ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IX, № 4, 1974 Математика

М. Д. ДАВТЯН

ОБЩИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ДВОЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В настоящей работе изучаются общие краевые задачи для гиперболических уравнений произвольного порядка с двойными характеристиками. Ранее в [1] был рассмотрен случай задачи Дирихле для уравнения четвертого порядка.

§ 1. Разрешимость краевой задачи при конечном числе условий на правые части

Пусть в области $D = \Gamma \times [0, T]$, $t \in [0, T]$, Γ — гладкая замкнутая кривая, диффеоморфная окружности, $x \in \Gamma$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ задано дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$(A_1 A_2 + A_3)\, u(x, t) = f(x, t), \tag{1}$$

где A_1 и A_2 — гиперболические операторы порядка m с одинаковой главной частью A_0

$$A_1 = A_0 + A_{10},$$

$$A_2 = A_0 + A_{20},$$

$$\operatorname{ord} A_{10} \leqslant m - 1, \quad \operatorname{ord} A_{20} \leqslant m - 1, \quad \operatorname{ord} A_3 \leqslant 2m - 2.$$

Характеристический многочлен A_0 имеет следующий вид:

$$A_0(t, x, \lambda, \xi) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda - \gamma_k(x, t)\, \xi), \tag{2}$$

где $\gamma_k(x, t)$ — действительны и различны: $\gamma_k(x, t) \neq \gamma_l(x, t)$ при $l \neq k$ и всех $(x, t) \in \overline{D}$. Будем предполагать, что функции $u(x, t)$, $f(x, t)$ и коэффициенты операторов A_1, A_2 и A_3 бесконечно дифференцируемые и периодические по x с периодом 2π. Рассмотрим для уравнения (1) следующую краевую задачу в области D:

$$\begin{aligned} &B_{j1}\, u(x, t)|_{t=0} = g_{j1}(x), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \\ &B_{j2}\, u(x, t)|_{t=T} = g_{j2}(x), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \end{aligned} \tag{3}$$

где $B_{j1}\left(t, x, \dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ и $B_{j2}\left(t, x, \dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, которые будут сформулированы ниже. Пусть $w_k(x, t) = c$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$ — k-тое семейство характеристик оператора $A_0\left(t,\ x,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Согласно определению, $w_k(x,\ t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial w_k}{\partial t}-\gamma_k(x,\ t)\frac{\partial w_k}{\partial x}=0, \qquad 1\leqslant k\leqslant m. \tag{4}$$

Для $w_k(x,\ t)$ возьмем следующие начальные условия:

$$w_k(x,\ t)|_{t=0}=x, \qquad 1\leqslant k\leqslant m. \tag{5}$$

Как и в [1] будем искать решение уравнения (1) в виде „плоской" волны $\alpha_k(x,\ t)f(w_k(x,\ t))$ $(k=1,\ 2,\cdots,\ m)$, где $f(x)$ — произвольная гладкая функция одного переменного, $\alpha_k(x,\ t)$ — функция класса C^∞ будет подобрана ниже.

Предварительно сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} t&=t,\\ y&=w_k(x,\ t), \qquad 1\leqslant k\leqslant m. \end{aligned} \tag{6}$$

Обозначим $u_0(t,\ y)=u(t,\ x)$, $\alpha_{k0}(t,\ y)=\alpha_k(t,\ x)$. Тогда операторы A_0, A_1, A_2 и A_3 примут вид

$$A_0\left(t,\ x,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=A_0^{(0)}\left(t,\ y,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)=$$

$$=a_m^{(0)}\frac{\partial^m}{\partial y^m}+a_{m-1}^{(0)}\frac{\partial^m}{\partial y^{m-1}\,\partial t}+a_{m-2}^{(0)}\frac{\partial^m}{\partial y^{m-2}\,\partial t^2}+\cdots+$$

$$+a_0^{(0)}\frac{\partial^m}{\partial t^m}+b_{m-1}^{(0)}\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}+\cdots,$$

где $a_m^{(0)}\equiv 0$, $a_{m-1}^{(0)}\neq 0$ при любых $(y,\ t)\in\overline{D}$;

$$A_{10}\left(t,\ x,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=A_{10}^{(0)}\left(t,\ y,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)=$$

$$=b_{m-1}^{(1)}\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}+\cdots,\ \operatorname{ord}A_{10}^{(0)}\leqslant m-1;$$

$$A_{20}\left(t,\ x,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x},\ \right)=A_{20}^{(0)}\left(t,\ y,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)=$$

$$=b_{m-1}^{(2)}\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}+\cdots,\ \operatorname{ord}A_{20}^{(0)}\leqslant m-1;$$

$$A_3\left(t,\ x,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=A_3^{(0)}\left(t,\ y,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)=$$

$$=c_{2m-2}(t,\ y)\frac{\partial^{2m-2}}{\partial y^{2m-2}}+\cdots,\ \operatorname{ord}A_3^{(0)}\leqslant 2m-2.$$

Применим оператор $A_1^{(0)}A_2^{(0)}+A_3^{(0)}$ к $\alpha_{k0}f_k$. Имеем

$$(A_1^{(0)}A_2^{(0)}+A_3^{(0)})(\alpha_{k0}(t,\ y)f_k(y))=$$
$$=\left[\left(a_{m-1}^{(0)}\frac{\partial}{\partial t}+a_{m-2}^{(1)}\right)\left(a_{m-1}^{(0)}\frac{\partial}{\partial t}+a_{m-2}^{(2)}\right)+c_{2m-2}\right]\alpha_{k0}(t,\ y)f_k^{(2m-2)}(y)+$$
$$+\sum_{j=0}^{2m-3}\beta_j(t,\ y)f_k^{(j)}(y),\quad 1\leqslant k\leqslant m, \tag{7}$$

где
$$a_{m-2}^{(1)}=b_{m-1}^{(0)}+b_{m-1}^{(1)},\qquad a_{m-2}^{(2)}=b_{m-1}^{(0)}+b_{m-1}^{(2)}.$$

Потребуем, чтобы коэффициент при $f_k^{(2m-2)}(y)$ обратился в нуль
$$\left[\left(a_{m-1}^{(0)}\frac{\partial}{\partial t}+a_{m-2}^{(1)}\right)\left(a_{m-1}^{(0)}\frac{\partial}{\partial t}+a_{m-2}^{(2)}\right)+c_{2m-2}\right]\alpha_{k0}(t,\ y)=0 \tag{8}$$
или
$$c_1(t,\ y)\frac{\partial^2\alpha_{k0}}{\partial t^2}+c_2(t,\ y)\frac{\partial\alpha_{k0}}{\partial t}+c_3(t,\ y)\alpha_{k0}(t,\ y)=0, \tag{8'}$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые новые коэффициенты, $c_1\neq 0$ при всех $(t,\ y)\in\overline{D}$. Уравнение (8′), как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, зависящее от y как от параметра, имеет два линейно независимых решения $\alpha_{k01}(t,\ y)$ и $\alpha_{k02}(t,\ y)$.

Наложим на область D и уравнение (1) следующее дополнительное условие:

не существует решения уравнения (8′), *обращающегося в нуль на концах отрезка* $[0,\ T]$ *при любых* y *для каждого*
$$k\ (k=1,\ 2,\cdots,\ m). \tag{9}$$

Для определенности пусть
$$\alpha_{k01}(0,\ y)=1,\qquad \alpha_{k01}(T,\ y)=0,$$
$$\alpha_{k02}(0,\ y)=0,\qquad \alpha_{k02}(T,\ y)=1\quad (k=1,\ 2,\cdots,\ m). \tag{10}$$

Условие (9) всегда выполнено, если T достаточно мало.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (9) *и пусть граничные операторы* B_{j1} *и* B_{j2} *удовлетворяют условию типа Шапиро-Лопатинского* (23), (28). *Тогда краевая задача* (1), (3) *нормально разрешима (т. е. существует лишь конечное число гладких решений уравнения* (1) *с* $f=0$ *и нулевыми граничными данными* (3), *и гладкое решение задачи* (1), (3) *существует при всех достаточно гладких* f, g_{j1} *и* g_{j2} $(j=1,\ 2,\cdots,\ m)$, *удовлетворяющих конечному числу условий ортогональности*).

Доказательство. Приведем следующую лемму из теории гиперболических уравнений.

Лемма 1. Пусть рассматривается уравнение
$$Au=f, \tag{11}$$
где A — гиперболический оператор m-го порядка. Тогда существует оператор R такой, что $u=Rf$ есть решение задачи Коши для уравнения (11) с нулевыми начальными данными

$$u\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\cdots,\quad \frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=0}=0,$$

причем R имеет порядок $-m+1$, т. е.

$$\|Rf\|_{s+m-1}\leqslant c\|f\|_s,\quad \forall s\geqslant 0,$$

где $\|\cdots\|$ — норма Соболева-Слободецкого на D (см., например, [7]).

Доказательство леммы 1 см., например, в [2], [6].

Пусть R_1 — оператор, дающий решение $u=R_1f$ задачи Коши

$$A_1u=f,\qquad \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=0,\quad 1\leqslant k\leqslant m-1, \tag{12}$$

а R_2 — оператор, дающий решение $u=R_2f$ задачи Коши

$$A_2u=f,\qquad \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=0,\quad 1\leqslant k\leqslant m-1. \tag{13}$$

Рассмотрим уравнение

$$(A_1A_2+A_3)\,u(x,\ t)=g. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) будем искать в виде

$$u=R_2R_1v, \tag{15}$$

где v — неизвестная функция. Тогда имеем

$$v+A_3R_2R_1v=g. \tag{16}$$

Оператор $A_3R_2R_1$ имеет согласно лемме 1 порядок $\leqslant 0$. Кроме того, можно показать (см. [2]), что оператор $A_3R_2R_1$ — вольтерровский* оператор, обладающий следующим свойством:

$$\|A_3R_2R_1v\|_{s,[T_1,T_2]}\leqslant c\sqrt{T_2-T_1}\,\|v\|_{s,[T_1,T_2]}, \tag{17}$$

где T_2-T_1 достаточно мало. Здесь через $\|\cdots\|_{s,[T_1,T_2]}$ обозначена норма Соболева-Слободецкого в области $\Gamma\times[T_1,\ T_2]$. Следовательно, как показано в [2], уравнение (16) имеет решение

$$v=(I+A_3R_2R_1)^{-1}g, \tag{18}$$

где I — единичный оператор. Из (15) и (18) имеем

$$u=R_2R_1(I+A_3R_2R_1)^{-1}g=R_0g, \tag{19}$$

где порядок оператора R_0 равен $-2m+2$, $\operatorname{ord}R_0\leqslant -2m+2$. Таким образом, доказано существование решения $u=R_0g$ уравнения (14). Если подставить в (1), (3)

$$u=R_0f+w,$$

---

* Так называются операторы, отображающие функции $u(x)$, равные нулю при $x<t$, в функции также обращающиеся в нуль при $x<t$.

то для w получим следующую краевую задачу:

$$(A_1A_2+A_3)\,w=0, \tag{1'}$$

$$\begin{aligned} &B_{j1}\,w(x,t)|_{t=0}=g_{j1}^{(1)}(x), \qquad 1\leqslant j\leqslant m,\\ &B_{j2}\,w(x,t)_{t=T}=g_{j2}^{(1)}(x), \qquad 1\leqslant j\leqslant m, \end{aligned} \tag{3'}$$

где $g_{j1}^{(1)}=g_{j1}-B_{j1}R_0f|_{t=0}$, $\quad g_{j2}^{(1)}=g_{j2}-B_{j2}R_0f|_{t=T}$.

Найдем теперь общее решение уравнения (1′), зависящее от $2m$ произвольных функций. Записав выражение (7) в исходных координатах t и x, получим

$$(A_1A_2+A_3)(\alpha_k(t,x)f_k(w_k(t,x))=\sum_{j=0}^{2m-3}\beta_j(t,x)f_k^{(j)}(w_k(t,x)).$$

Если функция v выбрана так, что

$$(A_1A_2+A_3)(\alpha_{ki}f_{ki}+v)=0, \qquad 1\leqslant k\leqslant m, \qquad i=1,2,$$

то

$$(A_1A_2+A_3)v=\sum_{j=0}^{2m-3}\beta_j(t,x)f_{ki}^{(j)}(w_k(t,x)), \qquad i=1,2. \tag{20}$$

Если положить

$$v=R_0\left(\sum_{j=0}^{2m-3}\beta_j(t,x)f_{ki}^{(j)}(w_k(t,x))\right),$$

то v удовлетворяет уравнению (20) и

$$v=T_{ki}f_{ki},$$

где

$$\operatorname{ord}T_{ki}\leqslant-1 \qquad (k=1,2,\cdots,m), \qquad (i=1,2).$$

Таким образом, для решения $w(x,t)$ мы получили следующее выражение:

$$\begin{aligned} w(x,t)=&\sum_{k=1}^{m}(\alpha_{k1}(x,t)f_{k1}(w_k(x,t))+\alpha_{k2}(x,t)f_{k2}(w_k(x,t))+\\ &+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{2}T_{ki}f_{ki}(w_k(x,t)), \qquad \operatorname{ord}T_{ki}\leqslant-1, \end{aligned} \tag{21}$$

где f_{k1}, f_{k2} — произвольные функции. Функции $f_{ki}(x)$ подберем так, чтобы выполнялись граничные условия (3′). Для этого подставим (21) в граничные условия (3). Получим систему интегродифференциальных уравнений относительно $f_{ki}(x)$. Действительно, имеем

$$B_{j1}\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)=B_{j1}^{(0)}\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)+B_{j1}^{(1)}\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$\operatorname{ord}B_{j1}^{(0)}=m_{j1}, \qquad \operatorname{ord}B_{j1}^{(1)}=m_{j1}-1,$$

$$B_{j2}\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)=B_{j2}^{(0)}\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)+B_{j2}^{(1)}\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$\operatorname{ord}B_{j2}^{(0)}=m_{j2}, \qquad \operatorname{ord}B_{j2}^{(1)}=m_{j2}-1.$$

Таким образом

$$\sum_{k=1}^{m} a_{k1}(t, x)\Big|_{t=0} B_{j1}^{(0)}\left(0, x, \frac{\partial w_k}{\partial t}\Big|_{t=0}, \frac{\partial w_k}{\partial x}\Big|_{t=0}\right) f_{k1}^{(m_{j1})}\left(w_k(t, x)\Big|_{t=0}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j_1}-1} \beta_{jpk1}(x) f_{k1}^{(p)}(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j_1}-1} \beta_{jpk2}(x) f_{k2}^{(p)}(x) = g_{j1}^{(1)}(x), \quad (22)$$

$$1 \leqslant j \leqslant m.$$

Отметим, что в (22) нет членов, содержащих $f_{k2}^{(m_{j_1}-1)}$, так как согласно (10) $a_{k2}(t, x)|_{t=0} = 0$.

Учитывая (4), (5) и (10), получаем

$$\sum_{k=1}^{m} B_{j1}^{(0)}(0, x, \gamma_k(x, 0), 1) f_{k1}^{(m_{j1})}(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j1}-1} \beta_{jpk1}(x) f_{k1}^{(p)}(x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j1}-1} \beta_{jpk2}(x) f_{k2}^{(p)}(x) = g_{j1}^{(1)}(x), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m. \quad (22')$$

Потребуем, чтобы

$$\det\|B_{j1}^{(0)}(0, x, \gamma_k(x, 0), 1)\|_{k, j=1}^{m} \neq 0. \quad (23)$$

Это есть условие Шапиро-Лопатинского при $t = 0$ для разрешимости краевой задачи (1), (3).

Продифференцируем систему (22′) $m_0 - m_{j1}$ раз, чтобы уравнять порядки производных функций $f_{k1}(x)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $m_0 \geqslant \max\limits_{j}(m_{j1}, m_{j2})$. Отметим, что оператор дифференцирования на конечном отрезке является нетеровым оператором. Поэтому из нормальной разрешимости продифференцированной системы (24) будет следовать нормальная разрешимость исходной системы (22′). В результате дифференцирования система (22′) примет вид

$$\sum_{k=1}^{m} B_{j1}^{(0)}(0, x, \gamma_k(x, 0), 1) f_{k1}^{(m_0)}(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \beta_{jpk1}^{(1)}(x) f_{k1}^{(p)}(x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \beta_{jpk2}^{(1)}(x) f_{k2}^{(p)}(x) = \frac{d^{m_0-m_{j1}} g_{j1}^{(1)}(x)}{dx^{m_0-m_{j1}}}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad (24)$$

где $\beta_{jpk1}^{(1)}$, $\beta_{jpk2}^{(1)}$ — некоторые новые известные функции. Разрешим систему (24) относительно $f_{k1}^{(m_0)}(x)$. Получим

$$f_{k1}^{(m_0)}(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \beta_{kjp1}^{(2)}(x) f_{k1}^{(p)}(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \beta_{kjp2}^{(2)}(x) f_{j2}^{(p)}(x) + g_{j3}(x). \quad (25)$$

Проделаем теперь то же самое при $t = T$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{k2}(t, x)\Big|_{t=T} B_{j2}^{(0)}\left(T, x, \frac{\partial w_k}{\partial t}\Big|_{t=T}, \frac{\partial w_k}{\partial x}\Big|_{t=T}\right) f_{k2}^{(m_{j2})}\left(w_k(t, x)\Big|_{t=T}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j2}-1} \bar{\beta}_{jpk1}(x) f_{k1}^{(p)}(w_k(t, x)|_{t=T}) + \tag{26}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j2}-1} \bar{\beta}_{jpk2}(x) f_{k2}^{(p)}(w_k(t, x)|_{t=T}) = g_{j2}^{(1)}(x),$$

$$1 \leqslant j \leqslant m.$$

Здесь нет уже членов с $f_{k1}^{(m_{j2})}$, так как согласно (10) $\alpha_{k1}(t, x)|_{t=T} = 0$. Учитывая (4), в (26) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{m} B_{j2}^{(0)}(T, x, \gamma_k(x, T), 1)\left(\frac{\partial w_k(x, T)}{\partial x}\right)^{m_{j2}} f_{k2}^{(m_{j2})}(w_k(x, T)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j2}-1} \bar{\beta}_{jpk1}(x) f_{k1}^{(p)}(w_k(x, T)) + \tag{27}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j2}-1} \bar{\beta}_{jpk2}(x) f_{k2}^{(p)}(w_k(x, T)) = g_{j2}^{(1)}(x),$$

$$1 \leqslant j \leqslant m.$$

Потребуем, чтобы

$$\det \| B_{j2}^{(0)}(T, x, \gamma_k(x, T), 1)\|_{k,\, j=1}^{m} \neq 0. \tag{28}$$

Продифференцируем систему (27) $m_0 - m_{j2}$ раз. Получим

$$\sum_{k=1}^{m} B_{j2}^{(0)}(T, x, \gamma_k(x, T), 1)\left(\frac{\partial w_k(x, T)}{\partial x}\right)^{m_0} f_{k2}^{(m_0)}(w_k(x, T)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \bar{\beta}_{jpk1}^{(1)}(x) f_{k1}^{(p)}(w_k(x, T)) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \bar{\beta}_{jpk2}^{(1)}(x) f_{k2}^{(p)}(w_k(x, T)) =$$

$$= \frac{d^{m_0-m_{j2}} g_{j2}^{(1)}(x)}{dx^{m_0-m_{j2}}}, \tag{29}$$

$$1 \leqslant j \leqslant m.$$

Разрешим систему (29) относительно $f_{k2}^{(m_0)}(w_k(x, T))$, имеем

$$f_{k2}^{(m_0)}(w_k(x, T)) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \bar{\beta}_{kjp1}^{(2)}(x) f_{k1}^{(p)}(w_k(x, T)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \bar{\beta}_{kjp2}^{(2)}(x) f_{j2}^{(p)}(w_k(x, T)) + g_{j4}(x). \tag{30}$$

Отметим, что

$$\frac{\partial w_k(x,\ T)}{\partial x} \neq 0 \quad \text{при всех } x \in \Gamma. \tag{31}$$

Действительно, пусть рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка вида

$$\frac{\partial \mu(x,\ t)}{\partial t} - \gamma_k(x,\ t)\frac{\partial \mu(x,\ t)}{\partial x} - b(x,\ t)\,\mu(x,\ t) = 0, \tag{32}$$

где b — заданная функция переменных t, x. Покажем, что если $\mu(x,\ t) \neq 0$ для некоторого $t = t_0$, то $\mu(x,\ t) \neq 0$ для каждого t. Для этого сделаем замену переменных

$$t = t,\ y = w_k(x,\ t).$$

Обозначим $\mu(t,\ x) = \mu_0(t,\ y)$, $b(t,\ x) = b_0(t,\ y)$. Тогда уравнение (32) запишется в виде

$$\frac{\partial \mu_0(t,\ y)}{\partial t} - b_0(t,\ y)\,\mu_0(t,\ y) = 0.$$

Получили обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, зависящее от y как от параметра. Решение его имеет такой вид

$$\mu_0(t,\ y) = \mu_0(t_0,\ y)\exp\left(\int_{t_0}^{t} b_0(\tau,\ y)\,d\tau\right).$$

Отсюда следует, что $\mu_0(t,\ y) = \mu(t,\ x)$ отлично от нуля для всех t. Теперь, если продифференцировать уравнение (4) по x, получим

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial t\partial x} - \gamma_k(x,\ t)\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_k}{\partial x}\frac{\partial w_k}{\partial x} = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{4'}$$

Обозначим $\frac{\partial w_k(x,\ t)}{\partial t} = \mu_k(x,\ t)$. Тогда уравнение (4′) запишется в виде

$$\frac{\partial \mu_k(x,t)}{\partial t} - \gamma_k(x,\ t)\frac{\partial \mu_k(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_k(x,t)}{\partial x}\,\mu_k(x,\ t) = 0.$$

Учитывая условие (5), согласно вышесказанному, получаем, что $\frac{\partial w_k(t,\ x)}{\partial x} \neq 0$ для всякого $t \in [0,\ T]$. Следовательно, в (30) можно при каждом $1 \leqslant k \leqslant m$ сделать замену переменных (в силу теоремы о неявной функции)

$$y = w_k(x,\ T), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{33}$$

Таким образом, система (30) принимает следующий вид:

$$f_{k2}^{(m_0)}(y) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1}\tilde{\beta}_{kjp1}^{(2)}(y)\,f_{k1}^{(p)}(y) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1}\tilde{\beta}_{kjp2}^{(2)}(y)\,f_{j2}^{(p)}(y) + g_{j4}(y). \tag{30'}$$

Покажем, что система (25), (30) нормально разрешима. Обозначим через $F(x)$ вектор $(f_{11}(x), f_{21}(x), \cdots, f_{m1}(x), \cdots, f_{m2}(x))$. Проинтегрируем каждое уравнение системы (25), (30′) m_0 — раз, наложив на $F(x)$ конечное число условий

$$F^{(j)}(x_0) = 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m_0 - 1,$$

где x_0 — произвольная фиксированная точка на Г. Тогда система (25), (30′) примет вид

$$F(x) = TF + G, \tag{34}$$

где T — сглаживающий оператор, ord $T \leqslant -1$, а G — известная правая часть. Система (34) является нормально разрешимой (см., например, [10]). Следовательно, нормально разрешимой является и интегродифференциальная система (22′), (27). Таким образом, при выполнении конечного числа условий на правые части $f(x, t)$, $g_{j1}(x)$, $g_{j2}(x)$ существует решение $u(x, t)$, удовлетворяющее уравнению (1) и краевым условиям (3).

Прежде чем приступить к доказательству конечномерности пространства решений краевой задачи (1), (3) с нулевыми правыми частями

$$(A_1 A_2 + A_3)\, u(x, t) = 0. \tag{1″}$$

$$B_{j1} u(x, t)|_{t=0} = 0, \qquad B_{j2} u(x, t)|_{t=T} = 0, \tag{3″}$$

$$1 \leqslant j \leqslant m,$$

отметим следующий важный частный случай краевых условий (3), удовлетворяющих условию Шапиро-Лопатинского

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= g_{11}(x), \cdots, \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} = g_{m1}(x), \\ u|_{t=T} &= g_{12}(x), \cdots, \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=T} = g_{m2}(x), \end{aligned} \tag{3‴}$$

т. е. условий Дирихле. Проверим, что для задачи Дирихле выполнены условия Шапиро-Лопатинского (23) и (28). Действительно, определитель (23) имеет в данном случае вид

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{\partial w_1(x, 0)}{\partial t} & \dfrac{\partial w_2(x, 0)}{\partial t} & \cdots & \dfrac{\partial w_m(x, 0)}{\partial t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\dfrac{\partial w_1(x, 0)}{\partial t}\right)^{m-1} & \left(\dfrac{\partial w_2(x, 0)}{\partial t}\right)^{m-1} & \cdots & \left(\dfrac{\partial w_m(x, 0)}{\partial t}\right)^{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \gamma_1(x,\ 0) & \gamma_2(x,\ 0) & \cdots & \gamma_m(x,\ 0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\gamma_1(x,\ 0))^{m-1} & (\gamma_2(x,\ 0))^{m-1} & \cdots & (\gamma_m(x,\ 0))^{m-1} \end{vmatrix} =$$

$= \prod\limits_{m > i > j > 1} (\gamma_i(x,\ 0) - \gamma_j(x,\ 0))$, т. е является определителем Вандермонда, который $\neq 0$ так как $\gamma_i \neq \gamma_j$ при $i \neq j$. Здесь мы пользовались условиями (4) и (5). Точно так же при $t = T$ имеем

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \gamma_1(x,\ T) & \gamma_2(x,\ T) & \cdots & \gamma_m(x,\ T) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\gamma_1(x,\ T))^{m-1} & (\gamma_2(x,\ T))^{m-1} & \cdots & (\gamma_m(x,\ T))^{m-1} \end{vmatrix} =$$

$= \prod\limits_{1 < i < j < m} (\gamma_j(x,\ T) - \gamma_i(x,\ T))$. То есть снова получили определитель Вандермонда, который опять-таки $\neq 0$, так как $\gamma_i \neq \gamma_j$ при $i \neq j$ и всех $(x,\ t) \in \overline{D}$. Следовательно, задача Дирихле разрешима при конечном числе условий на правые части.

§ 2. Конечномерность пространства решений краевой задачи (1), (3) с нулевыми правыми частями

Рассмотрим следующую однородную задачу Дирихле

$$Au = (A_1 A_2 + A_3)\, u = 0, \tag{*}$$

$$\left. u\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \cdots = \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} = 0,$$

$$\left. u\right|_{t=T} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=T} = \cdots = \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=T} = 0. \tag{**}$$

Докажем, что краевая задача (*), (**) имеет лишь конечное число линейно независимых решений. Для этого рассмотрим краевую задачу для формально сопряженного к A оператора с нулевыми данными Дирихле:

$$A^* v = g, \tag{*'}$$

$$\left. v\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \cdots = \left.\frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} = 0,$$

$$\left. v\right|_{t=T} = \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=T} = \cdots = \left.\frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=T} = 0. \tag{*'*'}$$

Если $u(x,\ t)$ и $v(x,\ t)$ удовлетворяют нулевым условиям (*), (**), (*') и (*'*'), то

$$(Au, v) = (u, A^*v) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^T c_k \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \frac{\partial^{2m-1-k} v}{\partial t^{2m-1-k}} dt = (u, A^*v).$$

Итак

$$(Au, v) = (u, A^*v).$$

Ранее было доказано, что при выполнении конечного числа условий на правые части $f(x, t)$, $g_{j1}(x)$ и $g_{j2}(x)$ существует решение $u(x, t)$, удовлетворяющее уравнению (1) и краевым условиям (3). А так как оператор A^* имеет такой же вид, как и оператор A, то аналогично предыдущему можно доказать, что при любых гладких g, удовлетворяющих конечному числу условий ортогональности, существует решение задачи (*′), (*′*′). Итак, пусть $u(x, t)$ удовлетворяет (*) и (**). Тогда для любых $v(x, t)$, удовлетворяющих (*′*′), получим

$$(u, A^*v) = (Au, v) = 0.$$

Таким образом, $(u, A^*v) = 0$. Это означает, что $u(x, t)$ ортогонально к области значений оператора A^*. Ортогональное же дополнение к области значений оператора A^* конечномерно. Отсюда следует, что подпространство таких $u(x, t)$ также конечномерно. Как следствие из нормальной разрешимости задачи Дирихле вытекает следующая

Л е м м а 2. *Любое гладкое решение уравнения*

$$Au = (A_1A_2 + A_3)\, u = 0,$$

удовлетворяющее конечному числу условий, представимо в виде (21)

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{m} (\alpha_{k1} f_{k1} + \alpha_{k2} f_{k2}) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{2} T_{kl} f_{kl}, \tag{36}$$

$$\operatorname{ord} T_{kl} \leqslant -1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу нормальной разрешимости задачи Дирихле существует не более конечного числа линейно независимых решений однородной задачи (*), (**). Обозначим их $u_1(x, t), \cdots, u_{N_1}(x, t)$. Пусть теперь $u(x, t)$ — решение уравнения

$$(A_1A_2 + A_3)\, u(x, t) = 0. \tag{1″}$$

Наложим на $u(x, t)$ условия

$$(u, u_k) = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N_1, \tag{37}$$

и обозначим

$$g_{11}(x) = u|_{t=0}, \cdots, g_{m1}(x) = \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0},$$

$$g_{12}(x) = u|_{t=T}, \cdots, g_{m2}(x) = \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=T}.$$

Из нормальной разрешимости задачи (1″), (3″) следует, что при наложении на правые части в (3‴) конечного числа условий ортогональности вида

$$\sum_{i=1}^{m}(g_{i1}, \varphi_{ik}^{(1)}) + \sum_{i=1}^{m}(g_{i2}, \varphi_{ik}^{(2)}) = 0, \tag{38}$$

где $\varphi_{ik}^{(1)}$, $\varphi_{ik}^{(2)}$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$ — некоторые фиксированные функции, найдется функция вида (21)

$$\overset{\blacktriangle}{u}(x, t) = \sum_{k=1}^{m}(a_{k1}(x, t)f_{k1}(w_k(x, t)) + a_{k2}(x, t)f_{k2}(w_k(x, t))) + \\ + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{2} T_{kl}f_{kl}(w_k(x, t)), \tag{39}$$

удовлетворяющая (1″) и (3″).

Подчиним также и $\overset{\blacktriangle}{u}(x, t)$ условиям (37)

$$(\overset{\blacktriangle}{u}, u_k) = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N_1, \tag{40}$$

что сводится к дополнительным условиям на $u(x, t)$. Тогда $\overset{\blacktriangle}{u}(x, t) = u(x, t)$. Таким образом, если $u(x, t)$ — произвольное гладкое решение уравнения (1″) такое, что выполнено конечное число условий (37), (38), (40), то $u(x, t)$ может быть представлено в виде (21). Лемма 2 полностью доказана.

Перейдем теперь к доказательству конечномерности пространства решений краевой задачи (1), (3) с нулевыми правыми частями. Итак, пусть $u(x, t)$ — решение однородной системы

$$(A_1A_2 + A_3)u(x, t) = 0, \tag{1″}$$

$$B_{j1}u(x, t)|_{t=0} = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \\ B_{j2}u(x, t)|_{t=T} = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{3″}$$

В силу леммы 2 существует лишь конечное число линейно независимых решений уравнения (1″), которых нельзя представить в виде (36). Если же $u(x, t)$ представима в виде (36), то, подставив (36) в граничные условия (3″), получим в силу результатов § 1 нормально разрешимую систему относительно f_{k1}, f_{k2} $(1 \leqslant k \leqslant m)$ с правыми частями, равными нулю. Следовательно, линейно независимых решений уравнения (1″), представимых в виде (36), и удовлетворяющих нулевым граничным условиям (3″), также конечное число. Таким образом, пространство решений однородной краевой задачи (1″), (3″) конечномерно. Из результатов § 1 и § 2 вытекает нормальная разрешимость краевой задачи (1), (3).

§ 3. Теорема существования и единственности для уравнений специального вида

В этом параграфе мы рассмотрим задачу Дирихле для частного вида уравнения (1), что позволит доказать вместо нормальной разрешимости однозначную разрешимость краевой задачи. Пусть дано уравнение

$$A^*Au(x, t) = f(x, t) \quad \text{в } D, \tag{41}$$

где A — гиперболический оператор порядка m, характеристический многочлен главной части которого A_0 имеет вид

$$A_0(x, t, \lambda, \xi) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda - \gamma_k(x, t)\xi), \tag{42}$$

где, как и в § 1, $\gamma_k(x, t)$ — действительны и различны:

$$\gamma_k(x, t) \neq \gamma_j(x, t) \text{ при } k \neq j \quad \text{и всех} \quad (x, t) \in \overline{D};$$

A^* — формально сопряженный с A оператор, т. е. A^* сопряжен с A, в смысле теории распределений

$$\int_D Au\bar{v}\,dx - \int_D u\overline{A^*v}\,dx = 0 \qquad \forall u, v \in C_0^\infty(D).$$

Для уравнения (41) поставим следующую краевую задачу:

$$\left.\frac{\partial^{k-1} u(x, t)}{\partial t^{k-1}}\right|_{t=0} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial^{k-1} u(x, t)}{\partial t^{k-1}}\right|_{t=T} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, m). \tag{43}$$

Мы докажем существование обобщенного решения задачи (41) (43) методом эллиптической регуляризации. При этом обобщенное решение задачи (41), (43) для $f(x, t) \in H_0(D)$ получается как предел при $\varepsilon \to 0$ решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения

$$(A^*A + \varepsilon(-\Delta)^m)\, u(x, t) = f(x, t) \tag{44}$$

с граничным условием (43), где Δ — оператор Лапласа. Как известно задача Дирихле (44), (43) однозначно разрешима (см., например, [8]). Пусть $u_\varepsilon(x, t)$ — решение задачи (44), (43). Для доказательства существования предела при $\varepsilon \to 0$ для решений задачи (44), (43) установим равномерную по ε оценку нормы в соответствующем пространстве. Предварительно введем некоторые пространства функций. Пусть $r \geqslant 0$ — целое. Обозначим через $H_r(\Gamma)$ — пространство Соболева функций с нормой

$$[u]_r^2 = \sum_{k=0}^{r} \int_\Gamma \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|^2 dx.$$

Пространство $B_s(T)$ определим как замыкание функций $u(x, t)$ класса C^∞ на $D(x \in \Gamma,\ t \in [0, T])$ по норме

$$\|[u(x, t)]\|_s = \sum_{k=0}^{s} \max_{0<t<T} [D_t^k u(x, t)]_{s-k},$$

где $s > 0$ — целое, $[v]_r$ — норма в $H_r(\Gamma)$. Перейдем теперь к получению оценки для $u_\varepsilon(x, t)$, не зависящей от ε. Умножив обе части (44) скалярно на $u_\varepsilon(x, t)$, будем иметь

$$(A^* A u_\varepsilon + \varepsilon(-\Delta)^m u_\varepsilon, u_\varepsilon) = (f, u_\varepsilon). \tag{45}$$

Отсюда после интегрирования по частям, с учетом граничных условий (43), получим

$$(Au_\varepsilon, Au_\varepsilon) + \varepsilon((-\Delta)^m u_\varepsilon, u_\varepsilon) = (f, u_\varepsilon). \tag{45'}$$

Далее, интегрируя по частям и учитывая условия (43), для второго слагаемого в левой части последнего равенства получим

$$((-\Delta)^m u_\varepsilon, u_\varepsilon) > C\|u_\varepsilon\|_m^2 \geqslant 0,$$

где норма рассматривается в пространстве Соболева $H_m(D)$. Из (45') имеем

$$\|Au_\varepsilon\|_0^2 + \varepsilon\|u_\varepsilon\|_m^2 \leqslant |(f, u_\varepsilon)| \leqslant \|f\|_0 \|u_\varepsilon\|_0 \leqslant \alpha\|u_\varepsilon\|_0^2 + C_\alpha\|f\|_0^2, \tag{46}$$

где $\alpha < 1$ может быть выбрано сколько угодно малым, C_α — некоторая константа, зависящая от α. Обозначим через H_A замыкание гладких функций, удовлетворяющих условиям (43) в норме $\|Au\|_0$. Из теории задачи Коши для гиперболических уравнений следует справедливость оценки

$$\|[u_\varepsilon]\|_{m-1} \leqslant C\|Au_\varepsilon\|_0, \tag{47}$$

так как A — гиперболический оператор и u_ε при $t = 0$ удовлетворяет нулевым данным Коши (см., например, [2]). Таким образом, из (47), следует, что $H_A \subset B_{m-1}$, причем функции из H_A удовлетворяют нулевым граничным условиям (43). С другой стороны, очевидно, что

$$\|u_\varepsilon\|_0^2 \leqslant T\|[u_\varepsilon]\|_0^2 \leqslant T\|[u_\varepsilon]\|_{m-1}^2, \tag{48}$$

так как

$$\|u_\varepsilon\|_0^2 = \int_0^T\left(\int_\Gamma |u_\varepsilon|^2 dx\right)dt \leqslant T\cdot\max_t \int_\Gamma |u_\varepsilon|^2 dx = T\|[u_\varepsilon]\|_0^2.$$

Из оценок (46), (47) и (48) имеем

$$\alpha\|u_\varepsilon\|_0^2 + C_\alpha\|f\|_0^2 > \|Au_\varepsilon\|_0^2 = \frac{1}{2}\|Au_\varepsilon\|_0^2 + \frac{1}{2}\|Au_\varepsilon\|_0^2 \geqslant \frac{1}{2}\|Au_\varepsilon\|_0^2 + \frac{C_1}{2}\|u_\varepsilon\|_0^2,$$

или

$$\frac{1}{2}\|Au_\varepsilon\|_0^2 + \left(\frac{C_1}{2} - \alpha\right)\|u_\varepsilon\|_0^2 \leqslant C_\alpha\|f\|_0^2,$$

где C_1 — некоторая константа. Если мы возьмем $\alpha < \frac{C_1}{2}$, то

$$\|Au_\varepsilon\|_0 \leqslant 2\,C_\alpha\|f\|_0, \tag{49}$$

где C_α не зависит от ε. Неравенство (49) означает, что u_ε равномерно ограничены в норме пространства H_A.

Так как H_A — гильбертово пространство, то мы можем так выделить подпоследовательность, обозначаемую также через u_ε, чтобы она слабо сходилась при $\varepsilon \to 0$ к функции u_0 из пространства H_A. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в равенстве

$$((A^*A + \varepsilon(-\Delta)^m)\, u_\varepsilon,\ \varphi) = (f,\ \varphi)$$

или после интегрирования по частям в равенстве

$$(u_\varepsilon,\ (A^*A + \varepsilon(-\Delta)^m)^*\, \varphi) = (f,\ \varphi),$$

справедливом для любых $\varphi \in C_0^\infty(D)$, получим

$$(u_0,\ A^*A\varphi) = (f,\ \varphi),$$

то есть

$$A^*Au_0 = f \tag{50}$$

в обобщенном смысле.

Далее, так как $u_0 \in H_A \subset B_{m-1}$, то u_0 удовлетворяет условиям (43). Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если $f(x, t)$ принадлежит пространству $H_0(D)$, то краевая задача* (41), (43), *где A — гиперболический оператор, а A^* его формально сопряженный, имеет обобщенное решение в классе $B_{m-1}(D)$, удовлетворяющее нулевым граничным условиям* (43).

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 30.III.1973

Մ. Դ. ԴԱՎԹՅԱՆ. Ընդհանուր եզրային խնդիրներ բարձր կարգի կրկնակի բնութագրերով հիպերբոլական հավասարումների համար *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում են կրկնակի բնութագրերով հիպերբոլական հավասարումներ։ Բնութագրերի մեթոդի միջոցով, որը զուգակցված է ինտեգրալ հավասարումների տեխնիկայի հետ, ապացուցվում է ընդհանուր եզրային խնդրի նորմալ լուծելիությունը։

Ավելի նեղ դասի հավասարումների համար էլիպտիկ կանոնավորման մեթոդով ստացված է Դիրիխլեի խնդրի միարժեք լուծելիությունը։

M. D. DAVTYAN. *General boundary problems for hyperbolic equations of higher orders with double characteristics* (summary)

The paper concerns the hyperbolic equations with double characteristics, for which normal solvability of general boundary problem is proved by the method of characteristics combined with the technique of integral equations. For a special class of equations the solvability of the Dirichlet problem is obtained by the method of elliptic regularisation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Д. Давтян.* Краевые задачи для некоторых классов гиперболических уравнений с кратными характеристиками, АГПИ им. Х. Абовяна, „Сборник научных трудов аспирантов", № 5, выпуск 4, 1972, 187—193.
2. *Г. И. Эскин.* Задача Коши для гиперболических уравнений в свертках, Матем. сб., 74 (116), 1967, 262—297.
3. *Г. И. Эскин.* Системы псевдодифференциальных уравнений с простыми вещественными характеристиками, Матем. сб., 77 (119), 1968, 174—200.
4. *Г. И. Эскин.* Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными, Труды ММО, 21, 1970, 245—292.
5. *Р. Курант.* Уравнения с частными производными, Изд. „Мир", 1964.
6. *Л. Гординг.* Задача Коши для гиперболических уравнений, ИИЛ, 1961.
7. *С. Л. Соболев.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во Ленинградского ун-та, 1950.
8. *Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес.* Неоднородные граничные задачи и их приложения, Изд. „Мир", 1971.
9. *О. А. Олейник* и *Е.-В. Радкевич.* Ураненя второго порядка с неотрицательной характеристической формой, ВИНИТИ, сер. „Итоги науки", Мат. анализ, 1971.
10. *И. Г. Петровский.* Лекции по теории интегральных уравнений, М., Гостехиздат, 1953.