пара $(\eta, \nu\psi)$ делится справа на (γ, δ).

Доказательство. Необходимость. Пусть $[\varepsilon_1, \beta, \gamma, \varepsilon_2]$— коуниверсальный квадрат. Тогда

$$(\alpha, \beta) \circ (\gamma, \delta) = (\varepsilon_1\,\alpha,\ \varepsilon_2\delta) \text{ и } (\alpha, \beta] \circ (\gamma, \delta] = (\alpha', \delta'],$$

где
$$(\varepsilon_1\alpha,\ \varepsilon_2\delta) = \rho\,(\alpha', \delta'),\ \rho \in \mathbf{E},\ (\alpha', \delta'] \in R\,(A, C).$$

Если пара (φ, ψ) делится на $(\alpha', \delta']$, то $\varphi = \sigma\alpha'$, $\psi = \sigma\delta'$ для некоторого σ. Выберем коуниверсальный квадрат $[\nu, \sigma, \rho, \theta]$. Поскольку $\rho \in \mathbf{E}$, $\nu \in \mathbf{E}$ по аксиоме (C4). Положим $\eta = \theta\varepsilon_1\beta = \theta\varepsilon_2\gamma$. Тогда $\nu\varphi = \nu\sigma\alpha' = \theta\rho\alpha' = \theta\varepsilon_1\alpha$. Таким образом, пара $(\nu\varphi, \eta)$ делится справа на пару (α, β). Далее, $\nu\psi = \nu\sigma\delta' = \theta\rho\delta' = \theta\varepsilon_2\delta$. Таким образом, пара $(\eta, \nu\psi)$ делится справа на пару (γ, δ), и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\nu\varphi = \eta_1\alpha$, $\eta = \eta_1\beta = \eta_2\gamma$, $\nu\psi = \eta_2\delta$. Тогда $\eta_1 = \eta'\varepsilon_1$, $\eta_2 = \eta'\varepsilon_2$ в силу коуниверсальности квадрата $[\varepsilon_1, \beta, \gamma, \varepsilon_2]$. Отсюда $\nu\varphi = \eta_1\alpha = \eta'\varepsilon_1\alpha = (\eta'\rho)\,\alpha'$, $\nu\psi = \eta_2\delta = \eta'\varepsilon_2\delta = (\eta'\rho)\,\delta'$, т. е. пара $(\nu\varphi, \nu\psi)$ делится справа на (α', δ'), откуда и пара (φ, ψ) делится на (α', δ').

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 20.V.1974

Մ. Շ. ՑԱԼԵՆԿՈ. Համապատասխանությունների կատեգորիաները կանոնավոր կատեգորիաների վրա (*ամփոփում*)

Աշխատությունում առանձնացված է կատեգորիաների մի լայն դաս, որոնց համար կարելի է կառուցել համապատասխանությունների կատեգորիա և բացահայտված է համապատասխանությունների կատեգորիայի գոյության և ելակետային կատեգորիայի մեջ առանձնահատուկ երկ-կատեգորիական կառուցվածքների առկայության միջև եղած կապը։ Որոշ կատեգորիաների, մասնավորապես բազմությունների կատեգորիայի համար ապացուցված է ոչ իզոմորֆ «համապատասխանությունների կատեգորիաների» գոյությունը։

Աշխատության երկրորդ մասում զարգացված է կառուցված համապատասխանությունների կատեգորիաների աքսիոմատիկ տեսությունը։

M. Sh. TSALENKO. *Categories of relations over regular categories*
(summary)

A large class of categories is outlined for which the construction of the connection between the existance of category of relations and the presence of special bicategorical constructions in the initial category is possible. For some categories, particularly for the category of sets the existance of non isomorphic „categories of relations" is proved.

In the second part of the paper the axiomatical theory of the constructed category of relations is developed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Barr.* Non-abelian full embeddind; anneuncement of results, Lecture Notes in Math,, 195, 1971, 205—208.
2. *H.—B. Brinkmann.* Relations for exact categories, J. of Algebra, 13, № 4, 1969, 465—480.
3. *H.—B. Brinkmann, D. Puppe.* Abelsche und exakte kategorien, Korrespondenzen, Lecture Notes in Math., 96, 1969.
4. *M. Bunge.* Relative Functa Categories and Categories of Algebras, J. of Algebra, 11, 1969, 64—101.
5. *M. C. Бургин.* γ-категории и категория с инволюцией, УМН, 24, вып. 2, 1969, 221—222.
6. *M. C. Бургин.* Категории с инволюцией и соответствия в γ-категориях, Труды ММО, 22, 1970, 160—228.
7. *И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев.* Неразложимые представления группы Лоренца, УМН, 23, вып. 2, 1968, 3—60.
8. *G. M. Kelly.* Monomorphisms, epimorph isms and pullbacks, J. Austral. Math. Soc. 9, № 1—2, 1969, 124—142.
9. *A. Klein.* Relations in categories, I ll. J. Math., 14, 4, 1970, 536 550.
10. *П. Кон.* Универсальная алгебра, Изд. „Мир", 1968.
11. *A. Г. Курош.* Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962.
12. *J. R. Jsbell.* Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras, Rosrp. math., 36, 1964.
13. *C. Маклейн.* Гомология, Изд. „Мир", 1966.
14. *A. И. Мальцев.* Алгебраические системы, Изд. „Наука", 1970.
15. *D. Puppe.* Korrespondenzen über abelschen Kategorien, Math. Ann., 148, 1962 1—30.
16. *Д. А. Райков.* Об одном классе категорий соответствий, ДАН СССР, 205, № 6, 1972, 1300—1303.
17. *M. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер.* Лекции по теории категорий, МГУ им. М. В. Ломоносова, мех.-мат. фак-т., М., 1970.
18. *M. Ш. Цаленко.* Теоретико-категорные методы исследования некоторых задач общей алгебры, Автореферат дисс., МГУ им. М. В. Ломоносова, мех.-мат. фак-т, 1971.
19. *M. Ш. Цаленко.* Соответствия над квазиточной категорией, ДАН СССР, 155, № 2, 1964, 292—294.
20. *M. Tsalenko.* Semigruppi con involuzione e categorie con involuzione, Symposia math., 4, 1970, 493—514.
21. *H. Schubert.* Kategorien II, Akademie—Verlag, 1970.