Н. А. ШИРОКОВ

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ
 НА ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ С НЕНУЛЕВЫМИ
 ВНЕШНИМИ УГЛАМИ

Настоящая работа является развернутым изложением заметки [1]. Пусть G — замкнутое множество точек комплексной плоскости z , содержащее не менее двух точек, дополнение G^1 которого есть односвязная область, содержащая точку ∞ ; $\bar{G}$ — множество внутренних точек множества $\bar{G}$; $z = \psi(t) = \gamma t + \gamma_0 + \gamma_1 t^{-1} + \dots$, $\gamma > 0$, — функция регулярная в области $1 < |t| < \infty$, однолистно отображающая эту область на G^1 ; $t = \varphi(z)$ — обратная функция для $z = \psi(t)$; $\Gamma = \Gamma_1 = \partial G$ — граница $\bar{G}$; $\Gamma_R = \psi(|t|=R)$, $R > 1$ — линия уровня G^1 ; $G_R^1 = \psi(|t| > R)$, $R \geq 1$, $G_R = cG_R^1$; $\rho(E_1, E_2)$ — расстояние между множествами E_1 и E_2 ; $\rho_R(z) = \rho(|z|, \Gamma_R)$; $\lambda = \lambda(z) = \rho(|z|, \Gamma)$; $z_0 = z_0(z) \in \Gamma$; $|z - z_0| = \lambda$; $\rho = \rho(z, n) = \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)$; $N > 0$ — произвольное фиксированное число; $K(z, \delta)$ — круг $\{z: |z - z_0| \leq \delta\}$; $K(z, \delta, \Delta)$, $\delta < \Delta$, — кольцо $\{z: \delta < |z - z_0| < \Delta\}$.

Далее рассматриваем такие множества $\bar{G}$, что $\psi(t)$ непрерывна при $1 \leq |t| < \infty$. Пусть $t_j = e^{i\theta_j}$, $-\pi < \theta_j \leq \pi$, $j = 1, \dots, l$, $l = 0, 1, \dots$ — различные точки окружности $|t|=1$; α_j , $0 < \alpha_j \leq 2$, $\alpha_j \neq 1$, $j = 1, \dots, l$ — фиксированные числа; h , $0 < h < \frac{1}{2} \min(|\theta_j - \theta_{j'}|, \frac{1}{2})$, $j \neq j'$ — фиксированное число;

$$u_j = \left\{ t: \left| \arg \frac{t_j}{t} \right| < h, |t| > 1 \right\}, j = 1, \dots, l,$$

и — дополнение $\bigcup_{j=1}^l u_j$ до области $|t| > 1$.

Будем говорить, что $\bar{G}$ имеет l (и только l) угловых точек $z_j = \psi(t_j)$ с внешними углами $\alpha_j \pi$, $j = 1, \dots, l$, если существуют две такие постоянные c_1 и c_2 , $0 < c_1 < c_2 < \infty$, что

$$\left. \begin{aligned} c_1 \left| 1 - \frac{t_j}{t} \right|^{2j-1} &\leq |\psi'(t)| \leq c_2 \left| 1 - \frac{t_j}{t} \right|^{2j-1}, t \in u_j, j = 1, \dots, l, \\ c_1 &\leq |\psi'(t)| \leq c_2, t \in u \\ \psi(t) &= \psi(t_j) + A_j(t) \left(1 - \frac{t_j}{t} \right)^{2j}, t \in u_j, j = 1, \dots, l, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $A_j(t)$ — функции, регулярные в $1 < |t| < \infty$ и непрерывные в точке t_j , $A_j(t_j) \neq 0$ и выбрана та ветвь функции $\left(1 - \frac{t_j}{t}\right)^{z_j}$, которая обращается в 1 при $t = \infty$.

Класс множеств $\bar{G}$ без кратных граничных точек, удовлетворяющих условиям (1), обозначим через $\Psi^*(c_1, c_2, t_1, a_1, \dots, t_l, a_l)$ (пишем $\bar{G} \in \Psi^*(c_1, c_2, t_1, a_1, \dots, t_l, a_l)$), если $l=0$, то обозначаем через $\Psi^*(c_1, c_2)$.

Пусть, далее, $\lambda' = \lambda'(z) = \min_{1 < k < l} |z - z_k|$, $z_j = z_j(z)$: $|z - z_j| = \lambda'$, $\rho' = \rho'(z, n) = \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_j)$; A — достаточно большое фиксированное число, зависящее лишь от области, которое будет определено в дальнейшем;

$$\bar{G}' = \bar{G} \cap \left[\bigcup_{\zeta \in \Gamma} K(\zeta, A \cdot \rho_{1+\frac{1}{n}}(\zeta)) \right], \quad G'' = \bar{G} \setminus \bar{G}';$$

$H > 0$ — достаточно малое фиксированное число, зависящее лишь от области, будет определено ниже, но, во всяком случае, $|z_s - z_t| > 4H$, $s \neq t$, $s, t = 1, \dots, l$;

$$\bar{G} = G'' \cap \left[\bigcup_{s=1}^l K(z_s, H) \right], \quad \bar{G} = G'' \setminus \bar{G}.$$

Пусть функция $f(z)$ аналитична в G и имеет в $\bar{G}$ r непрерывных производных ($r=0, 1, \dots$),

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{\zeta_1, \zeta_2 \in \bar{G} \\ |\zeta_1 - \zeta_2| < \delta}} |f^{(r)}(\zeta_1) - f^{(r)}(\zeta_2)|.$$

Тогда пишем $f \in A^{(r)} H^{\omega(\delta)}$.

Для областей рассматриваемого вида и $f \in A^{(r)} H^{\omega(\delta)}$ в [2] доказано существование полиномов $P_n(z)$ степени $\leq n$ таких, что для $z \in \Gamma$ выполнено условие

$$|f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| \leq A_\nu \rho^{r-\nu} \omega(\rho), \quad \rho = \rho_{1+\frac{1}{n}}(z), \quad \nu = 0, 1, \dots, r,$$

где A_ν зависят только от ν , $\bar{G}^*$. В настоящей работе приближение $f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)$ оценивается не только на границе, но и внутри области.

Теорема. Пусть $f \in A^{(r)} H^{\omega(\delta)}$, $\bar{G} \in \Psi^*(c_1, c_2, t_1, a_1, \dots, t_l, a_l)$. Тогда при любом фиксированном натуральном N и для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ существует полином $P_{n+1}^{(\nu)}(z)$ степени $\leq n$ такой, что

$$|f^{(\nu)}(z) - P_{n+1}^{(\nu)}(z)| \leq A_{1,\nu} \begin{cases} \rho^{r-\nu} \omega(\rho), & z \in \bar{G}^*, \quad \rho = \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0), \quad z_0 = z_0(z) \\ \frac{\rho^{r-\nu+N}}{\lambda^N} \omega(\rho) + \frac{\rho'^{r-\nu+N}}{\lambda'^N} \omega(\rho'), & z \in G'', \end{cases} \quad (2)$$

$$\nu = 0, 1, \dots, r,$$

где $A_{1,\nu}$ — постоянные, зависящие лишь от $\bar{G}$.

* Недавно появлялась работа В. К. Дзядька [3], в которой при $z \in \Gamma$ получена та же оценка при несколько иных условиях на множество $\bar{G}$, чем в [2].

З а м е ч а н и е. Оценку (2) можно переписать, как нетрудно видеть, следующим образом:

$$|f^{(v)}(z) - P_n^{(v)}(z)| \leq A_{1,v}' \left[\frac{\rho^{r-v+N}}{(\rho + \lambda)^N} \omega(\rho) + \frac{\rho'^{r-v+N}}{(\rho' + \lambda')^N} \omega(\rho') \right], \quad (2')$$

$$\rho = \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0), \quad \rho' = \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_j),$$

$$z_0 = z_0(z), \quad z_j = z_j(z),$$

где $z \in \bar{G}$, $A_{1,v}'$ — некая новая постоянная, зависящая лишь от $\bar{G}$. При этом правая часть (2) или (2') $\leq \text{const} \cdot \rho^{r-v} \omega(\rho)$, т. е. приближение полиномом в точке z не хуже, чем в точке $z_0 = z_0(z)$ (см. обозначения). Если же $\lambda \geq \varepsilon > 0$, то при достаточно большом N приближение в точке z лучше, чем в любой граничной точке.

Доказательству теоремы предположим ряд лемм, большинство из которых доказаны в [2].

О п р е д е л е н и е. Пусть на множестве E заданы функции $a > 0$ и $b > 0$. Будем писать $a \asymp b$, если существуют постоянные B_1 и B_2 , $0 < B_1 < B_2 < \infty$ такие, что $B_1 < \frac{a}{b} < B_2$. Будем писать $a < \cdot b$ или $b > a$, если существует постоянная $B < \infty$ такая, что $a < Bb$.

Л е м м а 1. Пусть $\zeta \in \Gamma_R$, $1 \leq R \leq 2$, $z \in \bar{G}$,

$$\Gamma \ni z_0 = z_0(z): |z - z_0| = \lambda. \quad \text{Тогда} \quad |\zeta - z| \asymp |\zeta - z_0| + \lambda.$$

Доказательство. Имеем $|\zeta - z| \leq |\zeta - z_0| + |z_0 - z| = |\zeta - z_0| + \lambda$.

Если $|\zeta - z_0| \leq 2\lambda$, то $|\zeta - z_0| + \lambda \asymp \lambda$, $|\zeta - z| \geq \lambda$, т. е. $|\zeta - z| \asymp |\zeta - z_0| + \lambda$; если $|\zeta - z_0| > 2\lambda$, то

$$|\zeta - z_0| + \lambda \asymp |\zeta - z_0|, \quad |\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - \lambda \geq \frac{1}{2} |\zeta - z_0|.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 2. (см. [2]). Пусть $z', z'' \in G_2 \cap G^1$, $t' = \varphi(z')$, $t'' = \varphi(z'')$, z_j — ближайшая к z'' угловая точка. Если $0 < \alpha_j < 2$, то

$$|z'' - z'| \asymp |t'' - t'| [|z'' - z_j|]^{1/\alpha_j} + |t'' - t'|^{2/\alpha_j - 1} \asymp$$

$$\asymp |t'' - t'| [|t'' - t_j| + |t'' - t'|]^{1/\alpha_j - 1},$$

$$|\psi'(t'')| \asymp \left| 1 - \frac{t_j}{t''} \right|^{2/\alpha_j - 1}.$$

Соответствующая оценка сверху имеет место и при $\alpha_j = 2$. Соответствующая оценка снизу для $\alpha_j = 2$ имеет место, если модуль приращения $\arg(z - z_j)$ при движении точки z от z' до z'' по некоторой кривой, соединяющей z' и z'' и лежащей в $\bar{G}^1$, не превосходит $2\pi - \delta$, где $\delta > 0$ фиксировано.

Лемма 3. Пусть $a, b, \lambda > 0$, $0 < \alpha \leq 2$, b — корень уравнения $b(a+b)^{\alpha-1} = \lambda$. Тогда имеем

$$b \asymp \begin{cases} \lambda a^{1-\alpha}, & \lambda < a^\alpha \\ \lambda^{1/\alpha}, & \lambda > a^\alpha \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что условия $b < a$ и $\lambda < a^\alpha$, и $b > a$ и $\lambda > a^\alpha$ эквивалентны (константы в знаках $<$ и $>$ зависят только от α). Но если $b < a$, то

$$a + b \asymp a, \quad b(a+b)^{\alpha-1} \asymp ba^{\alpha-1} \asymp \lambda, \quad b \asymp \lambda a^{1-\alpha},$$

если же $b > a$, то $a + b \asymp b$, $b(a+b)^{\alpha-1} \asymp b^\alpha \asymp \lambda$, $b \asymp \lambda^{1/\alpha}$. Лемма доказана.

Лемма 4 (см. [2]). Пусть $z', z'' \in \bar{G}$. Тогда существует спрямляемая простая кривая $\Lambda = \Lambda(z', z'') \subset \bar{G}$ с концами в точках z' и z'' такая, что

$$|\Lambda(z', z'')| \leq U|z' - z''|,$$

где U — некоторая постоянная, зависящая лишь от $\bar{G}$, а $|\Lambda|$ здесь (и в дальнейшем) — длина кривой Λ .

Лемма 5 (см. [2]). Пусть $z \in \Gamma$, $t = \varphi(z)$, t_j — ближайший к t прообраз угловой точки. Тогда существуют A_2 и A_3 , зависящие лишь от $\bar{G}$ такие, что

$$A_2(R-1)[|t - t_j| + R-1]^{a_j-1} \leq \rho_R(z) \leq A_3(R-1)[|t - t_j| + R-1]^{a_j-1}, \\ 1 \leq R \leq 2, \quad 0 < a_j \leq 2.$$

Приступим теперь к доказательству теоремы. Будем, не умаляя общности, считать, что в некоторой точке $z_* \in \bar{G}$ выполнено условие $f(z_*) = f'(z_*) = \dots = f^{(r)}(z_*) = 0$, ибо в противном случае включим в $P_n(z)$ слагаемое

$$f(z_*) + f'(z_*)(z - z_*) + \dots + \frac{f^{(r)}(z_*)}{r!} (z - z_*)^r.$$

Выберем достаточно большие натуральные k и m , условия на которые получим в процессе доказательства, и положим, как в [2],

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma} f(\zeta) \sum_{\rho=1}^k \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{\rho-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^\rho} d\zeta,$$

где

$$J_m(\theta) = J_{m,n}(\theta) = \frac{1}{\gamma_{m,n}} \left(\frac{\sin \left[\frac{n}{m} \right] \theta}{\sin \theta} \right)^m, \quad \gamma_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \left[\frac{n}{m} \right] \theta}{\sin \theta} \right)^m d\theta,$$

$$\zeta_{R,\theta} = \zeta_{R,\theta}(\zeta) = \psi(R e^{-i\theta} \varphi(\zeta)), \quad R = 1 + \frac{1}{n}.$$

Напишем формулу для разности

$$P_n(z) - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{(\zeta_{R,0} - \zeta)^k}{(\zeta_{R,0} - z)^k (\zeta - z)} d\zeta. \quad (3)$$

Продифференцировав правую и левую части (3) ν раз, получим выражение для $P_n^{(\nu)}(z) - f^{(\nu)}(z)$ через сумму слагаемых вида

$$a_{s,t} \int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{(\zeta_{R,0} - \zeta)^k}{(\zeta_{R,0} - z)^{k+t} (\zeta - z)^{1+s}} d\zeta, \quad (4)$$

$$s \geq 0, t \geq 0,$$

где $a_{s,t}$ — постоянные, $s + t = \nu$. Следовательно, достаточно оценить отдельное слагаемое вида (4). Имеем

$$\begin{aligned} M_{s,t}(z) &= \int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma} f(z) \frac{(\zeta_{R,0} - \zeta)^k}{(\zeta_{R,0} - z)^{k+t} (\zeta - z)^{1+s}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma} \frac{(\zeta_{R,0} - \zeta)^k}{(\zeta_{R,0} - z)^{k+t} (\zeta - z)^{1+s}} d\zeta \times \\ &\quad \times \int_{\Sigma} (\zeta - \tau)^{r-1} (f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(z)) d\tau + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma} P_r(z, \zeta) \frac{(\zeta_{R,0} - \zeta)^k}{(\zeta - z)^{1+s} (\zeta_{R,0} - z)^{k+t}} d\zeta = \\ &= M_{s,t,1} + M_{s,t,2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$P_r(z, \zeta) = f(z) + \frac{f'(z)}{1!} (\zeta - z) + \dots + \frac{f^{(r)}(z)}{r!} (\zeta - z)^r, \quad r \geq 1.$$

Если $r=0$, то $P_0(z, \zeta) = f(z)$, а в первом слагаемом в правой части (5) стоит $f(\zeta) - f(z)$. Второе слагаемое в правой части (5) оценивается (см. [2]) как $O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ и при $k > 2(N+r+1)$ меньше необходимой оценки (2). Поэтому в (5) осталось оценить лишь первое слагаемое. Для $z \in \bar{G}$ оценка (2) получается почти дословным проведением рассуждений из [2], поэтому ограничимся случаем $z \in G^{\circ}$.

Имеем

$$|M_{s,t,1}(z)| < \int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma} \frac{|\zeta_{R,0} - \zeta|^k |\zeta - z|^r \omega\left(\frac{|\zeta - z|}{\rho}\right)}{|\zeta - z|^{1+s} |\zeta_{R,0} - z|^{k+t}} |d\zeta|,$$

поскольку по лемме 4 для любых точек $z, \zeta \in \bar{G}$ существует путь $\Lambda(z, \zeta)$ с концами в этих точках и длиной $< |z - \zeta|$. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma} \frac{|\zeta_{R, \theta} - \zeta|^k |\zeta - z|^{r-j}}{|\zeta_{R, \theta} - z|^{k+t}} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |d\zeta| < \\ & < \int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma} \frac{|\zeta_{R, \theta} - \zeta|^{k+r-j}}{|\zeta_{R, \theta} - z|^{k+t}} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |d\zeta| + \\ & + \int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma} \frac{|\zeta_{R, \theta} - \zeta|^k}{|\zeta_{R, \theta} - z|^{k+v-r}} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |d\zeta|. \end{aligned} \quad (6)$$

Значит, нужно оценить выражение вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma} \frac{|\zeta_{R, \theta} - \zeta|^{k_1+\mu}}{|\zeta_{R, \theta} - z|^{k_1}} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |d\zeta|, \quad (7)$$

где $\mu = r - v$, $k_1 = k + v - r$ или $k_1 = k + t$. Далее для сокращения записи через k будем обозначать не только собственно k , но и k_1 , что не приведет к недоразумениям.

Допустим теперь, что $z \in \bar{G}$. Тогда для $\zeta \in K\left(z_{j_0}, \frac{H}{2}\right)$ имеем

$|\zeta - z| \geq \frac{H}{2}$, $j_0 = 1, \dots, l$. Ясно, что за счет выбора большого m и малого H можно рассматривать интегрирование по θ лишь на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon = \varepsilon(H)$ такое, что $\zeta_{R, \theta}$ лежат в круге $K\left(z_{j_0}, \frac{3}{4}H\right)$, если $\zeta \in K\left(z_{j_0}, \frac{H}{2}\right) \cap \Gamma$, $|\theta| \leq \varepsilon$, $R = 1 + \frac{1}{n}$, $n \geq n_0 = n_0(H)$ и $\zeta_{R, \theta}$ лежат вне кругов $\bigcup_{j=1}^l K\left(z_{j_0}, \frac{H}{4}\right)$, если ζ лежит вне кругов $K\left(z_{j_0}, \frac{H}{2}\right)$, $j_0 = 1, \dots, l$, $R = 1 + \frac{1}{n}$, $n > n_0$. Оценим внутренний интеграл в (7).

Имеем

$$\frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} < \frac{\omega(\lambda)}{\lambda}.$$

Если $|\zeta - z_{j_0}| < \frac{H}{2}$, то $|\zeta_{R, \theta} - z| > \frac{H}{4}$, $|\zeta_{R, \theta} - \zeta| < \theta^\alpha$, где $\alpha = \min_{1 \leq j < l} \alpha_j$,

$\theta_* = |\theta| + \frac{1}{n}$, что следует из леммы 2, и для внутреннего интеграла

(7) по $\Gamma \cap K\left(z_{j_0}, \frac{H}{2}\right)$ получится оценка $\theta_*^{(k+\mu)\alpha} \frac{\omega(\lambda)}{\lambda}$, что после интегрирования по θ даст

$$\frac{1}{n^{(k+\mu)\alpha}} \cdot \frac{\omega(\lambda)}{\lambda}. \quad (8)$$

Видно, что (8) при $k > \frac{2(N+r)}{\alpha}$ меньше правой части (2). Если

$$|\zeta - z_{j_0}| \geq \frac{H}{2}, \quad j_0 = 1, \dots, l, \quad \text{то } |\zeta_{R, \theta} - \zeta| \asymp \theta, \quad \zeta'_{R, \theta} \left(= \frac{d\zeta_{R, \theta}}{d\zeta} \right) \asymp 1,$$

и

$$\begin{aligned} & \int \frac{|\zeta_{R, \theta} - \zeta|^{k+\mu}}{|\zeta_{R, \theta} - z|^{k+\mu}} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |d\zeta| < \\ & \int \left\{ \bigcup_{j=1}^l K \left(z_j, \frac{H}{2} \right) \right\} \\ & < \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \theta^{k+\mu} \int \frac{d\zeta}{|\zeta_{R, \theta} - z|^{k+\mu}} < \\ & \int \left\{ \bigcup_{j=1}^l K \left(z_j, \frac{H}{2} \right) \right\} \\ & < \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \theta^{k+\mu} \int \frac{|d\zeta_{R, \theta}|}{|\zeta_{R, \theta} - z|^{k+\mu}} < \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \theta^{k+\mu} \frac{1}{\lambda^{k-1}}. \quad (9) \end{aligned}$$

Теперь, если $|z_0 - z_{j_0}| < \frac{H}{2}$ для какого-нибудь j_0 , то $\lambda = |z - z_0| \geq \frac{H}{2}$, и интегрирование (9) по θ опять дает величину меньшую, чем в (2); если же $|z_0 - z_{j_0}| \geq \frac{H}{2}$ для всех j_0 , то $\rho = \rho_R(z_0) \asymp \frac{1}{n}$, $\frac{\omega(\lambda)}{\lambda} < n \cdot \omega\left(\frac{1}{n}\right)$ и интегрирование (9) по θ дает

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1+\mu}}{\lambda^{k-1}},$$

что доказывает теорему в случае $z \in \bar{G}$.

Рассмотрим теперь случай $z \in G$. Пусть, для определенности, $|z - z_j| < H$. Отметим, что часть внутреннего интеграла в (7) по $|\zeta - z| > 2H$ после интегрирования по θ имеет оценку $\frac{1}{n^{(k+\mu)\alpha}}$, так что достаточно оценить

$$\int_{-s}^s J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma \cap K(z_j, 2H)} \frac{|\zeta_{R, \theta} - \zeta|^{k+\mu}}{|\zeta_{R, \theta} - z|^{k+\mu}} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |d\zeta|.$$

Если $t_0 = \varphi(z_0)$, $t_1 = \varphi(z_1)$, $t = \varphi(\zeta)$, то по лемме 2

$$\left. \begin{aligned} |\zeta_{R,0} - z| &\asymp |t_{R,0} - t| [|t - t_j| + |t_{R,0} - t|]^{a_j-1} < \theta_* (|t - t_j| + \theta_*)^{a_j-1} \\ |\zeta_{R,0} - z_0| &\asymp |t_{R,0} - t_0| [|t_0 - t_j| + |t_{R,0} - t_0|]^{a_j-1} \\ |\zeta'(t)| &\asymp |t - t_j|^{a_j-1}, \quad t_{R,0} = R e^{-i\theta} t \end{aligned} \right\} (10)$$

Учитывая лемму 1 и (10), нужный нам интеграл перепишем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma} \frac{\theta_*^{k+\mu} (|t-t_j| + \theta_*)^{(k+\mu)(a_j-1)} |t-t_j|^{a_j-1}}{[|t_{R,0} - t_0| (|t_0 - t_j| + |t_{R,0} - t_0|)^{a_j-1} + \lambda]^k} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |dt|, \quad (11)$$

$$\Gamma_* = \varphi(\Gamma \cap K(z_j, 2H)).$$

Далее придется рассматривать несколько случаев, которые мы будем нумеровать римскими цифрами. Подслучай в каждом случае будем нумеровать арабскими цифрами, а различные варианты каждого подслучая будем обозначать латинскими и греческими буквами.

Случай I. $a = |t_0 - t_j| > \frac{4A_2}{n}$, $A_2 = A_2(\bar{G})$ — большая постоянная,

1) $|t - t_0| < A_2 \theta_*$. Тогда

$$\begin{aligned} |t_{R,0} - t_0| (|t_0 - t_j| + |t_{R,0} - t_0|)^{a_j-1} &> \frac{1}{n} \left(a + \frac{1}{n} \right)^{a_j-1} \asymp \rho, \\ \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} &< \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} < \frac{\omega(\rho)}{\rho}. \end{aligned}$$

Нужный нам внутренний интеграл по какой-либо части $\gamma \subset \Gamma_*$ обозначим через $\int_{\gamma}$. Имеем

$$\int_{\Gamma_* \cap K(t_0, A_2 \theta_*)} < \frac{\theta_*^{k+\mu} \omega(\rho)}{\lambda^k \rho} \int_{\Gamma_* \cap K(t_0, A_2 \theta_*)} (|t - t_j| + \theta_*)^{(k+\mu)(a_j-1)} |t - t_j|^{a_j-1} |dt|.$$

а) $a > 2A_2 \theta_*$. Тогда $|t - t_j| \asymp a$,

$$\int_{\Gamma_* \cap K(t_0, A_2 \theta_*)} (|t - t_j| + \theta_*)^{(k+\mu)(a_j-1)} |t - t_j|^{a_j-1} |dt| < a^{(k+\mu)(a_j-1)} a^{a_j-1} \theta_*.$$

в) $a \leq 2A_2 \theta_*$. Тогда $|t - t_j| + \theta_* \asymp \theta_*$,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_* \cap K(t_0, A_2 \theta_*)} (|t - t_j| + \theta_*)^{(k+\mu)(a_j-1)} |t - t_j|^{a_j-1} |dt| &< \theta_*^{(k+\mu)(a_j-1)} \times \\ &\times \int_{\Gamma_* \cap K(t_0, A_2 \theta_*)} |t - t_j|^{a_j-1} |dt| < \theta_*^{(k+\mu)(a_j-1) + a_j}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$J_m(\theta) \asymp \begin{cases} n, & |\theta| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^{m-1}|\theta|^m}, & |\theta| > \frac{1}{n} \end{cases} \quad (12)$$

то интегрирование по θ в случае а) даст

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho} \frac{1}{\lambda^k} \frac{\alpha^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)}}{n^{k+\mu+1}} \asymp \frac{\rho^{k+\mu}}{\lambda^k} \omega(\rho), \quad (13)$$

а в случае в) интегрирование по θ производится по промежутку $\varepsilon + \frac{1}{n} > \theta_* \geq \frac{\alpha}{2A_2}$, т. е. интеграл меньше интеграла по промежутку

$|\theta| > \frac{\alpha}{4A_2} > \frac{1}{n}$ и, учитывая (12), получим

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma_0 \setminus K(t_0, A_2 \theta_*)} &< \frac{1}{n^{m-1}} \frac{\omega(\rho)}{\rho} \frac{1}{\lambda^k} \int_{\frac{\alpha}{4A_2}}^{\varepsilon} \theta^{(k+\mu+1)\alpha_j-m} d\theta < \\ < \frac{\omega(\rho)}{\rho} \frac{1}{\lambda^k} \frac{1}{n^{m-1}} \alpha^{(k+\mu+1)\alpha_j-m+1} = \frac{\omega(\rho)}{\rho} \frac{1}{\lambda^k n^{k+\mu+1}} \alpha^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)} \times \\ &\times \frac{1}{(n\alpha)^{m-k-\mu-2}}. \end{aligned}$$

Поскольку $n\alpha > 1$, то при $m > k + r + 2$ в этом случае имеем оценку

$$\frac{\rho^{k+\mu}}{\lambda^k} \omega(\rho). \quad (14)$$

Тогда (13) и (14) дают нужную оценку в случае 1).

2) $|t - t_0| \geq A_2 \theta_*$. Поскольку выбор A_2 в нашем распоряжении, мы его выбираем так, что $|t_{R,0} - t| \leq \frac{1}{2} A_2 \theta_*$, что, как легко видеть, сделать можно, тогда $|t_{R,0} - t_0| \asymp |t - t_0|$ и интересующий нас интеграл

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma_0 \setminus K(t_0, A_2 \theta_*)}$$

перепишется в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma_0 \setminus K(t_0, A_2 \theta_*)} &\frac{\theta_*^{k+\mu} (|t - t_l| + \theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} |t - t_l|^{\alpha_j-1}}{[|t - t_0|(|t_0 - t_l| + |t - t_0|^{\alpha_j-1} + \lambda)]^k} \times \\ &\times \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |d\zeta|. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть $b > 0$ — корень уравнения

$$b(a+b)^{\alpha_j-1} = \lambda.$$

Тогда $\lambda \geq A\rho$ влечет за собой: $b(a+b)^{\alpha_j-1} \geq A A_2 \frac{1}{n} \left(a + \frac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1}$,

где A_2 — постоянная из леммы 5, зависящая лишь от $\bar{G}$. Тогда, выбрав A_2 и зная A_3 , можно выбрать A настолько большим (и зависящим только от $\bar{G}$), что $b > \frac{1+2A_2}{n}$. Опять рассмотрим несколько случаев.

а) $b < A_2\theta_*$. Тогда знаменатель в (15) можно заменить на

$$|t-t_0|^k (|t_0-t_j| + |t-t_0|)^{k(\alpha_j-1)},$$

а) $a \geq 2A_2\theta_*$. Тогда при $|t-t_j| < A_2\theta_*$ будет

$$|t-t_0| \asymp a, |t-t_j| + \theta_* \asymp \theta_*,$$

$$\int_{\Gamma_0 \setminus K(t_0, A_2\theta_*)} \int_{\Gamma_0 \cap K(t_j, A_2\theta_*)} < \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \theta_*^{k+\mu} a_j \frac{1}{a^{k\alpha_j}} \int_{\Gamma_0 \cap K(t_j, A_2\theta_*)} |t-t_j|^{\alpha_j-1} |dt| < < \frac{\omega(\rho)}{\rho} \theta_*^{k+\mu+1} a_j a^{-k\alpha_j}. \tag{16}$$

При $A_2\theta_* \leq |t-t_j| \leq \frac{a}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} & |t-t_0| \asymp a, |t-t_j| + \theta_* \asymp |t-t_j|, \\ & \int_{\Gamma_0 \setminus K(t_0, A_2\theta_*)} \int_{\Gamma_0 \cap K(t_j, A_2\theta_*, \frac{a}{2})} < \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \theta_*^{k+\mu} a^{-k\alpha_j} \times \\ & \times \int_{\Gamma_0 \cap K(t_j, A_2\theta_*, \frac{a}{2})} |t-t_j|^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)} |dt| < \\ & < \begin{cases} \frac{\omega(\rho)}{\rho} \theta_*^{k+\mu} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1}, a_j > 1, \\ \frac{\omega(\rho)}{\rho} \theta_*^{k+\mu+1} a_j a^{-k\alpha_j}, a_j < 1. \end{cases} \tag{17} \end{aligned}$$

В случае $a_j < 1$ в (17) k предполагается настолько большим, что $k(1-a_j) > 1$.

При $|t-t_0| \leq \frac{a}{2}$ имеем $|t-t_j| \asymp a, |t-t_j| + \theta_* \asymp \theta_*, |t-t_0| + a \asymp a$,

в таком случае

$$\int_{\Gamma_0 \cap K(t_0, A_2\theta_*, \frac{a}{2})} < \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \theta_*^{k+\mu} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)} \int_{\Gamma_0 \cap K(t_0, A_2\theta_*, \frac{a}{2})} \frac{|dt|}{|t-t_0|^k} <$$

$$\left\langle \frac{\omega(\rho)}{\rho} \theta_*^{\mu+1} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)} \right\rangle \quad (18)$$

Если же $|t-t_0| > \frac{\alpha}{2}$ и $|t-t_j| > \frac{\alpha}{2}$, то

$$|t-t_0| \asymp |t-t_j| \asymp |t-t_j| + \theta_* \asymp |t-t_0| + \alpha,$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_* \setminus \left[K\left(t_0, \frac{\alpha}{2}\right) \cup K\left(t_j, \frac{\alpha}{2}\right) \right]} \left\langle \frac{\omega(\rho)}{\rho} \theta_*^{k+\mu} \int_{|t-t_0| > \frac{\alpha}{2}} |t-t_0|^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k} |dt| \right\rangle < \\ < \frac{\omega(\rho)}{\rho} \theta_*^{k+\mu} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1}. \end{aligned} \quad (19)$$

β) $\alpha < 2A_2 \theta_*$. Если $|t-t_j| \leq \frac{\alpha}{2}$, то $|t-t_0| \asymp \alpha$, $|t-t_j| + \theta_* \asymp \theta_*$,

$$\int_{\Gamma_* \setminus K\left(t_0, A_2 \theta_*\right) \cap K\left(t_j, \frac{\alpha}{2}\right)} \left\langle \frac{\omega(\rho)}{\rho} \theta_*^{k+\mu} a^j a^{-k\alpha_j} \theta_*^{\alpha_j} = \frac{\omega(\rho)}{\rho} \theta_*^{k+\mu+1} a^j a^{-k\alpha_j} \right\rangle \quad (20)$$

Если $|t-t_0| > \frac{\alpha}{2}$, $|t-t_j| > \frac{\alpha}{2}$, то $|t-t_j| \asymp |t-t_0|$ и при $|t-t_0| < 4A_2 \theta_*$ имеем $|t-t_0| + \alpha \asymp |t-t_0|$, $|t-t_j| + \theta_* \asymp \theta_*$,

$$\begin{aligned} \int_{\left[\Gamma_* \cap K\left(t_0, A_2 \theta_*\right) \setminus 4A_2 \theta_* \right] \setminus \left[K\left(t_0, \frac{\alpha}{2}\right) \cup K\left(t_j, \frac{\alpha}{2}\right) \right]} \left\langle \frac{\omega(\rho)}{\rho} \theta_*^{k+\mu} a^j \times \right. \\ \left. \times \int_{|t-t_0| > \frac{\alpha}{2}} |t-t_0|^{-(k-1)\alpha_j-1} |dt| \right\rangle < \frac{\omega(\rho)}{\rho} \theta_*^{k+\mu} a^j a^{-(k-1)\alpha_j}. \end{aligned} \quad (21)$$

Если же $|t-t_0| \geq 4A_2 \theta_*$, то $|t-t_j| + \theta_* \asymp |t-t_0|$ и

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_* \setminus K\left(t_0, 4A_2 \theta_*\right)} \left\langle \frac{\omega(\rho)}{\rho} \theta_*^{k+\mu} \int_{|t-t_0| > 4A_2 \theta_*} |t-t_0|^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k} |dt| \right\rangle < \\ < \frac{\omega(\rho)}{\rho} \theta_*^{k+\mu} \theta_*^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1} < \frac{\omega(\rho)}{\rho} \theta_*^{k+\mu} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Применим лемму 3 для завершения оценок в случае 2), а). Интегрирование ведется по интервалу $\theta_* \geq \frac{b}{A_2}$ или $\theta \geq \frac{b}{2A_2}$, поскольку A выбрано так, что $\frac{b}{2A_2} > \frac{1}{n}$. Если κ — какой-либо показатель у θ_* , участвующий в оценках (15)–(22), то

$$\int_{\frac{b}{2A_1}}^a J_m(\theta) \theta^x d\theta \asymp \frac{1}{n^{m-1}} b^{x-m+1}.$$

Если $x = v + \mu + 1$, $0 \leq v \leq k$, то соответствующая оценка имеет вид

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho} \frac{1}{n^{m-1}} b^{v+\mu+2-m} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-v}.$$

Если $b < a$ (т. е. $\lambda < a^{\alpha_j}$), то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^{m-1}} b^{v+\mu+2-m} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-v} < \frac{1}{n^{m-1}} b^{\mu+2-m} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)} \asymp \\ & \asymp \frac{1}{n^{m-1}} \lambda^{\mu+2-m} a^{(\mu+2-m)(1-\alpha_j)} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)} \asymp \frac{\rho^{m-1}}{\lambda^{m-\mu-2}} = \frac{\rho^{m_1+\mu+1}}{\lambda^{m_1}}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$m_1 = m - \mu - 2.$$

Если $b > a$ ($\lambda > a^{\alpha_j}$), то

$$\frac{1}{n^{m-1}} b^{v+\mu+2-m} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-v} \asymp \frac{1}{n^{m-1}} \lambda^{\frac{v+\mu+2-m}{\alpha_j}} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-v}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (\mu+1)(\alpha_j-1)-v &= \left(\frac{m-v-\mu-2}{\alpha_j} + \mu+1 \right) (\alpha_j-1) - \\ & - \left[(m-\mu-2) \frac{\alpha_j-1}{\alpha_j} + \frac{v}{\alpha_j} \right], \\ m-1 &= \frac{m-v-\mu-2}{\alpha_j} + \mu+1 + \left[(m-\mu-2) \frac{\alpha_j-1}{\alpha_j} + \frac{v}{\alpha_j} \right] \end{aligned}$$

и, если $\alpha_j > 1$, в силу $\lambda a > 1$ получим

$$\frac{1}{n^{m-1}} \lambda^{\frac{v+\mu+2-m}{\alpha_j}} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-v} < \frac{\rho^{m_2+\mu+1}}{\lambda^{m_2}}, \quad m_2 = \frac{m-v-\mu-2}{\alpha_j}. \quad (24)$$

Если $\alpha_j < 1$, то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^{m-1}} \lambda^{\frac{v+\mu+1-m}{\alpha_j}} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-v} = \frac{1}{n^{m-1}} a^{(m-1)(\alpha_j-1)} \frac{1}{\lambda^{m-\mu-2}} \times \\ & \times \left(\frac{a}{\lambda^{1/\alpha_j}} \right)^{(\mu+2-m)(\alpha_j-1)-v} < \frac{\rho^{m_3+\mu+1}}{\lambda^{m_3}}, \quad m_3 = m-1, \end{aligned} \quad (25)$$

в силу того, что $\frac{a}{\lambda^{1/\alpha_j}} < 1$ и $(\mu+2-m)(\alpha_j-1)-v > 0$. Если же $x = (v + \mu + 1) \alpha_j$, $v = k, k-1$, то интегрирование соответствующих оценок даст нам

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho} \frac{1}{n^{m-1}} b^{(v+\mu+1)a_j-m+1} a^{-va_j}. \quad (26)$$

Вновь, если $b < a$, то при $a_j > 1$ получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{m-1}} b^{(v+\mu+1)a_j-m+1} a^{-va_j} &< \frac{1}{n^{m-1}} a^{(m-1)(a_j-1)} \frac{1}{\lambda^{m-\mu-2}} \frac{\lambda^{(\mu+1)(a_j-1)}}{a^{(\mu+1)a_j(a_j-1)}} < \\ &< \frac{\rho^{m_4+\mu+1}}{\lambda^{m_4}}, \quad m_4 = m - \mu - 2, \end{aligned} \quad (27)$$

ибо $\lambda < a^j$.

Если же $b < a$, но $a_j < 1$, то

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^{m-1}} \lambda^{(v+\mu+1)a_j-m+1} a^{[(v+\mu+1)a_j-m+1](1-a_j)} a^{-va_j} = \\ &= \left[\frac{1}{n^{u+\mu+1}} a^{(u+\mu+1)(a_j-1)} \frac{1}{\lambda^u} \right] \left\{ \frac{1}{n^{m-u-\mu-2}} \cdot \lambda^{(v+\mu+1)a_j-m+1+u} \times \right. \\ &\quad \left. \times a^{[m-u-\mu-2-(v+\mu+1)a_j](a_j-1)-va_j} \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

При $2(k-1) \leq 2v < u < \frac{m}{2} - r - 1$ в выражении, стоящем в фигурных скобках, заменим λ на ρ и легко убедимся в том, что $a \cdot \lambda > 1$ влечет ограниченность его сверху, т. е. для всего выражения (28) получим оценку

$$\frac{\rho^{m_3+\mu+1}}{\lambda^{m_3}}, \quad m_3 = u. \quad (29)$$

Если же $b > a$ ($\lambda > a^j$) и $a_j > 1$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{m-1}} b^{(v+\mu+1)a_j-m+1} a^{-va_j} &\asymp \frac{1}{n^{m-1}} \lambda^{v+\mu+1-\frac{m-1}{a_j}} a^{-va_j} = \\ &= \frac{1}{n^{\frac{m-1}{a_j}-v}} a^{\left(\frac{m-1}{a_j}-v\right)(a_j-1)} \frac{1}{\lambda^{\frac{m-1}{a_j}-v-\mu-1}} \cdot \frac{1}{a n^{\frac{(m-1)a_j-1}{a_j}-v}} < \\ &< \frac{\rho^{m_5+\mu+1}}{\lambda^{m_5}}, \quad m_5 = \frac{m-1}{a_j} - v - \mu - 1. \end{aligned} \quad (30)$$

Если $a_j < 1$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{m-1}} \lambda^{v+\mu+1-\frac{m-1}{a_j}} a^{-va_j} &= \frac{1}{n^{m-1}} a^{(m-1)(a_j-1)} \frac{1}{\lambda^{m-\mu-2}} \cdot \frac{a^{(m-1)(1-a_j)-va_j}}{\lambda^{\frac{(m-1)(1-a_j)-v}{a_j}}} < \\ &< \frac{\rho^{m_7+\mu+1}}{\lambda^{m_7}}, \quad m_7 = m - 1. \end{aligned} \quad (31)$$

В результате оценок (23)—(31) заключаем, что в случае 2), а) для соответствующей части интеграла (15) имеем оценку

$$\omega(\rho) \frac{\rho^{\mu+N}}{\lambda^N},$$

где N — любое достаточно большое фиксированное число.

в) $b > A_2 \theta_*$. В этом случае внутривный интеграл в (15) разбиваем на два: на интеграл, взятый по $\Gamma_* \cap K(t_0, A_2 \theta_*, b)$ и на интеграл по $\Gamma_* \setminus K(t_0, b)$. В первом интеграле знаменатель заменим на λ^k и будем оценивать выражение

$$\frac{1}{\lambda^k} \int_{-1}^1 J_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma_* \cap K(t_0, A_2 \theta_*, b)} \theta_*^{k+\mu} (|t-t_j| + \theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} |t-t_j|^{\alpha_j-1} \frac{\omega(|z-z|)}{|z-z|} |dt|. \quad (32)$$

В случае $\alpha_j > 1$ имеем

$$(|t-t_j| + \theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} < |t-t_j|^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} + \theta_*^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}$$

и, если $a > 2b$, то $|t-t_j| \asymp a$

$$\int_{\Gamma_* \cap K(t_0, A_2 \theta_*, b)} |t-t_j|^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)} |dt| < b a^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)},$$

тогда для рассматриваемого выражения (32) получится оценка

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho \lambda^k} \left(\frac{1}{n^{k+\mu}} a^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)} b + \frac{1}{n^{(k+\mu)\alpha_j}} b a^{\alpha_j-1} \right).$$

Но $b \asymp \lambda a^{1-\alpha_j}$ и

$$\frac{1}{\lambda^k} \frac{1}{n^{k+\mu}} a^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)} b \asymp \frac{1}{\lambda^{k-1}} \frac{1}{n^{k+\mu}} a^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} \asymp \frac{\rho^{k+\mu}}{\lambda^{k-1}},$$

$$\frac{1}{\lambda^k} \frac{1}{n^{(k+\mu)\alpha_j}} b a^{\alpha_j-1} \asymp \frac{1}{\lambda^{k-1}} \frac{1}{n^{(k+\mu)\mu_j}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{k-1}} \frac{1}{n^{k+\mu}} a^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} \frac{1}{(na)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}} < \frac{\rho^{k+\mu}}{\lambda^{k-1}},$$

тогда выражение (32) будет меньше

$$\text{const} \cdot \omega(\rho) \frac{\rho^{k-1+\mu}}{\lambda^{k-1}}, \quad (33)$$

где const — постоянная, не зависящая от ρ и λ .

Если же $a \leq 2b$, то $|t-t_j| < b$ и

$$\int_{\Gamma_* \cap K(t_0, A_2 \theta_*, b)} |t-t_j|^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)} |dt| < b^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)+1},$$

следовательно выражение (32) оценится так:

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho \lambda^k} \left(\frac{1}{n^{k+\mu}} b^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)+1} + \frac{1}{n^{(k+\mu)\alpha_j}} b^{\alpha_j} \right).$$

Поскольку $b \asymp \lambda^{1/\alpha_j}$, получаем оценку

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho \lambda^k} \left(\frac{1}{n^{k+\mu}} \lambda^{(k+\mu+1) \frac{\alpha_j-1}{\alpha_j} + \frac{1}{\alpha_j}} + \frac{1}{n^{(k+\mu)\alpha_j}} \lambda \right),$$

а затем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{k+\mu} \lambda^{\frac{k}{\alpha_j} - (\mu+1) \frac{\alpha_j-1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_j}}} &= \frac{1}{n^{\frac{k+\mu}{\alpha_j}}} a^{(k+\mu) \frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}} \frac{1}{(na)^{(k+\mu) \frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}} \cdot \frac{1}{\lambda^{\frac{k-1}{\alpha_j} - (\mu+1) \frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}} < \\ &< \frac{\rho^{m_0+\mu+1}}{\lambda^{m_0}}, \quad m_0 = \frac{k-1}{\alpha_j} - (\mu+1) \frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}, \\ &\frac{1}{\lambda^{k-1} n^{(k+\mu)\alpha_j}} < \frac{1}{\lambda^{k-1}} \rho^{k+\mu}, \end{aligned}$$

и в результате нужный нам интеграл оценится как

$$\omega(\rho) \frac{\rho^{m_0+\mu}}{\lambda^{m_0}}, \quad m_0 = \frac{k-1}{\alpha_j} - (\mu+1) \frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}. \quad (34)$$

При $\alpha_j < 1$ и $a > 2b$ будем иметь $|t - t_j| \asymp a > \theta_*$, $|t - t_j| + \theta_* \asymp a$ и получим оценку для (32):

$$\begin{aligned} \frac{\omega(\rho)}{\rho \lambda^k} \int_{-\infty}^{\infty} J_m(\theta) \int_{\Gamma_0 \cap K(t_0, A_{\theta_0}, b)} (|t - t_j| + \theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} |t - t_j|^{\alpha_j-1} |dt| < \\ < \frac{\omega(\rho)}{\rho \lambda^k} \frac{1}{n^{k+\mu}} a^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)} b < \omega(\rho) \frac{\rho^{k-1+\mu}}{\lambda^{k-1}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Если же $a \leq 2b$, то

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0 \cap K(t_0, A_{\theta_0}, b)} (|t - t_j| + \theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} |t - t_j|^{\alpha_j-1} \frac{\omega(|z - z|)}{|z - z|} |dt| < \\ < \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \left(\int_{\Gamma_0 \setminus K(t_j, A_{\theta_0})} |t - t_j|^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)} |dt| + \theta_*^{(k+\mu)(\alpha_j-1)+\alpha_j} \right) < \\ < \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \theta_*^{(k+\mu)(\alpha_j-1)+\alpha_j}. \end{aligned}$$

После умножения на $\theta_*^{k+\mu}$ и интегрирования по θ получим оценку $\frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^k} \frac{1}{n^{(k+\mu+1)\alpha_j}}$. Но в рассматриваемом случае мы имеем

$$\lambda' = |z - z_j| \geq \lambda = |z - z_0|, \quad |z - z_j| \leq |z - z_0| + |z_0 - z_j| < \lambda + a^{\alpha_j} < \lambda,$$

т. е. в нашем случае $\lambda' \asymp \lambda$, $\frac{1}{n^{2j}} \asymp \rho_R(z_j) = \rho' < \cdot \lambda'$, $R = 1 + \frac{1}{n}$ по

выбору области $\tilde{G}$ и оценку можно переписать в виде

$$\frac{\omega(\lambda')}{\lambda'} \frac{\rho'^{k+\mu+1}}{\lambda'^k} < \omega(\rho') \frac{\rho'^{k+\mu}}{\lambda'^k}. \quad (37)$$

Следовательно, интеграл по $\Gamma_* \cap K(t_0, A_3 \theta_*, b)$ оценен, перейдем к оценке интеграла по $\Gamma_* \setminus K(t_0, b)$, который можно записать следующим образом:

$$\int_{-1}^1 \int_m(0) \theta^{k+\mu} d\theta \int_{\Gamma_* \setminus K(t_0, b)} \frac{(|t-t_j| + \theta_*)^{(k+\mu)(2j-1)} |t-t_j|^{2j-1}}{|t-t_0|^k (|t_0-t_j| + |t-t_0|)^{k(2j-1)}} \frac{\omega(|\zeta-z|)}{|\zeta-z|} |dt|. \quad (38)$$

а) $b < 2a$. Рассмотрим интеграл по $|t-t_j| < A_3 \theta_*$, где $A_3 = \frac{1}{2} A_2 A_4$,

а $A_4 < \frac{1}{2}$ будет определено ниже. Пусть $\tau \min |\zeta-z|$, когда ζ пробегает образ γ дуги $\Gamma_* \cap K(t_j, A_4 a)$ при отображении $\zeta = \psi(t)$. Пусть $\zeta_0 \in \gamma$, $|\zeta_0 - z| = \tau$. Существуют постоянные B_1 и B_2 , $0 < B_1 < B_2 < \infty$, зависящие только от области $\tilde{G}$, такие, что для $t \in \Gamma_*$ имеем $B_1 (|t-t_j|^{2j} \leq |\psi(t) - z| \leq B_2 |t-t_j|^{2j}$. Выберем $A_4 = \min \left(\left(\frac{1}{2} \frac{B_1}{B_2} \right)^{1/2j}, \frac{1}{2} \right)$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} |\zeta - z| &\leq |z_j - z| = \lambda', \quad |\zeta_0 - z| \asymp |z - z_0| + |z_0 - \zeta_0| \geq \lambda + |z_0 - z_j| - \\ &- |\zeta_0 - z_j| \geq B_1 a^{2j} - B_2 A_4^{2j} a^{2j} \geq \frac{1}{2} B_1 a^{2j} \asymp a^{2j} + \lambda \asymp \lambda'. \end{aligned}$$

Это влечет

$$\frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} < \frac{\omega(\lambda')}{\lambda'}, \quad \zeta \in \gamma.$$

Далее (напомним, что в рассматриваемом случае $|t-t_j| < A_3 \theta_*$)

$$|t-t_j| + \theta_* \asymp \theta_*, \quad |t-t_0| \asymp a \asymp |t-t_j| + a,$$

и весь интеграл (38) в данном случае оценится так:

$$\frac{\omega(\lambda')}{\lambda'} \frac{1}{n^{(k+\mu+1)2j}} a^{-2aj},$$

что, как мы видели, равносильно

$$\frac{\omega(\lambda')}{\lambda'} \frac{1}{n^{2j(k+\mu+1)}} \frac{1}{\lambda'^k} < \omega(\rho') \frac{\rho'^{k+\mu}}{\lambda'^k}. \quad (39)$$

Если $A_3 \theta_* < |t-t_j| \leq A_4 a$, то

$$|t-t_j| + \theta_* \asymp |t-t_j|, \quad |t-t_0| \asymp |t-t_0| + a \asymp a,$$

и мы имеем оценку

$$\frac{\omega(\lambda')}{\lambda'} \frac{1}{n^{k+\mu}} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1}, \quad \alpha_j > 1,$$

$$\frac{\omega(\lambda')}{\lambda'} \frac{1}{n^{(k+\mu+1)\alpha_j}} a^{-k\alpha_j}, \quad \alpha_j < 1,$$

но поскольку

$$\frac{1}{n^{k+\mu}} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1} = \frac{1}{n^{k+\mu}} a^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} \frac{1}{a^{(k-1)\alpha_j}} \asymp \frac{\rho^{k+\mu}}{\lambda'^{k-1}} < \frac{\rho^{k+\mu}}{\lambda^{k-1}}, \quad (40)$$

то из (39) и (40) заключаем, что и в этом случае есть нужная оценка. Если же $b < |t - t_0| \leq \frac{\alpha}{2}$, то $|t - t_j| \asymp \alpha \asymp |t - t_j| + \theta_*$, и мы получаем оценку

$$\frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \frac{1}{n^{k+\mu}} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)} b^{-k+1} \asymp \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \frac{1}{n^{k+\mu}} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)} -$$

$$- \lambda^{-k+1} a^{(k-1)(\alpha_j-1)} < \omega(\rho) \frac{\rho^{k-1+\mu}}{\lambda^{k-1}}. \quad (41)$$

Интеграл же по $|t - t_0| \geq \frac{\alpha}{2}$, $|t - t_j| \geq A_4 \alpha$ дает, в силу $|t - t_0| \asymp |t - t_j|$

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho} \frac{1}{n^{k+\mu}} a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1} < \omega(\rho) \frac{\rho^{k+\mu-1}}{\lambda^{k-1}}. \quad (42)$$

β) $b \geq 2\alpha$. В таком случае в интеграле (38) $|t - t_j| \asymp |t - t_0| \asymp |t - t_j| + \theta_* \asymp |t - t_0| + \alpha$, $\frac{\omega(|z - z|)}{|z - z|} < \frac{\omega(\lambda)}{\lambda}$, и (38) оценивается следующим образом:

$$\frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \int_{-z}^z J_m(\theta) \theta^{k+\mu} d\theta \int_{\Gamma_* \setminus K} |t - t_0|^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k} |dt| <$$

$$< \frac{1}{n^{k+\mu}} b^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1} \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \asymp \frac{1}{n^{k+\mu}} \lambda^{(\mu+1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j} - \frac{k-1}{\alpha_j}} \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} <$$

$$< \begin{cases} \omega(\rho) \frac{\rho^{k+\mu-1}}{\lambda^{k-1}}, & \alpha_j < 1, \\ \omega(\rho') \frac{\rho'^{m_{11}+\mu}}{\lambda'^{m_{11}}}, & \alpha_j > 1, \quad m_{11} = \frac{k-1}{\alpha_j} - (\mu+1) \frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}. \end{cases} \quad (43)$$

При выводе (43) мы воспользовались тем, что

$$\lambda' = |z - z_j| \asymp |z - z_0| + |z_0 - z_j| \asymp \lambda + a^{\alpha_j} \asymp \lambda.$$

Соотношения (13)–(43) доказывают теорему в случае I.

Случай II. $a = |t_0 - t_j| \leq \frac{4A_2}{n}$; это влечет эквивалентность $|t_{R,0} - t_0| \asymp |t_{R,0} - t_j|$, $|t_0 - t_j| + |t_{R,0} - t_0| \asymp |t_{R,0} - t_j|$, $\lambda \asymp \lambda'$ и нам нужно оценить интеграл

$$\int_{-i}^i f_m(\theta) d\theta \int_{\Gamma_*} \frac{\theta_*^{k+\mu} (|t-t_j| + \theta_*)^{(k+\mu)(a_j-1)} |t-t_j|^{a_j-1}}{(|t_{R,0} - t_j|^{a_j} + \lambda')^k} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |dt|. \quad (44)$$

1) $|t - t_j| < A_2 \theta_*$, тогда заменим в (44) знаменатель на

$$\lambda'^k, \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} < \frac{\omega(\lambda')}{\lambda'}$$
 и

$$\int_{\Gamma_* \setminus K(t_j, A_2 \theta_*)} (|t - t_j| + \theta_*)^{(k+\mu)(a_j-1)} |t - t_j|^{a_j-1} |dt| \asymp \theta_*^{(k+\mu)(a_j-1) + a_j},$$

(44) оценится как

$$\frac{1}{n^{(k+\mu+1)a_j}} \frac{1}{\lambda'^k} \frac{\omega(\lambda')}{\lambda'} < \omega(\rho') \frac{\rho'^{k+\mu}}{\lambda'^k}. \quad (45)$$

2) $|t - t_j| > A_2 \theta_*$, тогда $|t_{R,0} - t_j| \asymp |t - t_j|$, $|t - t_j| + \theta_* \asymp |t - t_j|$.

При $a_j < 1$ имеем

$$\int_{\Gamma_* \setminus K(t_j, A_2 \theta_*)} \frac{|t - t_j|^{(k+\mu+1)(a_j-1)}}{(|t - t_j|^{a_j} + \lambda')^k} |dt| < \frac{1}{\lambda'^k} \theta_*^{(k+\mu+1)(a_j-1)+1}. \quad (46)$$

Учитывая, что $\frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} < \frac{\omega(\rho')}{\rho'}$ и интегрируя (46) по θ , получим оценку

$$\frac{\rho'^{k+1}}{\lambda'^k} \omega(\rho'). \quad (47)$$

Если же $a_j > 1$, то

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_* \setminus K(t_j, A_2 \theta_*)} \frac{|t - t_j|^{(k+\mu+1)(a_j-1)}}{(|t - t_j|^{a_j} + \lambda')^k} |dt| &\asymp \frac{1}{\lambda'^k} \int_{\Gamma_* \setminus K(t_j, A_2 \theta_*, \lambda'^{1/a_j})} |t - t_j|^{(k+\mu+1)(a_j-1)} |dt| + \\ &+ \int_{\Gamma_* \setminus K(t_j, \lambda'^{1/a_j})} |t - t_j|^{(\mu+1)(a_j-1)-k} |dt| < \\ &< \frac{1}{\lambda'^k} \lambda'^{(k+\mu+1) \frac{a_j-1}{a_j}} + \frac{1}{a_j + \lambda'} \frac{((\mu+1)(a_j-1) - k + 1)}{a_j} \frac{1}{a_j}. \end{aligned}$$

После интегрирования по θ окончательно получим оценку

$$\frac{\omega(\rho')}{\rho'} \frac{1}{n^{k+\mu}} \lambda'^{(\mu+1) \frac{a_j-1}{a_j} - \frac{k-1}{a_j}} < \omega(\rho') \frac{\rho'^{m_{10}+\mu}}{\lambda'^{m_{10}}}, \quad (48)$$

$$m_{12} = \frac{k-1}{\alpha_j} - (\mu+1) \frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}.$$

Соотношения (44)–(48) доказывают теорему и в случае II, т. е. теорема доказана.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступила 15.III.1972

Ե. Ա. ՇԻՐՈՎՈՎ. Ոչ-զրոյական արտաքին անկյուններով փակ բազմաթյունների վրա ֆունկցիաների նավաստաշափ մոտարկման մասին (ամփոփում)

Ոչ-զրոյական արտաքին անկյուններ ունեցող վերջավոր թվով անկյունային կետերով G տիրույթի եզրի ողորկության վրա բավականաչափ թույլ սահմանափակումների դեպքում ապացուցված է

Թեորեմ. Դիցուք $f \in A^{(\nu)} H^{\omega(\delta)}(\bar{G})$. Այդ ժամանակ ցանկացած N -ի համար, $N > 0$, գոյություն ունի n -ից փոքր կամ հավասար կարգի $P_n(z)$ բազմանդամի այնպես որ z -ի համար, $z \in \bar{G}$, տեղի ունի

$$|f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| \leq A, \left[\frac{\rho^{\nu-\nu+N}}{(\rho+\lambda)^N} \omega(\rho) + \frac{\rho'^{\nu-\nu+N}}{(\rho'+\lambda')^N} \omega(\rho') \right],$$

որտեղ A, ν -ն կախված է միայն $\bar{G}$ -ից, ν -ից, N -ից, իսկ $\rho, \lambda, \rho', \lambda'$, մեծությունները միայն n -ից և $\bar{G}$ -ից. Բավականաչափ մեծ n -երի համար $\bar{G}$ -ի խիստ ներքին ընկնում z կետերում (այսինքն երբ $\lambda > \varepsilon_0 > 0$) մոտարկումը կլինի հավասարաչափ ավելի լավ, քան ցանկացած եզրային կետում.

N. A. SHIROKOV. On uniform approximation of functions on closed sets with nonzero exterior angles (summary)

Let G be a domain whose boundary $\hat{G}$ possesses a finite number of corner points with nonzero exterior angles. Under slight restrictions on the smoothness of $\hat{G}$ the following is proved:

Theorem. Let $f \in A^{(\nu)} H^{\omega(\delta)}(\bar{G})$. Then for an arbitrary $N > 0$ there exists a polynomial $p_n(z)$ of degree $< n$ such that for $z \in \bar{G}$ the condition

$$|f^{(\nu)}(z) - p_n^{(\nu)}(z)| \leq A, \left[\frac{\rho^{\nu-\nu+N}}{(\rho+\lambda)^N} \omega(\rho) + \frac{\rho'^{\nu-\nu+N}}{(\rho'+\lambda')^N} \omega(\rho') \right]$$

is satisfied, where A, ν depends only on $\bar{G}, \nu$ and N ; $\rho, \lambda, \rho', \lambda'$ depend only on $\bar{G}$ and z . When n is sufficiently large the approximation in the points z , which are situated strictly inside $\bar{G}$ (i. e. when $\lambda > \varepsilon_0 > 0$) will be better, than in any boundary point.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. А. Широков. О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами, ДАН СССР, 205, № 4, 1972, 798–800.
2. Н. А. Лебедев и Н. А. Широков. О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами, Известия АН Арм.ССР, сер. матем., VI, № 4, 1971, 311–341.
3. В. К. Дзядык. О применении обобщенных полиномов Фабера к приближению интегралов типа Коши и функций классов в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей, Укр. М. Ж., 24, вып. 1, 1972, 3–20.