ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 1, 1974 Математика

Х. О МОВСИСЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМАМ ХААРА И УОЛША

1°. Будем рассматривать на единичном квадрате $[0,1]\times[0,1]\equiv[0,1]^2$ двойные ряды Хаара и Уолша

$$\sum_{n,\, m=0}^{\infty} a_{nm}\, \chi_{nm}(x, y), \tag{1}$$

$$\sum_{n,\, m=0}^{\infty} a_{nm}\, W_{nm}(x, y). \tag{2}$$

Под сходимостью каждого из этих рядов будем понимать стремление его частичных сумм $S_{nm}(x, y)$ к пределу, когда n и m стремятся к бесконечности независимо друг от друга. Это обстоятельство мы будем обозначать так: $(n, m)\to\infty$.

В настоящей работе исследуются вопросы единственности сходящихся всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, рядов (1) и (2), когда сходимость понимается в указанном выше смысле.

Заметим, что за последние годы было получено много результатов о единственности обычных (одномерных) рядов по системам Хаара и Уолша (см. [1], [2], [3], [4], [5], [8]), являющихся или аналогами известных теорем о единственности тригонометрических рядов или же содержащих утверждения, которые в случае тригонометрической системы до сих пор не доказаны.

В случае двойных рядов, когда рассматривается сходимость по прямоугольникам, опубликована работа [6]. В этой работе очень сложным путем установлена

Теорема А. Если тригонометрический ряд

$$\sum a_{mn}\, e^{i(mx+ny)}$$

сходится всюду к конечной суммируемой функции $f(x, y)$, то он является рядом Фурье функции $f(x, y)$.

Отметим, что теорема А доказана только для двойных тригонометрических рядов. Эта теорема в частности содержит аналог теоремы Кантора для двойных тригонометрических рядов, который до указанной работы также не был установлен.

В работе [7] без доказательства сформулирована теорема о единственности многомерных рядов по системе Хаара, когда под сходимостью понимается сходимость по ограниченным прямоугольникам.

Нами установлена теорема о единственности двойных рядов Хаара, являющаяся распространением теоремы 3 работы [1] Ф. Г. Арутюняна и А. А. Талаляна на двойные ряды Хаара, а также в усиленной форме доказан аналог теоремы А для двойных рядов Уолша.

В доказательстве этих теорем использованы метод работы [1] и одна лемма о свойствах коэффициентов всюду сходящихся двойных рядов Уолша (см. лемму 2).

Полученные теоремы формулируются следующим образом.

Теорема 1. *Пусть ряд* (1) *обладает свойствами:*

a) *некоторая подпоследовательность* $S_{N_k M_k}(x, y)$ *частичных сумм ряда* (1) *сходится к суммируемой функции* $f(x, y)$ *всюду на единичном квадрате* $[0,1]^2$, *кроме, быть может, счетного множества точек;*

в) *для любой точки* $(x_0, y_0)\in[0,1]^2$ *и для любого фиксированного* m

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n_k m}}{\chi_{n_k m}(x_0, y_0)}=0, \tag{3}$$

где $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ — *все те номера, для которых* $\chi_{n_k m}(x_0, y_0)\neq 0$;

c) *для любой точки* $(x_0, y_0)\in[0, 1]^2$ *и для любого фиксированного* n

$$\lim_{l\to\infty}\frac{a_{n m_l}}{\chi_{n m_l}(x_0, y_0)}=0, \tag{4}$$

где $m_1<m_2<\cdots<m_l<\cdots$ — *все те номера, для которых* $\chi_{n m_l}(x_0, y_0)\neq 0$. *Тогда ряд* (1) *является рядом Фурье функции* $f(x, y)$ *по двойной системе Хаара.*

Теорема 2. *Пусть ряд* (2) *сходится всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, к суммируемой функции* $f(x, y)$. *Тогда ряд* (2) *является рядом Фурье функции* $f(x, y)$ *по двойной системе Уолша, т. е.*

$$a_{nm}=\iint\limits_{[0,1]^2} f(x, y)\, W_{nm}(x, y)\, dxdy,\ n,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots.$$

Теорема 2 получается как следствие из доказанной в настоящей работе 2 и формулируемой ниже теоремы.

Теорема 3. *Пусть ряд* (2) *обладает свойствами:*

1°. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}=0$ *при любом* m, $m=0,\ 1,\ 2,\cdots$,

$\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}=0$ *при любом* n, $n=0,\ 1,\ 2,\cdots$.

2°. *Для некоторых последовательностей натуральных чисел*

$$k_1<k_2<\cdots<k_l<\cdots,$$

$$l_1 < l_2 < \cdots < l_i < \cdots$$

частные суммы $S_{2^{k_i} 2^{l_i}}(x, y)$, $i = 1, 2, \cdots$, *ряда* (2) *при* $i \to \infty$ *сходятся к суммируемой функции* $f(x, y)$ *всюду, кроме, быть может, счетного множества точек. Тогда ряд* (2) *является рядом Фурье функции* $f(x, y)$ *по двойной системе Уолша, т. е.*

$$a_{nm} = \iint\limits_{[0,1]^2} f(x, y)\, W_{nm}(x, y)\, dxdy, \qquad n, m = 0, 1, 2, \cdots.$$

Эти теоремы верны также для n-кратных ($n > 2$) рядов по системам Хаара и Уолша. Доказательство теорем в общем случае совпадает с доказательствами теорем 1, 2, 3, сформулированных для двойных рядов.

Прежде чем приступить к доказательству теорем, напомним определения систем Хаара и Уолша.

Система Хаара

$$\chi_0^{(0)}(x),\ \chi_0^{(1)}(x),\ \chi_1^{(1)}(x),\ \chi_1^{(2)}(x),\ \cdots,\ \chi_n^{(1)}(x), \cdots, \chi_n^{(2^n)}(x), \cdots \tag{5}$$

определяется следующим образом:

$$\chi_0^{(0)}(x) = 1 \text{ при } x \in [0, 1],$$

$$\chi_0^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -1 \text{ при } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ 0 \text{ при } x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Для определения функций $\chi_n^{(k)}(x)$, $n = 1, 2, \cdots$, $k = 1, 2, \cdots, 2^n$, разделим отрезок $[0, 1]$ на 2^{n+1} равных частей и обозначим через $\Delta_n^{(i)}$, $i = 1, 2, \cdots, 2^{n+1}$, полученные открытые интервалы. Положим

$$\chi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n} \text{ при } x \in \Delta_n^{(2k-1)} \\ -\sqrt{2^n} \text{ при } x \in \Delta_n^{(2k)} \\ 0 \text{ при } x \in \Delta_n^{(i)},\ i \neq 2k-1, 2k,\ 1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}. \end{cases} \tag{6}$$

В точках $x = 0$ и $x = 1$ значения функции $\chi_n^{(k)}(x)$ полагаем равными ее значениям, соответственно, на интервалах $\Delta_n^{(1)}$ и $\Delta_n^{(2^{n+1})}$. В остальных точках значения функции $\chi_n^{(k)}(x)$ принимаются равными среднему арифметическому ее левого и правого пределов.

Через

$$\chi_0(x),\ \chi_1(x),\ \chi_2(x), \cdots, \chi_n(x), \cdots \tag{7}$$

обозначаются функции системы Хаара, перенумерованные в порядке (5).

Система Уолша

$$W_0^{(0)}(x),\ W_0^{(1)}(x),\ W_1^{(1)}(x),\ W_1^{(2)}(x),\cdots,\ W_n^{(1)}(x),\cdots,\ W_n^{(2^n)}(x),\cdots \tag{8}$$

определяется через систему Хаара (см. [9], стр. 155) следующим образом:

$$W_0^{(0)}(x)=\chi_0^{(0)}(x),\ W_0^{(1)}(x)=\chi_0^{(1)}(x), \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} W_1^{(1)}(x)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_1^{(1)}(x)+\chi_1^{(2)}(x)\right]\\ W_1^{(2)}(x)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_1^{(1)}(x)-\chi_1^{(2)}(x)\right]\end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

и вообще

$$W_n^{(k)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{l=1}^{2^n} a_{kl}^{(n)}\ \chi_n^{(l)}(x),\quad n=2, 3,\cdots;\ k=1, 2,\cdots, 2^n, \tag{11}$$

где выбранная определенным образом матрица $\|a_{kl}^{(n)}\|$ такова, что ее строки ортогональны и $a_{kl}^{(n)}=\pm 1$.

Через

$$W_0(x),\ W_1(x),\ W_2(x),\cdots,\ W_n(x),\cdots,$$

обозначаются функции системы Уолша, перенумерованные в порядке (8).

Двойные системы Хаара и Уолша соответственно определяются следующим образом:

$$\chi_{nm}(x, y)=\chi_n(x)\cdot\chi_m(y)\quad (x, y)\in[0, 1]^2,\ n, m=0, 1, 2,\cdots, \tag{12}$$

$$W_{nm}(x, y)=W_n(x)\cdot W_m(y)\quad (x, y)\in[0, 1]^2,\ n, m=0, 1, 2,\cdots. \tag{13}$$

II°. Доказательство теоремы 1. Пусть ряд

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} c_{nm}\chi_{nm}(x, y) \tag{14}$$

является рядом Фурье функции $f(x, y)$ по двойной системе Хаара, и пусть подпоследовательность $\{S_{N_k M_k}(x, y)\}$ частных сумм ряда (1) сходится к $f(x, y)$ всюду на квадрате $[0, 1]^2$, кроме, быть может, точек z_k, $k=1, 2,\cdots$, $z_k\in[0, 1]^2$.

Предполагая, что ряды (1) и (14) не совпадают, т. е. что $a_{nm}\neq c_{nm}$ хотя бы для одного номера (n, m), мы придем к противоречию, доказав, что тогда будет существовать точка $(\xi, \eta)\in[0, 1]^2$, отличная от всех точек z_k, $k=1, 2,\cdots$, в которой последовательность $S_{N_k M_k}(x, y)$ расходится.

Через $\Delta_{nm}^{(1)}$ и $\Delta_{nm}^{(3)}$ обозначим те наибольшие прямоугольники, внутри которых функция $\chi_{nm}(x, y)$ принимает положительные значения, а через $\Delta_{nm}^{(2)}$ и $\Delta_{nm}^{(4)}$ — те наибольшие прямоугольники, внутри которых функция $\chi_{nm}(x, y)$ принимает отрицательные значения.

Нетрудно проверить следующие свойства ряда (14).

I. Частные суммы ряда (14) на своих прямоугольниках постоянства равны интегральному среднему функции $f(x, y)$ в соответствующих прямоугольниках. Прямоугольником постоянства частной суммы $S_{nm}(x, y)$ мы называем всевозможные декартовые произведения, $\Delta_x \times \Delta_y$, где каждый интервал Δ_x является максимальным интервалом постоянства одновременно для всех функций $\chi_0(x), \chi_1(x), \cdots, \chi_n(x)$ и Δ_y является таким интервалом для всех функций $\chi_0(y), \chi_1(y), \cdots, \chi_m(y)$. Очевидно интервалов Δ_x будет n штук и Δ_y — m штук. Интервалы Δ_x (соответственно Δ_y) попарно не пересекаются и покрывают отрезок $[0, 1]$.

II. Частные суммы ряда (14) имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

III. Ряд (14) сходится в метрике L_1 к $f(x, y)$.

Обозначим через $\sigma_{nm}(x, y)$ частные суммы ряда (14). Из свойства III следует, что некоторая подпоследовательность последовательности $\sigma_{N_k M_k}(x, y)$ сходится почти всюду к $f(x, y)$. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{N_k M_k}(x, y) = f(x, y) \tag{15}$$

почти всюду на $[0, 1]^2$.

В силу условия а) теоремы 1 и (15) будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} [S_{N_k M_k}(x, y) - \sigma_{N_k M_k}(x, y)] = 0 \tag{16}$$

почти всюду на $[0, 1]^2$.

Далее, ряд (14) удовлетворяет условиям в) и с) теоремы 1. В самом деле

$$|c_{nm}| = \left| \iint_{[0,1]^2} f(x, y)\, \chi_{nm}(x, y)\, dxdy \right| \leqslant \max_{[0,1]^2} |\chi_{nm}(x, y)| \left[\iint_{\Delta_{nm}^{(1)}} |f(x, y)|\, dxdy + \right.$$

$$\left. + \iint_{\Delta_{nm}^{(2)}} |f(x, y)|\, dxdy + \iint_{\Delta_{nm}^{(3)}} |f(x, y)|\, dxdy + \iint_{\Delta_{nm}^{(4)}} |f(x, y)|\, dxdy \right].$$

Отсюда, так как $\operatorname{mes}(\Delta_{nm}^{(1)} \cup \Delta_{nm}^{(2)} \cup \Delta_{nm}^{(3)} \cup \Delta_{nm}^{(4)}) \to 0$ при $n + m \to \infty$, следует

$$\lim_{n+m\to\infty} \frac{c_{nm}}{\max\limits_{[0,1]^2} |\chi_{nm}(x, y)|} = 0, \tag{17}$$

из которого вытекает выполнение условий в) и с).

Пусть p_1 — наименьший номер n, для которого при некотором значении $m = m_0$, $c_{nm_0} \neq a_{nm_0}$, а q_1 — наименьший номер m, для которого $c_{p_1 m} \neq a_{p_1 m}$. Тогда будут выполнены следующие условия:

1) Внутри некоторого замкнутого прямоугольника вида $\overline{\Delta}_{p_1q_1}^{(i_{p_1q_1})}$ $i_{p_1q_1}=1$ или 2* частные суммы $S_{p_1q_1}(x, y)$ и $\sigma_{p_1q_1}(x, y)$ рядов (1) и (14) принимают отличные друг от друга постоянные значения.

2) При $p>p_1$ и $q>q_1$ функция $\chi_{pq}(x, y)$ может принимать отличные от нуля значения или только на прямоугольнике $\overline{\Delta}_{p_1q_1}^{(i_{p_1q_1})}$, или же только вне прямоугольника $\Delta_{p_1q_1}^{(i_{p_1q_1})}$.

Выполнение этих условий непосредственно следует из определения двойной системы Хаара и из выбора чисел p_1 и q_1.

Для доказательства теоремы 1 достаточно установить следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть x_0 и y_0 — произвольные точки отрезка* $[0, 1]$ *и через* $[x_0]$ *и* $[y_0]$ *соответственно обозначены отрезки прямых* $x=x_0$ *и* $y=y_0$, *лежащие в квадрате* $[0, 1]^2$.

Пусть p_0, q_0 — произвольные натуральные числа, для которых выполнены условия 1) *и* 2), *т. е.*

α) *Внутри некоторого прямоугольника* $\overline{\Delta}_{p_0q_0}^{(i_{p_0q_0})}$, *где* $i_{p_0q_0}=1$ *или* 2, *частные суммы* $S_{p_0q_0}(x, y)$ *и* $\sigma_{p_0q_0}(x, y)$ *рядов* (1) *и* (14) *принимают отличные друг от друга постоянные значения.*

β) *При $p>p_0$ и $q>q_0$ функция $\chi_{pq}(x, y)$ может принимать отличные от нуля значения или только на прямоугольнике* $\overline{\Delta}_{p_0q_0}^{(i_{p_0q_0})}$ *или только вне* $\Delta_{p_0q_0}^{(i_{p_0q_0})}$.

Тогда для любого $Q>0$ и натуральных чисел M, N можно определить числа $N_k\in\{N_k\}$ и $M_k\in\{M_k\}$, натуральные числа p и q, прямоугольник вида $\Delta_{pq}^{(i_{pq})}$, $i_{pq}=1$ или 2, которые удовлетворяют следующим условиям:

1°. $N_k>N$, $M_k>M$;

2°. *прямоугольник* $\overline{\Delta}_{pq}^{(i_{pq})}$ *не пересекается с отрезками* $[x_0]$ *и* $[y_0]$ *и* $\Delta_{pq}^{(i_{pq})}\subset\Delta_{p_0q_0}^{(i_{p_0q_0})}$;

3°. *частная сумма* $S_{N_kM_k}(x, y)$ *ряда* (1) *постоянна внутри прямоугольника* $\Delta_{pq}^{(i_{pq})}$ *и по абсолютной величине больше* Q;

4°. *для чисел p, q и прямоугольника $\Delta_{pq}^{(i_{pq})}$ выполнены условия* α) *и* β), *в которых вместо p_0 и q_0 взяты соответственно p и q.*

Доказательство. Сначала докажем существование чисел p_0', q_0' и прямоугольника $\Delta_{p_0'q_0'}^{(i_{p_0'q_0'})}$, $i_{p_0'q_0'}=1$ или 2, которые удовлетворяют условиям α) и β), где вместо p_0 и q_0 взяты соответственно p_0' и q_0', причем

---

* Когда $p_1=0$, $q_1=0$, прямоугольник $\overline{\Delta}_{p_1q_1}^{(i_{p_1q_1})}$ совпадает с квадратом $[0, 1]^2$. Здесь $\overline{\Delta}$ обозначает замыкание прямоугольника Δ.

$$\Delta^{(l'_{p_0}q'_0)}_{p'_0q'_0} \subset \Delta^{(l_{p_0}q_0)}_{p_0q_0} \text{ и } [x_0] \cap \bar{\Delta}^{(l'_{p_0}q'_0)}_{p'_0q_0} = \varnothing, \ [y_0] \cap \bar{\Delta}^{(l'_{p_0}q'_0)}_{p'_0q'_0} = \varnothing. \quad (18)$$

В силу условия α) имеем

$$S_{p_0q_0}(x, y) - \sigma_{p_0q_0}(x, y) = d \quad (19)$$

всюду внутри прямоугольника $\Delta^{(l_{p_0}q_0)}_{p_0q_0}$, где d — отличная от нуля постоянная.

Рассмотрим ряд

$$d + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_0} (a^{(l_i)}_{p_0 l j} - c^{(l_i)}_{p_0 l j}) \chi^{(l_i)}_{p_0 l}(x) \chi_j(y), \quad (20)$$

где $\chi^{(l_i)}_{p_i l}(x)$, $i=1, 2, \cdots$ — все те функции системы Хаара, которые равны нулю вне проекции прямоугольника $\Delta^{(l_{p_0}q_0)}_{p_0q_0}$ на ось x, а числа $a^{(l_i)}_{p_0 l j}$ и $c^{(l_i)}_{p_0 l j}$ — коэффициенты функций $\chi^{(l_i)}_{p_0 l}(x)\chi_j(y)$ в рядах (1) и (14) соответственно.

Положим

$$d_{ij} = a^{(l_i)}_{p_0 l j} - c^{(l_i)}_{p_0 l j}, \ i=1, 2, \cdots; \ j = 1, 2, \cdots, q_0 \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^{q_0} d_{ij} \chi_j(y) = b_i(y). \quad (22)$$

Ясно, что в точках проекции прямоугольника $\Delta^{(l_{p_0}q_0)}_{p_0q_0}$ на ось y функция $b_i(y)$ принимает постоянное значение. Поэтому в прямоугольнике $\Delta^{(l_{p_0}q_0)}_{p_0q_0}$ ряд (20) можно записать в виде

$$d + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(y) \chi^{(l_i)}_{p_0 l}(x), \quad (23)$$

где $b_i(y) \equiv \text{const}$ в точках проекции прямоугольника $\Delta^{(l_{p_0}q_0)}_{p_0q_0}$ на ось y.

Обозначим через $\Delta^{(1)}_{p_0q_0 l}$ и $\Delta^{(2)}_{p_0q_0 l}$ те прямоугольники, лежащие в $\Delta^{(l_{p_0}q_0)}_{p_0q_0}$, внутри которых функция $b_l(y)\chi^{(l_i)}_{p_0 l}(x)$, $i = 1, 2, \cdots$, принимает соответственно положительные и отрицательные значения. Очевидно найдется по крайней мере одна последовательность вложенных прямоугольников $\Delta^{(\gamma_k)}_{p_0q_0 l_k}$, $\gamma_k=1$ или 2, $k=1, 2, \cdots$, такая, что

$$\Delta^{(\gamma_1)}_{p_0q_0 l_1} \supset \Delta^{(\gamma_2)}_{p_0q_0 l_2} \supset \cdots \supset \Delta^{(\gamma_k)}_{p_0q_0 l_k} \supset \cdots, \ \text{mes}\, \Delta^{(\gamma_{k+1})}_{p_0q_0 l_{k+1}} = \frac{1}{2} \text{mes}\, \Delta^{(\gamma_k)}_{p_0q_0 l_k} \quad (24)$$

и

$$[x_0] \cap \bar{\Delta}^{(\gamma_k)}_{p_0q_0 l_k} \neq \varnothing, \ k=1, 2, \cdots. \quad (25)$$

Рассмотрим также последовательность прямоугольников $\Delta^{(\gamma'_k)}_{p_0q_0 l_k}$, $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k < \cdots$, где $\gamma'_k \neq \gamma_k$, $\gamma'_k = 1$ или 2.

А приори возможны только два случая:

I) Частные суммы ряда (23) с номерами i_k, $k=1, 2, \cdots$, обращаются в нуль внутри прямоугольников $\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}$ для всех $k=1, 2, \cdots$, т. е.

$$d+\sum_{l=1}^{i_k} b_l(y)\,\chi^{(l_0)}_{\cdot p_0 l}(x)=0 \tag{26}$$

всюду внутри $\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}$, $k=1, 2, \cdots$.

II) Равенство (26) имеет место не для всех $k=1, 2, \cdots$,

Из определения прямоугольников $\Delta^{(\tau_k)}_{p_0q_0\, i_k}$ и $\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}$ непосредственно видно, что

$$\Delta^{(\tau'_1)}_{p_0q_0\, i_1}\equiv\Delta^{(\tau'_1)}_{p_0q_0\, 1}\subset\Delta^{(l_{p_0q_0})}_{p_0q_0},\quad \Delta^{(\tau'_{k+1})}_{p_0q_0\, i_{k+1}}\subset\Delta^{(\tau_k)}_{p_0q_0\, i_k},\quad k=1, 2, \cdots, \tag{27}$$

$$\operatorname{mes}\Delta^{(\tau'_1)}_{p_0q_0\, i_1}=\frac{1}{2}\operatorname{mes}\Delta^{(l_{p_0q_0})}_{p_0q_0},\quad \operatorname{mes}\Delta^{(\tau'_{k+1})}_{p_0q_0\, i_{k+1}}=\frac{1}{2}\operatorname{mes}\Delta^{(\tau_k)}_{p_0q_0\, i_k},\quad k=1, 2, \cdots. \tag{28}$$

Далее, по определению $\Delta^{(i_k)}_{p_0q_0\, i_k}$ и $\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}$ суть те прямоугольники, внутри которых функция $b_l(y)\,\chi^{(l_0)}_{\cdot p_0 i_k}(x)$ принимает постоянные значения разных знаков, равных по абсолютной величине. Поэтому ясно, что в случае I), т. е. когда выполнены равенства (26), имеем

$$\left.\begin{aligned}&\max_{\Delta^{(\tau'_1)}_{p_0q_0\, i_1}}|b_{i_1}(y)\,\chi^{(l_0)}_{\cdot p_0 i_1}(x)|=\max_{\Delta^{(\tau'_1)}_{p_0q_0\, 1}}|b_1(y)\,\chi^{(l_0)}_{\cdot p_0 1}(x)|=|d|\\&\max_{\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}}|b_{i_k}\chi^{(l_0)}_{p_0 i_k}(x)|=2^{k-1}\cdot|d|,\ k=1, 2, \cdots\end{aligned}\right|. \tag{29}$$

В силу (22)

$$\max_{\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}}|\chi^{(l_0)}_{\cdot p_0 i_k}(x)\sum_{j=1}^{q_0} d_{i_k j}\chi_j(y)|=2^{k-1}\cdot|d|. \tag{30}$$

Следовательно, для каждого k, $k=1, 2, \cdots$ найдется номер j_k, $1\leqslant j_k\leqslant q_0$ такой, что

$$\max_{\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}}|d_{i_k j_k}\chi^{(l_0)}_{p_0 i_k}(x)\,\chi_{j_k}(y)|\geqslant\frac{2^{k-1}\cdot|d|}{q_0},\quad k=1, 2, \cdots. \tag{31}$$

Отсюда следует существование числа j_0, для которого имеет место соотношение

$$\max_{[0,1]^2}|d_{i_{k_l} j_0}\chi^{(l_0)}_{p_0 i_{k_l}}(x)\,\chi_{j_0}(y)|=\max_{\Delta^{(\tau'_{k_l})}_{p_0q_0\, i_{k_l}}}|d_{i_{k_l} j_0}\chi^{(l_0)}_{p_0 i_{k_l}}(x)\,\chi_{j_0}(y)|\geqslant\frac{2^{k_l-1}\cdot|d|}{q_0} \tag{32}$$

при $l=1, 2,\cdots$.

Пусть m_0 и ν_0—те числа, для которых $\chi_{p_0 j_l}^{(l_0)}(x)\equiv\chi_{m_0}^{(\nu_0)}(x)$. Тогда

$$\max_{[0,1]}|\chi_{p_0 i_1}^{(l_0)}(x)|=\sqrt{2^{m_0}}. \tag{33}$$

В силу (24), (27) и (28) имеют место также равенства

$$\max_{[0,1]}|\chi_{p_0 i_{k_l}}^{(l_0)}(x)|=\sqrt{2^{m_0+k_l-1}},\ l=1, 2,\cdots. \tag{34}$$

Сравнивая неравенства (32) с равенствами (33) и (34), получаем

$$\frac{|d_{i_{k_l},j_0}|}{\max\limits_{[0,1]^2}|\chi_{p_0 i_{k_l}}^{(l_0)}(x)\chi_{j_0}(y)|}\geqslant\frac{|d|}{q_0\cdot 2^{m_0}},\ l=1, 2,\cdots. \tag{35}$$

Пусть $y_0\in\{y;\ \chi_{j_0}(y)\neq 0\}$ — некоторая двоично-иррациональная точка. В том случае, когда x_0 не является двоично-рациональной точкой, из (35) следует, что

$$\frac{|d_{i_{k_l},j_0}|}{|\chi_{p_0 i_{k_l}}^{(l_0)}(x_0)\chi_{j_0}(y_0)|}>\frac{|d|}{q_0\cdot 2^{m_0}},\quad l=1, 2,\cdots. \tag{36}$$

Если же x_0—двоично-рациональная точка, то из определения значений функций системы Хаара в таких точках непосредственно следует, что в точке (x_0, y_0) тоже выполняются неравенства (36).

С другой стороны, очевидно, что ряд

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}(a_{nm}-c_{nm})\chi_{nm}(x, y) \tag{37}$$

удовлетворяет условиям в) и с) теоремы 1, так как он представляет собой разность рядов (1) и (14), для которых эти условия выполнены. Поэтому будем иметь

$$\lim_{l\to\infty}\frac{|d_{i_{k_l},j_0}|}{|\chi_{p_0 i_{k_l}}^{(l_0)}(x_0)\chi_{j_0}(y)|}=0, \tag{38}$$

что противоречит соотношению (36). Таким образом, случай I) не имеет места.

Допустим, что имеет место случай II). Пусть $k=s$ — наименьший номер, для которого равенство (26) не выполнено. Тогда из определения прямоугольников $\Delta_{p_0 j_0 i_k}^{(\tau_k')}$ следует, что

$$d+\sum_{l=1}^{i_s}b_l(y)\chi_{p_0 l}^{(l_0)}(x)=d' \tag{39}$$

всюду внутри прямоугольника $\bar{\Delta}_{p_0 j_0 i_s}^{(\tau_s')}$, где d' — отличная от нуля постоянная. Пусть t — тот номер, для которого функция $\chi_{p_0 i_s}^{(l_s)}(x)$ совпадает с функцией $\chi_t(x)$. Тогда прямоугольник $\Delta_{p_0 q_0 i_s}^{(\gamma_s')}$ будет иметь вид $\Delta_{tq_0}^{(\gamma_{tq_0})}$, $\gamma_{tq_0}=1$ или 2.

Из условия β) леммы 1, равенства (19), определения функций $\chi_{p,i}^{(l_s)}(x)$ и чисел $a_{p_s ij}^{(l_s)}, c_{p_s ij}^{(l_s)}$ следует, что частная сумма ряда (37) с номером (t, q_0) внутри прямоугольника $\Delta_{tq_0}^{(\gamma_{tq_0})}$ принимает значение d' (см. (39)), т. е.

$$S_{tq_0}(x, y)-\sigma_{tq_0}(x, y)=d'\neq 0 \tag{40}$$

всюду внутри прямоугольника $\Delta_{tq_0}^{(\gamma_{tq_0})}$, причем $\Delta_{tq_0}^{(\gamma_{tq_0})}\subset\Delta_{p_0q_0}^{(l_{p_0q_0})}$.

Можно считать, что число t и прямоугольник $\Delta_{tq_0}^{(\gamma_{tq_0})}$ помимо свойства (40) обладают также свойством

$$[x_0]\cap\bar{\Delta}_{tq_0}^{(\gamma_{tq_0})}=\varnothing.$$

В самом деле, если бы имело место $[x_0]\cap\Delta_{tq_0}^{(\gamma_{tq_0})}\neq\varnothing$, то точка $x=x$ была бы правым или левым концом проекции прямоугольника $\Delta_{tq_0}^{(\gamma_{tq_0})}$ на ось x и тогда дословным повторением предыдущих рассуждений, где вместо чисел p_0, q_0 и прямоугольника $\Delta_{p_0q_0}^{(l_{p_0q_0})}$ взяты, соответственно числа t, q_0 и прямоугольник $\Delta_{tq_0}^{(\gamma_{tq_0})}$, определим число $p_0'>t$ и прямоугольник $\Delta_{p_0'q_0}^{(\gamma_{p_0'q_0})}$, $\Delta_{p_0'q_0}^{(\gamma_{p_0'q_0})}\subset\Delta_{tq_0}^{(\gamma_{tq_0})}$ такие, что $[x_0]\cap\bar{\Delta}_{p_0'q_0}^{(\gamma_{p_0'q_0})}=\varnothing$ и выполнено (40) при $t=p_0'$.

Повторением тех же рассуждений относительно переменной y, определим число $q_0'>q_0$ и прямоугольник $\Delta_{p_0'q_0'}^{(\gamma_{p_0'q_0'})}$ такие, что

$$\Delta_{p_0'q_0'}^{(\gamma_{p_0'q_0'})}\subset\Delta_{p_0'q_0}^{(\gamma_{p_0'q_0})},\quad [y_0]\cap\Delta_{p_0'q_0'}^{(\gamma_{p_0'q_0'})}=\varnothing$$

и

$$S_{p_0'q_0'}(x, y)-\sigma_{p_0'q_0'}(x, y)=c\neq 0$$

всюду внутри прямоугольника $\bar{\Delta}_{p_0'q_0'}^{(\gamma_{p_0'q_0'})}$.

Таким образом, взяв $\Delta_{p_0'q_0'}^{(l_{p_0'q_0'})}\equiv\Delta_{p_0'q_0'}^{(\gamma_{p_0'q_0'})}$, имеем

$$\Delta_{p_0'q_0'}^{(l_{p_0'q_0'})}\subset\Delta_{p_0q_0}^{(l_{p_0q_0})},\quad [x_0]\cap\bar{\Delta}_{p_0'q_0'}^{(l_{p_0'q_0'})}=\varnothing,\quad [y_0]\cap\bar{\Delta}_{p_0'q_0'}^{(l_{p_0'q_0'})}=\varnothing, \tag{41}$$

$$S_{p_0' q_0'}(x, y) - \sigma_{p_0' q_0'}(x, y) = c \tag{42}$$

всюду внутри $\overline{\Delta}^{\left(l,\, p_0',\, q_0'\right)}_{p_0,\, q_0}$, где c — отличная от нуля постоянная.

Ясно, что прямоугольник $\overline{\Delta}^{\left(l,\, p_0',\, q_0'\right)}_{p_0,\, q_0}$ не содержит точки (x_0, y_0) и обладает свойствами α) и β), где вместо p_0 и q_0 взяты соответственно p_0' и q_0'.

Рассмотрим частные суммы $S_{nm}(x, y)$ и $\sigma_{nm}(x, y)$ рядов (1) и (14), где $n > p_0'$, $m > q_0'$ внутри прямоугольника $\Delta^{\left(l,\, p_0',\, q_0'\right)}_{p_0,\, q_0}$.

Обозначим

$$S^*_{nm}(x, y) = S_{nm}(x, y) - S_{p_0' q_0'}(x, y),\ \sigma^*_{nm}(x, y) = \sigma_{nm}(x, y) - \sigma_{p_0' q_0'}(x, y). \tag{43}$$

Тогда при $N_k > p_0'$, $M_k > q_0'$ будем иметь

$$S_{N_k M_k}(x, y) = S^*_{N_k M_k}(x, y) + S_{p_0' q_0'}(x, y),\ \sigma_{N_k M_k}(x, y) =$$
$$= \sigma^*_{N_k M_k}(x, y) + \sigma_{p_0' q_0'}(x, y). \tag{44}$$

Пусть $Q > 0$, M и N — числа, фигурирующие в формулировке леммы. Возьмем

$$k_0 > p_0',\ k_0 > q_0',\ N_{k_0} > N,\ M_{k_0} > M. \tag{45}$$

Мы утверждаем, что неравенства

$$|S_{N_k M_k}(x, y)| \leqslant Q + |\sigma_{N_k M_k}(x, y)|,\ k \geqslant k_0 \tag{46}$$

не могут выполняться почти всюду на прямоугольнике $\Delta^{\left(l,\, p_0',\, q_0'\right)}_{p_0,\, q_0}$.

В самом деле, из свойства II ряда (14) следует, что функции $\sigma_{N_k M_k}(x, y)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на прямоугольнике $\Delta^{\left(l,\, p_0',\, q_0'\right)}_{p_0,\, q_0}$. Если бы каждое из неравенств (46) выполнялось почти всюду на $\Delta^{\left(l,\, p_0',\, q_0'\right)}_{p_0,\, q_0}$, то функции $S_{N_k M_k}(x, y)$, $k \geqslant k_0$, тоже имели бы равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на прямоугольнике $\Delta^{\left(l,\, p_0',\, q_0'\right)}_{p_0,\, q_0}$. Тогда в силу (16) и по теореме Витали о переходе к пределу под знаком интеграла мы имели бы

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{\Delta^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}} [S_{N_k M_k}(x, y) - \sigma_{N_k M_k}(x, y)]\, dxdy = 0. \tag{47}$$

Так как

$$\iint\limits_{\Delta^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}} S^{*}_{N_k M_k}(x, y)\, dxdy = 0, \qquad \iint\limits_{\Delta^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}} \sigma^{*}_{N_k M_k}(x, y)\, dxdy = 0,$$

то в силу (42) и (44)

$$\iint\limits_{\Delta^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}} [S_{N_k M_k}(x, y) - \sigma_{N_k M_k}(x, y)]\, dxdy = c\cdot \mathrm{mes}\, \Delta^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0} \neq 0, \ k \geqslant k_0,$$

которое противоречит равенству (47).

Пусть $k \geqslant k_0$ — наименьшее число, для которого не выполнено неравенство (46), т. е. неравенство

$$|S_{N_k M_k}(x, y)| > Q + |\sigma_{N_k M_k}(x, y)| \tag{48}$$

имеет место на некотором подмножестве положительной меры прямоугольника $\Delta^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}$.

Пусть $2^{r_k} \leqslant N_k < 2^{r_k+1}$, $2^{s_k} \leqslant M < 2^{s_k+1}$. Тогда, очевидно, неравенство (48) будет выполняться на некотором прямоугольнике вида $\Delta^{(lpq)}_{pq} \subset \Delta^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}$, являющемся прямоугольником постоянства функции $\chi_{pq}(x, y)$. $2^{r_k-1} < p < 2^{r_k+1}$, $2^{s_k-1} < q < 2^{s_k+1}$.

Найденные числа N_k, M_k и прямоугольник $\Delta^{(lpq)}_{pq}$ удовлетворяют требованиям леммы 1.

Свойство 1° вытекает из (45) и из того, что $k \geqslant k_0$. Свойство 2° вытекает из (41) и из того, что $\Delta^{(lpq)}_{pq} \subset \Delta^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}$. Свойство 3° следует из выбора прямоугольника $\Delta^{(lpq)}_{pq}$ и из (48). Из выбора прямоугольника $\Delta^{(lpq)}_{pq}$ также вытекает, что

$$\sigma_{pq}(x, y) = \sigma_{N_k M_k}(x, y) \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(lpq)}_{pq}, \tag{49}$$

$$S_{pq}(x, y) = S_{N_k M_k}(x, y) \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(lpq)}_{pq}. \tag{50}$$

Так как частные суммы $S_{pq}(x, y)$ и $\sigma_{pq}(x, y)$ постоянны на прямоугольнике $\Delta_{pq}^{(l_{pq})}$, то из (48) следует, что эти постоянные отличны друг от друга. Следовательно числа p, q и прямоугольник $\Delta_{pq}^{(l_{pq})}$ удовлетворяют условию α) леммы, где положено $p_0=p$ и $q_0=q$.

Так как прямоугольник $\Delta_{pq}^{(l_{pq})}$ есть один из прямоугольников постоянства функции $\chi_{pq}(x, y)$, то ясно, что выполнено также условие β) леммы, где положено $p_0=p$ и $q_0=q$. Тем самым требование леммы 1 тоже выполнено.

Легко видеть, что теорема 1 непосредственно следует из доказанной леммы 1 и из того, что выполнены условия 1) и 2).

В самом деле, пусть $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — множество абсцисс точек z_k и всех двоично-рациональных точек на $[0, 1]$ и $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ — множество ординат точек z_k и всех двоично-рациональных точек на $[0, 1]$. Последовательным применением леммы 1, в формулировке которой вместо точки $(x_0\ y_0)$ берутся $\{(x_k, y_l)\}_{k,l=1}^{\infty}\equiv\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$, можно определить подпоследовательности $\{N_{k_n}\}$ и $\{M_{k_n}\}$ последовательностей $\{N_k\}$ и $\{M_k\}$ соответственно, прямоугольники $\Delta_{\tau_n\delta_n}^{(l_{\tau_n\delta_n})}$, $n=1, 2, \cdots$, $l_{\tau_n\delta_n}=1$ или 2, которые обладают свойствами

$$\Delta_{p_1q_1}^{(l_{p_1q_1})}\supset\Delta_{\tau_1\delta_1}^{(l_{\tau_1\delta_1})},\quad \Delta_{\tau_{n+1}\delta_{n+1}}^{(l_{\tau_{n+1}\delta_{n+1}})}\subset\Delta_{\tau_n\delta_n}, \tag{51}$$

$$[a_n]\cap\overline{\Delta}_{\tau_n\delta_n}^{(l_{\tau_n\delta_n})}=\varnothing,\quad [b_n]\cap\overline{\Delta}_{\tau_n\delta_n}^{(l_{\tau_n\delta_n})}=\varnothing, \tag{52}$$

$$|S_{N_{k_n}M_{k_n}}(x, y)|>n \tag{53}$$

для всех $(x, y)\in\Delta_{\tau_n\delta_n}^{(l_{\tau_n\delta_n})}$, $n=1, 2, \cdots$.

Из определения последовательности $\{(a_n, b_n)\}$ и из (51) и (52) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{mes}\Delta_{\tau_n\delta_n}^{(l_{\tau_n\delta_n})}=0$$

и общая точка (ξ, η) прямоугольников $\overline{\Delta}_{\tau_n\delta_n}^{(l_{\tau_n\delta_n})}$ для всех этих прямоугольников будет внутренней точкой. На основании (53) следует, что последовательность $S_{N_{k_n}M_{k_n}}(x, y)$ в точке (ξ, η) расходится, чего не может быть, так как (ξ, η) отлична от всех точек z_k, $k=1, 2, \cdots$ (см. (52)). Тем самым теорема 1 доказана.

Теорема 3 получается из теоремы 1 следующим образом:

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=-1}^{\infty} \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \sum_{j=2^m}^{2^{m+1}-1} \alpha_{ij} W_i(x) W_j(y), \tag{55}$$

где $W_{2^{-1}}(x) \equiv W_{2^{-1}}(y) \equiv 0.$

Подставляя вместо функций $W_i(x)$ и $W_j(y)$ их выражения (9), (10), (11), получим ряд

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=-1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \alpha_{nm}^{(ij)} \chi_n^{(i)}(x) \chi_m^{(j)}(y), \tag{56}$$

где

$$\sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^m} \alpha_{nm}^{(ij)} \chi_n^{(i)}(x) \chi_m^{(j)}(y) \equiv \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \sum_{j=2^m}^{2^{m+1}-1} \alpha_{ij} W_i(x) W_j(y), \tag{57}$$

причем

$$\left.\begin{array}{l} \chi_{-1}^{(1)}(x) \equiv \chi_0^{(0)}(x), \ \chi_{-1}^{(1)}(y) \equiv \chi_0^{(0)}(y) \\ \chi_{-1}^{(2^{-1})}(x) \equiv 0, \ \chi_{-1}^{(2^{-1})}(y) \equiv 0 \end{array}\right\}. \tag{58}$$

Если ряд (56) раскрыть по внутренним суммам, то вновь полученный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \chi_{nm}(x, y) \tag{59}$$

будет удовлетворять условиям а), в), с) теоремы 1.

В самом деле, из условия 2° теоремы 3 следует, что подпоследовательность частных сумм ряда (59) с номерами $(2^{k_i}, 2^{l_i})$ $i=1, 2, \cdots$ сходится к $f(x, y)$ всюду на квадрате $[0, 1]^2$, кроме, быть может, счетного множества точек, т. е. условие а) теоремы 1 для ряда (59) выполнено.

С другой стороны, так как $|W_{nm}(x, y)| \leqslant 1$, то из определения двойной системы Хаара имеем

$$\max_{[0, 1]^2} |\alpha_{nm}^{(ij)} \chi_n^{(i)}(x) \chi_m^{(j)}(y)| \leqslant \max_{\substack{2^n < i < 2^{n+1} \\ 2^m < j < 2^{m+1}}} |\alpha_{ij}| \cdot 2^{n+m} =$$

$$= \max_{\substack{2^n < i < 2^{n+1} \\ 2^m < j < 2^{m+1}}} |\alpha_{ij}| \cdot \max_{[0, 1]^2} |\chi_n^{(i)}(x) \cdot \chi_m^{(j)}(y)|^2. \tag{60}$$

Из (60) и условий 1° теоремы 3 следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{nm}|}{\max\limits_{[0, 1]^2} |\chi_{nm}(x, y)|} = 0 \text{ при любом } m, \ m=0, 1, 2, \cdots, \tag{61}$$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{|a_{nm}|}{\max\limits_{[0, 1]^2} |\chi_{nm}(x, y)|} = 0 \text{ при любом } n, \ n=0, 1, 2, \cdots. \tag{62}$$

Из определения функций двойной системы Хаара непосредственно видно, что равенства (61) и (62) влекут выполнение условий в) и с) теоремы 1, так как если $\chi_{nm}(x_0, y_0)\neq 0$, то

$$|\chi_{nm}(x_0, y_0)| > \frac{1}{4} \max_{[0,1]^2} |\chi_{nm}(x, y)|.$$

В силу теоремы 1 ряд (59) является рядом Фурье функции $f(x, y)$. Но по свойству III) ряд (59), а следовательно и ряд (56), сходится к $f(x, y)$ в метрике L_1. Тогда ряд (55) тоже будет сходиться к $f(x, y)$ в метрике L_1. Отсюда непосредственно вытекает, что ряд (2) является рядом Фурье функции $f(x, y)$. Теорема 3 доказана.

При доказательстве теоремы 2 используется следующая

Лемма 2. *Если ряд*

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} W_n(x) W_m(y) \tag{63}$$

сходится в каждой точке единичного квадрата $[0, 1]^2$, *кроме, быть может, счетного множества точек, то*

1°. $\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm} = 0$ *при любом* n, $n=0, 1, 2,\cdots$,

2°. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm} = 0$ *при любом* m, $m=0, 1, 2,\cdots$.

Доказательство. Докажем свойство 1°. Свойство 2° доказывается аналогично.

Пусть ряд (63) сходится всюду на квадрате $[0, 1]^2$, кроме, быть может, точек $z_k\in[0, 1]^2$, $k=1, 2,\cdots$.

Обозначим через $\{x_k\}$, $k=1, 2,\cdots$ совокупность всех двоично-рациональных точек отрезка $[0, 1]$ и проекций точек z_k на ось x.

Введем некоторые обозначения. Через $\Delta_k^{(1)}$ и $\Delta_k^{(2)}$ обозначим те интервалы, внутри которых функция $\chi_i(x)$, $2^{k-1}\leqslant i<2^k$ принимает положительные и отрицательные значения соответственно, и назовем их интервалами ранга k. Через $[\xi]$ обозначим отрезок прямой $x=\xi$, лежащий в квадрате $[0, 1]^2$.

Предполагая, что свойство 1° не имеет места, мы придем к противоречию, доказав существование точки $\xi_0\in[0, 1]$, отличной от всех точек x_k, $k=1, 2,\cdots$ и такой, что на отрезке $[\xi_0]$, кроме, быть может счетного множества точек, ряд (63) расходится.

Пусть для некоторого целого числа n_0, $n_0>0$ равенство 1° леммы не имеет места, т. е. существует число $c>0$ и последовательность $\{m_k\}$ такие, что

$$|a_{n_0 m_k}| > c, \quad k=1, 2,\cdots. \tag{64}$$

Возьмем * натуральное число p_0 так, что

* При $n_0=0$ примем $p_0=0$.

$$2^{p_0-1} < n_0 \leqslant 2^{p_0} - 1 \tag{65}$$

и рассмотрим ряды

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{lm_k} W_l(x)\, W_{m_k}(y) \equiv W_{m_k}(y) \sum_{l=0}^{\infty} a_{lm_k} W_l(x), \tag{66}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{lm_k} W_l(x) \tag{67}$$

при $k = 1, 2, \cdots$.

Для каждого значения k, $k = 1, 2, \cdots$ через $A_{nm_k}(x, y)$ и $B_{nm_k}(x)$ обозначим, соответственно, частные суммы рядов (66) и (67)

$$\left.\begin{aligned} A_{nm_k}(x, y) &= \sum_{l=0}^{n} a_{lm_k} W_l(x)\, W_{m_k}(y) \\ B_{nm_k}(x) &= \sum_{l=0}^{n} a_{lm_k} W_l(x) \end{aligned}\right\} \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Если y_0 не является двоично-рациональным числом, то для любого x в точке (x, y_0) $|B_{nm_k}(x)| = |A_{nm_k}(x, y)|$ при любом $n = 0, 1, 2, \cdots \cdots, k = 1, 2, \cdots$.

Легко показать, что на некотором интервале $\Delta_{p_0}^{(i_{p_0})}$, $i_{p_0} = 1$ или 2, ранга p_0, для некоторой бесконечной подпоследовательности номеров $\{m_k^{(1)}\}$, выбранной из $\{m_k\}$, имеют место неравенства

$$|B_{2^{p_0}-1,\, m_k^{(1)}}(x)| > c \tag{68}$$

при любом $k = 1, 2, \cdots$.

В самом деле, если предположить, что при некотором k, $k = 1, 2, \cdots$ почти всюду на $[0, 1]$ имеет место неравенство

$$|B_{2^{p_0}-1,\, m_k}(x)| < c,$$

то в силу (64) и (65) будем иметь

$$c^2 > \int_0^1 B^2_{2^{p_0}-1,\, m_k}(x)\, dx = \sum_{l=1}^{2^{p_0}-1} a^2_{lm_k} > c^2.$$

Поэтому для каждого k, $k = 1, 2, \cdots$ существует интервал ранга p_0, где

$$|B_{2^{p_0}-1,\, m_k}(x)| > c.$$

Так как количество отличных друг от друга интервалов ранга p_0 конечно, то (68) доказано.

Ясно, что будут иметь место также неравенства

$$|A_{2p_0-1,\, m_k^{(1)}}(x, y)| > c, \quad k=1, 2, \cdots \tag{69}$$

при $(x, y) \in \Delta_{p_0}^{(l_{p_0})} \times [0, 1]$, кроме, быть может, тех точек (x, y), ординаты которых являются двоично-рациональными точками.

Теперь для дальнейшего удобно выделить доказательство следующего утверждения А).

А) Пусть $a_{nm} \to 0$ при $(n, m) \to \infty$ и на некотором интервале $\Delta_p^{(l_p)}$ ранга p имеют место неравенства

$$|B_{2^p-1,\, m_k}(x)| > a > 0, \; k = 1, 2, \cdots, \; m_k < m_{k+1} \tag{70}$$

и $x_0 \in \Delta_p^{(l_p)}$ — произвольная точка.

Тогда для любого натурального N и для любого числа ε, $0<\varepsilon<a$ можно найти интервал $\Delta_q^{(l_q)}$ ранга q, который обладает свойствами:

a) $q > N$,

в) $\Delta_q^{(l_q)} \subset \Delta_p^{(l_p)}$, $\quad x_0 \overline{\in} \bar{\Delta}_q^{(l_q)}$,

c) $|B_{2^q-1,\, m_k'}(x)| > a - \varepsilon$, $k=1, 2, \cdots$, $x \in \Delta_q^{(l_q)}$, где $\{m_k'\}$ — некоторая подпоследовательность последовательности $\{m_k\}$.

Доказательство. Пусть

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2^{p+2}}, \tag{71}$$

выберем число M так, что $2^M > 2^p$ и

$$|a_{nm}| < \delta \text{ при } n, m \geqslant 2^M. \tag{72}$$

Возьмем $q > N$ и $q > M$. Не будет нарушением общности, если считать, что $m_k \geqslant 2^M$, $k = 1, 2, \cdots$.

Рассмотрим частные суммы $B_{2^{p+j}-1,\, m_k}(x)$, $1 \leqslant j \leqslant M+1-p$ при произвольном фиксированном значении k, $k=1, 2, \cdots$.

Очевидно, найдется по крайней мере одна последовательность вложенных интервалов $\Delta_{p+j}^{(l_j)}$, $j=1, 2, \cdots, M+1-p$ таких, что

$$|B_{2^{p+j}-1,\, m_k}(x)| > a \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{p+j}^{(l_j)}. \tag{73}$$

Рассмотрим также интервалы $\Delta_{p+j}^{(i_j')}$, $1 \leqslant j \leqslant M+1-p$, где $i_j' \neq i_j$, $i_j' = 1$ или 2. Ясно, что

$$\Delta_{p+1}^{(i_1')} \subset \Delta_p^{(l_p)}, \quad \Delta_{p+j+1}^{(i_{j+1}')} \subset \Delta_{p+j}^{(l_j)}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, M-p;$$

$$\text{mes}\, \Delta_{p+1}^{(i_1')} = \frac{1}{2} \text{mes}\, \Delta_p^{(l_p)}, \quad \text{mes}\, \Delta_{p+j+1}^{(l_{j+1}')} = \frac{1}{2} \text{mes}\, \Delta_{p+j}^{(l_j)},$$

$$j = 0, 1, 2, \cdots, M-p.$$

Заметим также, что на интервалах $\Delta_{p+j-1}^{(l_{j+1})}$ и $\Delta_{p+j+1}^{(l'_{j+1})}$ суммы

$$\sum_{l=2^{p+j}}^{2^{p+j+1}-1} a_{lm_k} W_l(x)$$

принимают постоянные значения, равные по абсолютной величине и разных знаков. Это следует из определения системы Уолша и из выбора интервалов $\Delta_k^{(1)}$ и $\Delta_k^{(2)}$. Для выполнения (73) интервалы $\Delta_{p+j}^{(l_j)}$ нужно взять так, чтобы на них знаки этих сумм совпадали со знаком суммы $B_{2^p-1, m_k}(x)$ на интервале $\Delta_p^{(l_p)}$.

А приори возможны два случая:

I) при $x \in \Delta_{p+j}^{(l'_j)}$ справедливо неравенство

$$|B_{2^{p+j}-1, m_k}(x)| < a - \varepsilon, \ j = 1, 2, \cdots, M+1-p; \tag{74}$$

II) неравенства (74) имеют место не для всех $j=1, 2, \cdots, M+1-p$.

Допустим, что имеет место случай I). Тогда при $x \in \Delta_{p+j}^{(l_j)}$

$$|B_{2^{p+j}-1, m_k}(x)| > a + (2^j - 1)\,\varepsilon, \ j=1, 2, \cdots, M+1-p. \tag{75}$$

При $j=1$ справедливость неравенства (75) очевидна.

Пусть неравенство (75) верно для j. Покажем его справедливость для $j+1$. Так как

$$|B_{2^{p+j+1}-1, m_k}(x)| < a - \varepsilon$$

при $x \in \Delta_{p+j+1}^{(l'_{j+1})}$, то

$$|B_{2^{p+j+1}-1, m_k}(x)| > a + (2^j - 1)\,\varepsilon + [a + (2^j - 1)\,\varepsilon - (a - \varepsilon)] =$$

$$= a + (2^{j+1} - 1)\,\varepsilon$$

при $x \in \Delta_{p+j+1}^{(l_{j+1})}$ и, следовательно, неравенство (75) доказано.

При $j = M - p$ будем иметь

$$|B_{2^M-1, m_k}(x)| > a + (2^{M-p} - 1)\,\varepsilon \text{ на интервале } \Delta_M^{(l_M)},$$

а при $j=M+1-p$

$$|B_{2^{M+1}-1, m_k}(x)| < a - \varepsilon, \quad \left|\sum_{l=2^M}^{2^{M+1}-1} a_{lm_k} W_l(x)\right| > 2^{M-p}\,\varepsilon$$

на интервале $\Delta_{M+1}^{(l'_{M+1})}$ и тогда существует слагаемое вида $a_{nm_k} W_n(x)$, $2^M \leqslant n \leqslant 2^{M+1}-1$, для которого

$$|a_{nm_k} W_n(x)| > \frac{2^{M-p}\,\varepsilon}{2^M} = \frac{\varepsilon}{2^p}, \quad x \in \Delta_{M+1}^{(l'_{M+1})}, \text{ т. е.}$$

$$|a_{nm_k}| > \frac{\varepsilon}{2^p} > \delta,$$

которое противоречит условию (72).

Таким образом, предположение, что имеет место случай I), приводит к противоречию.

Теперь допустим, что имеет место случай II).

Пусть $j=j_0$—наименьший номер, для которого неравенство (74) не выполнено, т. е.

$$|B_{2p+j_0-1, m_k}(x)| \geqslant a - \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{p+j_0}^{(i'_{j_0})}. \tag{76}$$

Из (75) получим

$$|B_{2p+j_0-1, m_k}(x)| > a + (2^{j_0-1}-1)\,\varepsilon, \quad x \in \Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0})}.$$

Если точка x_0 не принадлежит хотя бы одному из сегментов $\bar{\Delta}_{p+j_0}^{(i_{j_0})}$ или $\bar{\Delta}_{p+j_0}^{(i_{j_0})}$, то внутри такого интервала можно выбрать конечную последовательность интервалов $\Delta_{p+j}^{(i_j)}$, $j>j_0$, до ранга q таких, чтобы знаки значений сумм

$$\sum_{l=2^{p+j-1}}^{2^{p+j}-1} a_{lm_k} W_l(x)$$

внутри этих интервалов совпадали со знаком суммы $B_{2p+j_0-1, m_k}(x)$ на первоначальном интервале, и тогда будем иметь

$$|B_{2^q-1, m_k}(x)| > a - \varepsilon, \quad x \in \Delta_q^{(i_q)}, \tag{77}$$

причем $x_0 \overline{\in} \Delta_q^{(i_q)}$.

Если $x_0 \in \Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0})} \cap \Delta_{p+j_0}^{(i'_{j_0})}$, то точка x_0 является концом интервала $\Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0})}$. Внутри интервала $\Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0})}$ выберем новую конечную последовательность интервалов $\Delta_{p+j}^{(i_j)}$, $j_0<j\leqslant M-p+1$ таким образом, чтобы на них знаки сумм

$$\sum_{l=2^{p+j-1}}^{2^{p+j}-1} a_{lm_k} W_l(x)$$

совпали со знаком суммы $B_{2p+j_0-1, m_k}(x)$ на $\Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0})}$, и рассмотрим соответствующие им интервалы $\Delta_{p+j}^{(i'_j)}$, $i'_j \neq i_j$, $i'_j=1$ или 2. Неравенство

$$|B_{2p+j-1, m_k}(x)| < a - \varepsilon, \quad j_0<j\leqslant M-p+1$$

на $\Delta_{p+j}^{(i'_j)}$ нарушится хотя бы для одного значения j, так как в противном случае получили бы (см. (75))

$$|B_{2^M-1, m_k}(x)| > a + (2^{M-p-1} - 1)\,\varepsilon, \quad x \in \Delta_M^{(i_M)},$$

причем

$$|B_{2^{M+1}-1, m_k}(x)| < a - \varepsilon, \quad x \in \Delta_{M+1}^{(i'_{M+1})}.$$

Из последних неравенств следует, что

$$\left|\sum_{i=2^M}^{2^{M+1}-1} a_{im_k} W_i(x)\right| > 2^{M-p-1}\,\varepsilon, \quad x \in \Delta_{M+1}^{(i_{M+1})}$$

и, значит,

$$|a_{im_k}| > \frac{2^{M-p-1}\,\varepsilon}{2^M} = \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} > \delta$$

для некоторого значения i, где $2^M \leqslant i < 2^{M+1}$, что противоречит условию (72).

Таким образом, для некоторого $j_0 < j \leqslant M+p-1$ неравенство

$$|B_{2^{p+j}-1, m_k}(x)| > a - \varepsilon$$

имеет место на каждом из интервалов $\Delta_{p+j}^{(i_j)}$, $\Delta_{p+j}^{(i'_j)}$.

Замыкание одного из этих интервалов не содержит точки x_0. Остается вышеуказанным способом внутри этого интервала найти интервал ранга q, на котором выполнено неравенство

$$|B_{2^q-1, m_k}(x)| > a - \varepsilon. \tag{78}$$

Так как интервалов ранга q всего конечное число, то существует интервал $\Delta_q^{(i_q)}$ такой, что неравенство (78) имеет место для бесконечного числа значений m_k.

Утверждение А) доказано.

Для доказательства леммы 2 заметим, что если ряд (63) сходится всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, то $a_{nm} \to 0$ при $(n, m) \to \infty$ и

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} W_i(x) W_j(y) \to 0 \quad \text{при } (n, j) \to \infty, \tag{79}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} W_i(x) W_j(y) \to 0 \quad \text{при } (i, m) \to \infty \tag{80}$$

всюду, кроме, быть может, счетного множества точек.

Сравнивая доказанное нами неравенство (68) и утверждение А), мы можем выбрать последовательность интервалов $\Delta_{q_k}^{(i_{q_k})}$, $q_1 < q_2 < \cdots$ $\cdots < q_n < \cdots$, обладающих тем свойством, что

$$\Delta_{q_1}^{(i_{q_1})} \supset \Delta_{q_2}^{(i_{q_2})} \supset \cdots \supset \Delta_{q_k}^{(i_{q_k})} \supset \cdots,$$

$$x_k \bar{\in} \bar{\Delta}_{q_k}^{(l_{q_k})}$$

и для каждого фиксированного k существует бесконечная последовательность натуральных чисел $\{m_\nu^{(k)}\}_{\nu=1}^{\infty}$, для которых имеют место неравенства

$$|B_{2^{q_k}-1,\, m_\nu^{(k)}}(x)| > c - \sum_{l=1}^{k} \frac{c}{2^{l+1}}, \quad x \in \Delta_{q_k}^{(l_{q_k})}, \ \nu = 1, 2, \cdots.$$

Общая точка ξ_0 сегментов $\bar{\Delta}_{q_k}^{(l_{q_k})}$ не совпадает ни с одним из x_k, $k=1, 2, \cdots$ и принадлежит всем интервалам $\Delta_{q_k}^{(l_{q_k})}$.

Так как для каждого фиксированного k имеет место неравенство

$$|B_{2^{q_k}-1,\, m_\nu^{(k)}}(\xi_0)| > c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}, \ \nu = 1, 2, \cdots,$$

то некоторая последовательность сумм

$$\sum_{l=1}^{2^{q_k}-1} a_{l m_{\nu_k}^{(k)}} W_l(x)\, W_{m_{\nu_k}^{(k)}}(y)$$

не стремится к нулю при $q_k \to \infty$, $m_{\nu_k}^{(k)} \to \infty$ всюду на отрезке $[\xi_0]$, кроме, быть может, счетного числа двоично-рациональных точек этого отрезка. Это противоречит условию (79) и лемма 2 доказана.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 1.X.1973

Խ. Հ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ. Հաարի և Ուոլշի սիստեմներով կրկնակի շարքերի միակության մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում միապատիկ եռանկյունաչափական շարքերի միակության վերաբերյալ Վալլե-Պուսսենի հայտնի թեորեմը տարածվում է Ուոլշի բազմապատիկ շարքերի վրա։

Նման արդյունք միայն կրկնակի եռանկյունաչափական շարքերի համար և ավելի մասնավոր դեպքում, երբ պահանջվում է շարքի ամենուրեք զուգամիտություն, ստացված էր [6] աշխատանքում։

Kch. O. MOVSISIAN. *On the uniqueness of double series by Haar and Walsh systems* (summary)

The paper extends the well-known Valle-Poussin's theorem on the uniqueness of one dimensional trigonometric series to the case of multiple Walsh series.

An analogous result for double trigonometric series has been obtained in [6] under strouger assumption of everywhere convergence of the series.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян.* О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 6. 1964, 1391—1408.
2. *Ф. Г. Арутюнян.* Восстановление коэффициентов рядов по системе Хаара и Уолша, сходящихся к функциям, интегрируемым по Данжуа, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, № 2, 1966, 325—344.
3. *В. А. Скворцов.* О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм, Мат. заметки, 4, № 6, 1968, 707—714.
4. *N. Fine.* On the Walsch functions, Trans. Amer. Math. Soc., 65, 1949, 372—414.
5. *W. Willmar, R. Wade.* A uniqueness theorem for Haar and Walsch series, Trans. Amer. Math. Soc. 141, 1969, 187—194.
6. *J. Ash, G. Welland.* Convergence, uniqueness and summability of multiple trigonometric series, Trans. Amer. Math., Soc., 163, 1972, 401—436.
7. *А. Д. Эбралидзе.* О единственности кратных рядов по системе Хаара, Сообщения АН Груз.ССР, 70, № 3, 1973, 537—539.
8. *В. А. Скворцов.* Вычисление коэффициентов всюду сходящегося ряда Хаара, Мат. сб., 75, № 3, 1968, 349—360.
9. *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов. М., 1958.