ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 5, 1973 Математика

С. Г. САМКО

О ПРОСТРАНСТВЕ $I^{\alpha}(L_p)$ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ОБ ОПЕРАТОРАХ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА

Введение

В работе изучается пространство $I^{\alpha}(L_p)$ функций, являющихся дробными интегралами (лиувиллевского типа) от функций из $L_p(-\infty, \infty)$, $1<p<\frac{1}{\alpha}$, $0<\alpha<1$, и исследуются операторы типа потенциала, как операторы из L_p в $I^{\alpha}(L_p)$.

Дробное дифференцирование и интегрирование лиувиллевского типа в рамках пространств $L_p(-\infty, \infty)$ исследовано исчерпывающим образом. Отметим в первую очередь работы П. И. Лизоркина [1]—[3], из результатов которых, в частности, следует, что функции, представимые дробными интегралами от функций из L_p и сами принадлежащие L_p, совпадают с бесселевыми потенциалами: $I^{\alpha}(L_p)\cap L_p = L_p^{(\alpha)}$.

Мы будем рассматривать здесь класс $I^{\alpha}(L_p)$ дробных интегралов от p-суммируемых функций, не ограничивая его условием p-суммируемости самих дробных интегралов. Отказ от последнего условия заставляет, естественно, ограничить порядок суммируемости p до пределов $1<p<\frac{1}{\alpha}$, в которых операторы дробного интегрирования определены на всем пространстве $L_p(-\infty, \infty)$.

Один из основных результатов будет состоять (§ 2) в описании пространства $I^{\alpha}(L_p)$ в терминах дробной дифференцируемости (по Маршо), P-суммируемости, $P=\frac{p}{1-\alpha p}$, и интегрального модуля непрерывности $\omega_p(f, \delta)$. Получается также другой вариант описания, в котором P-суммируемость заменена p-суммируемостью с весом $(1+|x|)^{-\alpha p}$.

Даются (§ 3) достаточные условия, обеспечивающие принадлежность пространству $I^{\alpha}(L_p)$. Исследуется (§ 4) поведение некоторых классов операторов в пространстве $I^{\alpha}(L_p)$, надлежащим образом нормированном.

В §§ 5—6 рассматриваются операторы типа потенциала, действующие из L_p в $I^{\alpha}(L_p)$. В частности, в § 5 для потенциалов феллеровского [14] типа:

$$(M_{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_1+c_2\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt,\quad \varphi(x)\in L_p. \tag{1}$$

$$1<p<\frac{1}{\alpha},\qquad c_1,\ c_2=\mathrm{const},$$

получено обращение, построенное по типу интеграла Маршо. Ранее в [11] обращение M_{α}^{-1} оператора M_{α} было найдено для $p=1$ в виде аналога лиувиллевского дифференцирования. (В [11] описан также образ $M_{\alpha}(L_1)$ оператора M_{α}).

В § 6 исследуется нетеровость операторов типа потенциала общего вида:

$$(M\varphi)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c(x,t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt \tag{2}$$

в предположении, что $c(x, t)$ терпит разрыв на диагонали $x=t$. Основной результат § 6 — теорема 7 — содержит необходимые и достаточные условия нетеровости оператора M из L_p в $I^{\alpha}(L_p)$ и формулу для индекса.

Краткие сообщения о некоторых результатах статьи опубликованы без доказательств в заметках [5], [7]. Отметим также, что в работе [10] получено утверждение о нетеровости операторов (2) при более жестких предположениях, чем в § 6 настоящей статьи.

Автор выражает признательность Н. К. Карапетянцу за полезное обсуждение.

§ 1. Пространство $I^{\alpha}(L_p)$ дробных интегралов

Введем необходимые обозначения и определения. Норму в $L_p(-\infty, \infty)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_p$. Пусть $I_{\pm}^{\alpha}$ означают операторы лиувиллевского дробного интегрирования

$$(I_+^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad (I_-^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}},$$

$$\varphi(t)\in L_p(-\infty,\infty),\ 0<\alpha<1,\ 1\leqslant p<\frac{1}{\alpha},$$

а

$$(I_+^{-\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}},\quad (I_-^{-\alpha}f)(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}$$

—операторы лиувиллевского дифференцирования. Дробные производные Маршо [17] определяются равенствами

$$(D_+^{\alpha}f)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{\infty}\frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt, \tag{3}$$

$$(D^{\alpha}_{-} f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{\infty} \frac{f(x)-f(x+t)}{t^{1+\alpha}}\, dt.$$

Всюду в дальнейшем интегралы в (3) понимаются в смысле сходимости по норме $L_p(-\infty, \infty)$

$$D^{\alpha}_{\pm} f = \lim_{\substack{(L_p)\\ \varepsilon\to 0}} D^{\alpha}_{\pm,\varepsilon} f, \tag{4}$$

где

$$(D^{\alpha}_{\pm,\varepsilon} f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)-f(x\mp t)}{t^{1+\alpha}}\, dt. \tag{5}$$

Для достаточно хороших функций, например, для $f \in C_0^{\infty}$ лиувиллевские производные и производные Маршо совпадают

$$I^{-\alpha}_{+} f = D^{\alpha}_{+} f,\ I^{\alpha}_{-} f = D^{\alpha}_{-} f,\ f \in C_0^{\infty}$$

(см., например, [1], стр. 107).

Через $I^{\alpha}_{\pm}(L_p)$ будем обозначать пространство образов $I^{\alpha}_{\pm}(L_p) = \{f \,|\, f = I^{\alpha}_{\pm}\varphi,\ \varphi \in L_p\}$. Известно, что при $p=1$ операторы $I^{-\alpha}_{+}$, $I^{-\alpha}_{-}$ определены в $I^{\alpha}_{+}(L_1)$, $I^{\alpha}_{-}(L_1)$ соответственно и $I^{-\alpha}_{+} I^{\alpha}_{+}\varphi \equiv \varphi$, $I^{-\alpha}_{-} I^{\alpha}_{-}\varphi \equiv \varphi$, $\varphi \in L_1$. При $p \neq 1$ лиувиллевские производные перестают работать в $I^{\alpha}_{\pm}(L_p)$. Покажем, что их заменяют производные (3). Элементарные преобразования дают для $f(x) = (I^{\alpha}_{+}\varphi)(x)$, $\varphi \in L_p$, $1 \leqslant p < \dfrac{1}{\alpha}$

$$f(x+h) - f(x) = h^{\alpha} \int_{0}^{\infty} k(t)\, \varphi(x+h-ht)\, dt, \tag{6}$$

где $h > 0$ и $k(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[t^{\alpha-1} - \dfrac{1+\operatorname{sign}(t-1)}{2} (t-1)^{\alpha-1} \right]$,

причем непосредственная проверка показывает, что

$$\int_{0}^{\infty} k(t)\, dt = 0. \tag{7}$$

Из (6) без труда получаем (ср. [9], теорема 2) представление

$$(D^{\alpha}_{+,\delta} f)(x) = \int_{0}^{\infty} K(t)\, \varphi(x-\delta t), \tag{8}$$

где

$$K(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{t} \int_{0}^{t} k(s)\, ds = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left[t^{\alpha-1} - \frac{1+\operatorname{sign}(t-1)}{2} \frac{(t-1)^{\alpha}}{t} \right]$$

— „усредняющее“ ядро

$$\int_0^\infty K(t)\,dt = 1,\ K(t) > 0. \tag{9}$$

Из (8), (9) вытекает, что

$$\|D^\alpha_{+,\delta} f - \varphi\|_p \leqslant \int_0^\infty K(t)\,\omega_p(\varphi, \delta t)\,dt, \tag{10}$$

где $\omega_p(\varphi, \delta t)$ — интегральный модуль непрерывности в L_p

$$\omega_p(\varphi, h) = \|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|_p. \tag{11}$$

Оценка, аналогичная (10), имеет место и для $D^\alpha_{-,\delta} f$. Следовательно, пределы (4) существуют для всех $f \in I^\alpha_\pm(L_p)$ и в силу (10)

$$D^\alpha_+ I^\alpha_+ \varphi \equiv \varphi,\ D^\alpha_- I^\alpha_- \varphi \equiv \varphi,\ \varphi \in L_p,\ 1 \leqslant p < \frac{1}{\alpha}. \tag{12}$$

Если $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, то пространства $I^\alpha_+(L_p)$, $I^\alpha_-(L_p)$ совпадают, что очевидным образом вытекает из тождеств

$$I^\alpha_\pm \varphi \equiv \cos\alpha\pi\, I^\alpha_\mp \varphi \mp \sin\alpha\pi\, S I^\alpha_\mp \varphi, \tag{13}$$

$\varphi \in L_p$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, связывающих операторы $I^\alpha_\pm$ друг с другом посредством сингулярного оператора

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt \tag{14}$$

(см. [4], [8], [12]).

Мы положим

$$I^\alpha(L_p) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} I^\alpha_+(L_p) = I^\alpha_-(L_p),\ 1 < p < \frac{1}{\alpha}. \tag{15}$$

Как уже отмечалось во введении

$$I^\alpha(L_p) \cap L_p = L^{(\alpha)}_p,$$

где $L^{(\alpha)}_p$ — пространство бесселевых потенциалов

$$I^{(\alpha)}_p = \{f \mid f \in L_p,\ D^\alpha_+ f \in L_p\}$$

(см. [1], стр. 126, 128, а также [3], стр. 90).

Введем еще обозначения

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^{-\alpha p} |f(x)|^p\,dx \right\}^{\frac{1}{p}},\ L_{p,\alpha} = \{f \mid \|f\|_{p,\alpha} < \infty\}. \tag{16}$$

Операторы $I^\alpha_\pm$ действуют, как известно, ограниченно из L_p в $L_{p,\alpha}$ и из L_p в L_P, $P=p\,(1-\alpha p)^{-1}$ (см. [16]):

$$\|I^\alpha_\pm \varphi\|_{p,\alpha} \leqslant c\,\|\varphi\|_p,\ \|I^\alpha_\pm \varphi\|_P \leqslant c\,\|\varphi\|_p. \tag{17}$$

§ 2. Описание пространства $I^\alpha(L_p)$

Основной результат этого параграфа содержит следующая

Теорема 1. *Пусть* $1<p<\dfrac{1}{\alpha}$, $0<\alpha<1$. *Следующие утверждения равносильны*:

I. $f(x) \in I^\alpha(L_p)$,

II. $f(x) \in L_P,\ P=\dfrac{p}{1-\alpha p};\ D^\alpha_+ f \in L_p;\ \lim\limits_{\delta\to 0} \delta^{-\alpha}\,\omega_p(f,\delta)=0,$

III. $f(x) \in L_{p,\alpha};\ D^\alpha_+ f \in L_p;\ \lim\limits_{\delta\to 0} \delta^{-\alpha}\,\omega_p(f,\delta)=0,$

где $\omega_p(f,\delta)$ — *интегральный модуль непрерывности* (11)*.

Заметим, что условие $f(x)\in L_{p,\alpha}$ в III в некотором смысле предпочтительнее условия $f(x)\in L_P$ в II: оно представляется более слабым

$$L_P \cap L_{p,\alpha+\varepsilon}\left(\|f\|_{p,\alpha+\varepsilon}<\left(\frac{2\alpha}{\varepsilon}\right)^\alpha \|f\|_P\right),\ \varepsilon>0, \tag{18}$$

хотя $L_P \not\subset L_{p,\alpha}$ (что подтверждается примером функции $f(x)=|x|^{-1/P}\times \times \ln^{-1/p}|x|$ при $|x|>2$ и $f(x)=0$ при $|x|<2$. И если равносильность утверждений I и II будет получена относительно простыми рассуждениями, то вывод I из III потребует более тонких средств (применение теорем о p-мультипликаторах).

Заметим еще, что в утверждении III можно заменить условие суммируемости с весом $(1+|x|)^{-\alpha p}$ условием суммируемости с весом $|x|^{-\alpha p}$. Очевидно, при описании пространства $I^\alpha(L_p)$ в необходимой части предпочтителен вес $|x|^{-\alpha p}$, а в достаточной — $(1+|x|)^{-\alpha p}$.

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *При* $y<a<b$ *справедливо равенство***

---

* Утверждение теоремы остается в силе, если заменить $D^\alpha_+ f$ на $D^\alpha_- f$ или на оператор

$$K^{-1}_\alpha f=\int\limits_0^\infty \frac{2f(x)-f(x-t)-f(x+t)}{t^{1+\alpha}}\,dt,$$

обратный (с точностью до постоянного множителя) к риссовскому потенциалу (ср. с теоремой 1′ из [3]). Можно даже заменить $D^\alpha_+ f$ оператором $M^{-1}_\alpha f$, обратным к потенциалу феллеровского типа (1). Подчеркнем еще, что сходимость интегралов $D^\alpha_\pm f$, $K^{-1}_\alpha f$, $M^{-1}_\alpha f$ понимается всегда в смысле (4).

** Лемма представляет собой уточнение леммы 6 из работы [1], стр. 129.

$$J(a, b; y) \overset{\text{def}}{=} \alpha \int_a \frac{dt}{(b-t)^{1-\alpha}(t-y)^{1+\alpha}} = \frac{1}{b-y}\left(\frac{b-a}{a-y}\right), \quad 0<\alpha<1. \tag{19}$$

Доказательство формулы (19) получается с помощью замены $t = y + \frac{b-y}{t_1}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть имеет место утверждение 1. Условия $\|f\|_p < \infty$ и $\|f\|_{p,\alpha} < \infty$ тогда выполняются в силу (17). Условие $\|D_+^\alpha f\|_p < \infty$ вытекает из (4), (10). Чтобы оценить $\omega_p(f, \delta)$ запишем представление (6) с учетом (7):

$$f(x+\delta) - f(x) = \delta^\alpha \int_0^\infty k(t)\,[\varphi(x+\delta-\delta t) - \varphi(x)]\,dt.$$

Применяя неравенство Минковского, получим

$$\omega_p(f, \delta) \leqslant \delta^\alpha \int_0^\infty |k(t)|\, \omega_p(\varphi, \delta-\delta t)\, dt. \tag{20}$$

Так как $\omega_p(\varphi, \delta-\delta t) \leqslant 2\|\varphi\|_p$, то в силу теоремы Лебега о предельном переходе, получаем

$$\lim_{\delta\to 0} \delta^{-\alpha}\omega_p(f, \delta) = 0.$$

Таким образом, II и III следуют из I. В случаях II и III мы можем ввести функции

$$\varphi(x) = (D_+^\alpha f)(x) \text{ и } \varphi_\delta(x) = (D_{+,\delta}^\alpha f)(x) \in L_p,$$

так что $\lim\limits_{\delta\to 0} \|\varphi - \varphi_\delta\|_p = 0$. Покажем, что

$$f(x) = (I_+^\alpha \varphi)(x) \tag{21}$$

при выполнении условий II или III. Введем в рассмотрение интеграл

$$(I_N^\alpha \varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-N}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{22}$$

Требуемое равенство (21) будет доказано, если

$$\lim_{N\to\infty} (I_N^\alpha \varphi)(x) = f(x) \tag{23}$$

почти для всех x*. Предельный переход (23) будет осуществлен с помощью следующей леммы.

Лемма 2. *Если $f(x)$ удовлетворяет утверждению* II *или* III *теоремы* 1, *то для интеграла $I_N^\alpha \varphi$ с плотностью $\varphi = D_+^\alpha f$ справедливо представление*

* Ниже мы увидим (теорема 2), что предел (23) существует также и в смысле сходимости в L_p.

$$(I_N^\alpha \varphi)(x) = f(x) - \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{x-N} \left(\frac{N}{x-N-t}\right)^\alpha \frac{f(t)}{x-t}\, dt. \tag{24}$$

Доказательство. Преобразуем вначале $I_N^\alpha \varphi_\delta$. Имеем

$$(I_N^\alpha \varphi_\delta)(x) = \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \int\limits_{x-N}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \left[\frac{f(t)}{\alpha\delta^\alpha} - \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{f(\tau-\delta)\, d\tau}{(t-\tau+\delta)^{1+\delta}} \right].$$

После перестановки порядка интегрирования, допустимой при условиях леммы, получим

$$(I_N^\alpha \varphi_\delta)(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{\delta^\alpha} \int\limits_0^N \frac{f(x-t)}{t^{1-\alpha}}\, dt - \alpha \int\limits_{-\infty}^{x-N-\delta} f(\tau)\, d\tau \int\limits_{x-N}^{x} \frac{(x-t)^{\alpha-1}\, dt}{(t-\tau)^{\alpha+1}} - \right.$$

$$\left. - \alpha \int\limits_{x-N-\delta}^{x-\delta} f(\tau)\, d\tau \int\limits_{\tau+\delta}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1+\alpha}} \right\}. \tag{25}$$

Внутренние интегралы

$$J_1(x, \tau, N) = \alpha \int\limits_{x-N}^{x} (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{-\alpha-1}\, dt, \quad J_2(x, \tau, \delta) =$$

$$= \alpha \int\limits_{\tau+\delta}^{x} (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{-1-\alpha}\, dt$$

преобразуются на основании леммы 1

$$J_1(x, \tau, N) = J(x-N, x; \tau) = \frac{1}{x-\tau}\left(\frac{N}{x-N-\tau}\right)^\alpha,$$

$$J_2(x, \tau, \delta) = J(\tau+\delta, x; \tau) = \frac{1}{x-\tau}\left(\frac{x-\tau-\delta}{\delta}\right)^\alpha.$$

Подставляя в (25), после элементарных преобразований получим

$$(I_N^\alpha \varphi_\delta)(x) = f(x) - \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{x-N} \left(\frac{N}{x-N-t}\right)^\alpha \frac{f(t)}{x-t}\, dt + M(\delta),$$

где $M(\delta) = \sum\limits_{j=1}^{4} M_j(\delta)$ и

$$M_1(\delta) = \delta^{-\alpha} \int\limits_0^N \frac{f(x-\tau) - f(x-\tau-\delta)}{\tau^{1-\alpha}}\, d\tau, \quad M_2(\delta) =$$

$$= \delta^{1-\alpha} \int\limits_0^N \frac{f(x-\tau-\delta) - f(x)}{\tau^{1-\alpha}(\tau+\delta)}\, d\tau,$$

$$M_3(\delta)=-\delta^{1-\alpha}f(x)\int\limits_N^\infty\frac{d\tau}{(\tau+\delta)\,\tau^{1-\alpha}},\quad M_4(\delta)=\int\limits_{x-N-\delta}^{x-N}\left(\frac{N}{x-N-\tau}\right)^\alpha\frac{f(\tau)\,d\tau}{x-\tau}.$$

Устремим φ_δ к φ в L_p. Так как оператор I_N^α ограниченно действует из L_p в $L_{p,\alpha}$ (и тем более в $L_{p,\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$), то для получения (24) достаточно показать, что $\lim\limits_{\delta\to0} M(\delta)=0$ в метрике $L_{p,\alpha}$ или $L_{p,\alpha+\varepsilon}$. Покажем, что $\lim\limits_{\delta\to0}\|M(\delta)\|_{p,\alpha}=0$ при $f(x)\in L_{p,\alpha}$ и $\lim\limits_{\delta\to0}\|M(\delta)\|_{p,\alpha+\varepsilon}=0$, $\varepsilon>0$ при $f(x)\in L_p$. Для $f(x)\in L_{p,\alpha}$ имеем

$$\|M_1\|_{p,\alpha}\leqslant\frac{1}{\delta^\alpha}\int\limits_0^N\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}\left\{\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{|f(x-\tau)-f(x-\tau-\delta)|^p}{(1+|x|)^{\alpha p}}\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\omega_p(f,\delta)}{\delta^\alpha}\int\limits_0^N\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}\to0,$$

$$\|M_2\|_{p,\alpha}\leqslant\delta^{1-\alpha}\int\limits_0^N\frac{\omega_p(f,\tau+\delta)}{\tau^{1-\alpha}(\tau+\delta)}\,d\tau\leqslant c\delta^{1-\alpha}\int\limits_0^N\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}(\tau+\delta)^{1-\alpha}}\leqslant$$

$$\leqslant c\delta^{\min(\alpha,1-\alpha)}\ln\frac{1}{\delta}\to0,$$

$$\|M_3\|_{p,\alpha}\leqslant\delta^{1-\alpha}\|f\|_{p,\alpha}\cdot\int\limits_N^\infty\frac{d\tau}{\tau^{2-\alpha}}\to0,$$

$$\|M_4\|_{p,\alpha}\leqslant\int\limits_0^\delta\frac{N^\alpha\,d\tau}{\tau^\alpha(\tau+N)}\left\{\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{|f(x-N-\tau)|^p\,dx}{(1+|x|)^{\alpha p}}\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\|f\|_{p,\alpha}N^\alpha\int\limits_0^\delta\frac{(1+2|\tau+N|)^\alpha}{\tau^\alpha(\tau+N)}\,d\tau\to0,$$

в последнем неравенстве мы воспользовались легко получаемой оценкой

$$\|\tau_h f\|_{p,\alpha}\leqslant(1+2|h|)^\alpha\|f\|_{p,\alpha},\tag{26}$$

где $(\tau_h f)(x)=f(x-h)$ — операция сдвига.

В случае $f(x)\in L_p$ оценки для $\|M_1\|_{p,\alpha+\varepsilon}$ и $\|M_2\|_{p,\alpha+\varepsilon}$ не меняются, а для $\|M_3\|_{p,\alpha+\varepsilon}$ и $\|M_4\|_{p,\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ получаются в силу вложения (18). Лемма 2 доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы 1, видим на основании леммы 2, что (23) будет иметь место, если функция

$$(K_N f)(x)\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_{-\infty}^{x-N}\left(\frac{N}{x-N-t}\right)^\alpha\frac{f(t)\,dt}{x-t}\tag{27}$$

стремится $p \cdot p$ к 0 при $N \to \infty$ как для $f(x) \in L_p$, так и для $f(x) \in L_{p,\alpha}$. Если $f(x) \in L_p$, то

$$|(K_N f)(x)| \leqslant \left\{ \int_0^\infty |f(x-t-N)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{N}{t}\right)^{\alpha p'} \frac{dt}{(N+t)^{p'}} \right\}^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f\|_p}{N^{1/p}} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\alpha p'} (1+t)^{p'}} \right\}^{1/p'} \to 0, \ \alpha p' = \frac{\alpha p'}{1+\alpha p'} < 1 \tag{28}$$

и равносильность утверждений II и I получена.

Пусть $f(x) \in L_{p,\alpha}$. Если $\alpha p' < 1$, то оценка проста и аналогична (28):

$$(K_N f)(x) \leqslant \frac{\|f\|_{p,\alpha}}{N^{1/p}} \left\{ \int_0^\infty \frac{(1+|x-tN-N|)^{\alpha p'}}{t^{\alpha p'} (1+t)^{p'}} \, dt \right\}^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant c \frac{\|f\|_{p,\alpha}}{N^{1/p-\alpha}}, \ c = c(x).$$

В общем случае (когда не обязательно $\alpha p' < 1$) понадобятся дополнительные соображения. Мы имеем из леммы 2: $(I - K_N) f = f_N$, причем $f_N \in L_p \cap L_p$, так как $\|f_N\|_p \leqslant \frac{N^\alpha}{\alpha} \|\varphi\|_p$, $\|f_N\|_p < \|I_+^\alpha (|\varphi|)\|_p$ $(f_N = I_N^\alpha \varphi)$. Справедлива следующая

Лемма 3. *Если $f \in L_{p,\alpha}$ и $(I - K_N) f \in L_p \cap L_p$, то $f \in L_p$.*

Доказательство. Пусть, как обычно

$$(F\varphi)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) \, dx,$$

и пусть вначале $f(x)$ — достаточно хорошая функция, например, $f(x) \in C_0^\infty$. Замечая, что K_N — оператор свертки

$$K_N f = k_N * f, \quad k_N(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \begin{cases} \frac{1}{x} \left(\frac{N}{x-N}\right)^\alpha, & x > N, \\ 0, & x < N, \end{cases}$$

$k_N(x) \in L_r$, $1 \leqslant r < \frac{1}{\alpha}$, получаем

$$[F(f - K_N f)](\lambda) = \sigma(\lambda N) \hat{f}(\lambda), \tag{29}$$

где

$$\sigma(\lambda) = 1 - \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{i\lambda t}}{t(t-1)^\alpha} \, dt = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_1^\infty \frac{1 - e^{i\lambda t}}{t(t-1)^\alpha} \, dt =$$

$$M_3(\delta) = -\delta^{1-\alpha} f(x) \int\limits_N^\infty \frac{d\tau}{(\tau+\delta)\,\tau^{1-\alpha}},\quad M_4(\delta) = \int\limits_{x-N-\delta}^{x-N} \left(\frac{N}{x-N-\tau}\right)^\alpha \frac{f(\tau)\,d\tau}{x-\tau}.$$

Устремим φ_δ к φ в L_p. Так как оператор I_N^α ограниченно действует из L_p в $L_{p,\alpha}$ (и тем более в $L_{p,\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$), то для получения (24) достаточно показать, что $\lim\limits_{\delta\to 0} M(\delta)=0$ в метрике $L_{p,\alpha}$ или $L_{p,\alpha+\varepsilon}$. Покажем, что $\lim\limits_{\delta\to 0} \|M(\delta)\|_{p,\alpha}=0$ при $f(x)\in L_{p,\alpha}$ и $\lim\limits_{\delta\to 0} \|M(\delta)\|_{p,\alpha+\varepsilon}=0$, $\varepsilon>0$ при $f(x)\in L_p$. Для $f(x)\in L_{p,\alpha}$ имеем

$$\|M_1\|_{p,\alpha} \leqslant \frac{1}{\delta^\alpha}\int\limits_0^N \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}\left\{\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{|f(x-\tau)-f(x-\tau-\delta)|^p}{(1+|x|)^{\alpha p}}\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega_p(f,\delta)}{\delta^\alpha}\int\limits_0^N \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} \to 0,$$

$$\|M_2\|_{p,\alpha} \leqslant \delta^{1-\alpha}\int\limits_0^N \frac{\omega_p(f,\tau+\delta)}{\tau^{1-\alpha}(\tau+\delta)}\,d\tau \leqslant c\delta^{1-\alpha}\int\limits_0^N \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}(\tau+\delta)^{1-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant c\delta^{\min(\alpha,1-\alpha)} \ln\frac{1}{\delta} \to 0,$$

$$\|M_3\|_{p,\alpha} \leqslant \delta^{1-\alpha}\|f\|_{p,\alpha}\cdot\int\limits_N^\infty \frac{d\tau}{\tau^{2-\alpha}} \to 0,$$

$$\|M_4\|_{p,\alpha} \leqslant \int\limits_0^\delta \frac{N^\alpha\,d\tau}{\tau^\alpha(\tau+N)}\left\{\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{|f(x-N-\tau)|^p\,dx}{(1+|x|)^{\alpha p}}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{p,\alpha} N^\alpha \int\limits_0^\delta \frac{(1+2|\tau+N|)^\alpha}{\tau^\alpha(\tau+N)}\,d\tau \to 0,$$

в последнем неравенстве мы воспользовались легко получаемой оценкой

$$\|\tau_h f\|_{p,\alpha} \leqslant (1+2|h|)^\alpha \|f\|_{p,\alpha}, \tag{26}$$

где $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ — операция сдвига.

В случае $f(x)\in L_p$ оценки для $\|M_1\|_{p,\alpha+\varepsilon}$ и $\|M_2\|_{p,\alpha+\varepsilon}$ не меняются, а для $\|M_3\|_{p,\alpha+\varepsilon}$ и $\|M_4\|_{p,\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ получаются в силу вложения (18). Лемма 2 доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы 1, видим на основании леммы 2, что (23) будет иметь место, если функция

$$(K_N f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{x-N} \left(\frac{N}{x-N-t}\right)^\alpha \frac{f(t)\,dt}{x-t} \tag{27}$$

стремится $p \cdot p$ к 0 при $N \to \infty$ как для $f(x) \in L_p$, так и для $f(x) \in \in L_{p,\alpha}$. Если $f(x) \in L_p$, то

$$|(K_N f)(x)| \leqslant \left\{ \int_0^\infty |f(x-t-N)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{N}{t}\right)^{\alpha p'} \frac{dt}{(N+t)^{p'}} \right\}^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f\|_p}{N^{1/p}} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\alpha p'}(1+t)^{p'}} \right\}^{1/p'} \to 0, \ \alpha P' = \frac{\alpha p'}{1+\alpha p'} < 1 \tag{28}$$

и равносильность утверждений II и I получена.

Пусть $f(x) \in L_{p,\alpha}$. Если $\alpha p' < 1$, то оценка проста и аналогична (28):

$$(K_N f)(x) \leqslant \frac{\|f\|_{p,\alpha}}{N^{1/p}} \left\{ \int_0^\infty \frac{(1+|x-tN-N|)^{\alpha p'}}{t^{\alpha p'}(1+t)^{p'}} \, dt \right\}^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant c \frac{\|f\|_{p,\alpha}}{N^{1/p-\alpha}}, \ c = c(x).$$

В общем случае (когда не обязательно $\alpha p' < 1$) понадобятся дополнительные соображения. Мы имеем из леммы 2: $(I - K_N) f = f_N$, причем $f_N \in L_p \cap L_p$, так как $\|f_N\|_p \leqslant \frac{N^\alpha}{\alpha} \|\varphi\|_p$, $\|f_N\|_p < \|I_+^\alpha (|\varphi|)\|_p$ ($f_N = I_N^\alpha \varphi$). Справедлива следующая

Лемма 3. *Если $f \in L_{p,\alpha}$ и $(I - K_N) f \in L_p \cap L_p$, то $f \in L_p$.*

Доказательство. Пусть, как обычно

$$(F\varphi)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) \, dx,$$

и пусть вначале $f(x)$ — достаточно хорошая функция, например, $f(x) \in C_0^\infty$. Замечая, что K_N — оператор свертки

$$K_N f = k_N * f, \quad k_N(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\frac{N}{x-N}\right)^\alpha, & x > N, \\ 0, & x < N, \end{cases}$$

$k_N(x) \in L_r$, $1 \leqslant r < \frac{1}{\alpha}$, получаем

$$[F(f - K_N f)](\lambda) = \sigma(\lambda N) \hat{f}(\lambda), \tag{29}$$

где

$$\sigma(\lambda) = 1 - \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{i\lambda t}}{t(t-1)^\alpha} \, dt = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_1^\infty \frac{1 - e^{i\lambda t}}{t(t-1)^\alpha} \, dt =$$

$$= \frac{\operatorname{sign}\lambda}{\Gamma(\alpha)\, e^{i\frac{\alpha\pi}{2}}} \int\limits_0^\lambda \frac{e^{it}\,dt}{|t|^{1-\alpha}}.$$

Функция $\sigma(\lambda)$ принадлежит винеровскому кольцу R [24], но $\sigma^{-1}(\lambda)\overline{\in} R$, поскольку $\sigma(0)=0$. Однако, $\lambda=0$ — единственный нуль функции $\sigma(\lambda)$:

$$\operatorname{Re}\sigma(\lambda) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos\lambda t}{t(t-1)^\alpha}\,dt > 0$$

при $\lambda \neq 0$, причем

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\sigma(\lambda)}{|\lambda|^\alpha} = \frac{e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \neq 0. \tag{30}$$

Положим на основании (30)

$$a(\lambda) = \frac{|\lambda|^\alpha}{1+|\lambda|^\alpha}\,\frac{1}{\sigma(\lambda)}. \tag{31}$$

Покажем, что $a(\lambda)$ является p-мультипликатором [21], $1<p<\infty$. Представим $a(\lambda)$ в виде $a_1(\lambda)+a_2(\lambda)$, где

$$a_1(\lambda)=\theta(1-\lambda^2)\,a(\lambda),\quad a_2(\lambda)=\theta(\lambda^2-1)\,a(\lambda),\quad \theta(\lambda)=\frac{1+\operatorname{sign}\lambda}{2}.$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$|a_1(\lambda)| \leqslant M,\quad |\lambda a_1'(\lambda)| < M, \tag{32}$$

так что $a_1(\lambda)$ — p-мультипликатор в силу теоремы С. Г. Михлина [20] (см. также [21], теорема 2.5). Изменим функцию $\sigma(\lambda)$ на отрезке $[-1,1]$: $\tilde\sigma(\lambda)=\begin{cases}\sigma(\lambda), & |\lambda|\geqslant 1,\\ \sigma(\lambda)+\omega(\lambda), & |\lambda|<1\end{cases}$ выбрав бесконечно дифференцируемую функцию $\omega(\lambda)$ с носителем $[-1,1]$ так, чтобы $\tilde\sigma(\lambda)\neq 0$, $-\infty\leqslant\lambda\leqslant\infty$ и $\tilde\sigma(\lambda)\in R$. Тогда $a_2(\lambda)\overset{\text{def}}{=}\theta(\lambda^2-1)\dfrac{|\lambda|^\alpha}{1+|\lambda|^\alpha}\dfrac{1}{\tilde\sigma(\lambda)}$ — также p-мультипликатор, поскольку $\dfrac{1}{\tilde\sigma(\lambda)}\in R$, а для функции $a_2(\lambda)=\theta(\lambda^2-1)\dfrac{|\lambda|^\alpha}{1+|\lambda|^\alpha}$ выполняется условие (32) (ср. с теоремой 3 из [23], стр. 9). В силу доказанного оператор

$$A_N f = F^{-1} a(\lambda N)\, Ff$$

ограничен в L_p-пространствах, $1<p<\infty$. Полагая теперь $(I-K_N)f=f_N$, для $f_N\in C_0^\infty$ имеем на основании (28) — (31)

$$f=(I-K_N)^{-1}f_N = A_N f_N + F^{-1}\frac{1}{|\lambda|^\alpha}F A_N f_N = A_N f_N + K_\alpha A_N f_N, \tag{33}$$

где $K_\alpha f$ — риссовский потенциал. Так как пространство C_0^∞ входит в образ $(I-K_N)(L_{p,\alpha})$, то для любой функции $f_N \in C_0^\infty$ функция f определяется равенством (33). Оператор $A_N + K_\alpha A_N$ ограниченно действует из пространства $E = L_p \cap L_P$ с нормой $\|f\|_E = \|f\|_p + \|f\|_P$ в пространство L_P

$$\|(I+K_\alpha) A_N f\|_P \leqslant \|A_N f\|_P + \|K_\alpha (A_N f)\|_P \leqslant c_1 \|f\|_P + c_2 \|A_N f\|_p \leqslant c_3 \|f\|_E.$$

Следовательно, обращение (33) справедливо при условиях леммы 3, тогда $f \in L_P$ и лемма 3 доказана.

Если же $f \in L_P$, то $K_N f \to 0$ в силу оценки (28). Теорема 1 доказана полностью.

Полученное в лемме 2 представление (24) позволяет нам говорить о сходимости дробных интегралов не только в смысле сходимости $p \cdot p \cdot$, но и по норме L_P. Именно, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x) \in L_p$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, *и* $I_N^\alpha \varphi$ — *интеграл* (22). *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \|I_+^\alpha \varphi - I_N^\alpha \varphi\|_P = 0, \; P = \frac{p}{1-\alpha p} \cdot$$

Доказательство. Обозначим $(I_+^\alpha \varphi)(x) = f(x)$. Функция $f(x)$ удовлетворяет утверждению II теоремы 1 и тогда в силу леммы 2 имеет место равенство

$$I_+^\alpha \varphi - I_N^\alpha \varphi = K_N f,$$

где K_N — оператор (27). Покажем, что последовательность операторов K_N сильно сходится к 0 в $L_r(-\infty, \infty)$ при любом r, $1 < r < \infty$ (и тогда, в частности, при $r = P$). Нормы $\|K_N\|_{L_r \to L_r}$ ограничены

$$\|K_N f\|_r \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} k_N(x)\, dx \cdot \|f\|_r = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha (1+x)} \|f\|_r = \|f\|_r,$$

так что достаточно проверить, что $\|K_N f\|_r \to 0$ на плотном в L_r множестве, например, для финитной бесконечно дифференцируемой функции $\omega(x)$ с носителем в $(-a, a)$, $0 < a < \infty$. Имеем

$$\|K_N \omega\|_r \leqslant \left\{ \int_{N-a}^{N+a} dx \left| \int_{-a}^{x-N} \left(\frac{N}{x-N-t} \right)^\alpha \frac{\omega(t)}{x-t} dt \right|^r \right\}^{\frac{1}{r}} +$$

$$+ \left\{ \int_{N+a}^{\infty} dx \left| \int_{-a}^{a} \left(\frac{N}{x-N-t} \right)^\alpha \frac{\omega(t)}{x-t} dt \right|^r \right\}^{\frac{1}{r}} = A_1(N) + A_2(N).$$

Очевидно

$$A_1(N) \leqslant \int_0^{2a} \left(\frac{N}{t} \right)^\alpha \frac{dt}{t+N} \left\{ \int_t^{2a} |\omega(x-a-t)|^r dx \right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant \frac{\|\omega\|_r}{N^{1-\alpha}} \int_0^{2a} \frac{dt}{t^\alpha} \to 0,$$

а для $A_2(N)$ имеем

$$A_2(N) \leqslant \frac{1}{N^{\frac{1}{r'}}} \int_{-a}^{a} |\omega(t)|\, dt \left\{ \int_{\frac{a-t}{N}}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha r}(1+x)^r} \right\}^{\frac{1}{r}}, \quad r' = \frac{r}{r-1}.$$

Далее оценка ясна в случае $\alpha r < 1$. Если же $\alpha r > 1$, то

$$\int_{\frac{a-t}{N}}^{\infty} \cdots \leqslant c_1 \left(\frac{N}{a-t} \right)^{\alpha r - 1} + c_2$$

и оценка следует. Случай $\alpha r = 1$ аналогичен:

$$\int_{\frac{a-t}{N}}^{\infty} \cdots \leqslant c_1 \left| \ln \frac{N}{a-t} \right| + c_2.$$

Следовательно

$$\lim_{N \to \infty} \| K_N \omega \|_r \leqslant \lim_{N \to \infty} A_1(N) + \lim_{N \to \infty} A_2(N) = 0$$

и теорема 2 доказана.

В заключение этого параграфа отметим случай $p=1$. Для того чтобы $f(x) \in I^{\alpha}_{\pm}(L_1)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(I^{1-\alpha}_{\pm} f)(x) \in AC(-\infty, \infty) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to \mp\infty} (I^{1-\alpha}_{\pm} f)(x) = 0$$

соответственно. Это утверждение представляет собой перенос на всю ось теоремы Я. Д. Тамаркина [18] (см. также [19], стр. 574), относящейся к случаю конечного отрезка. Аналогичное описание допускает и область значений $M_\alpha(L_1)$ феллеровского потенциала (1) (см. [11]). Отметим еще, что некоторое описание функций, представимых дробными интегралами от локально суммируемых функций по существу содержится в работе [13] L. S. Bosanquet.

§ 3. Достаточные условия

Укажем в этом параграфе некоторые условия, достаточные для принадлежности функции $f(x)$ пространству $I^{\alpha}(L_p)$. Непосредственно из теоремы 1 получаем: *если*

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\omega_p(f,t)}{t^{1+\alpha}}\, dt < \infty; \quad 2) \ \frac{\omega_r(f,t)}{t^{\alpha}} = o(1) \quad \text{при} \quad t \to 0;$$

$$3) \ \|f\|_p < \infty \quad (\textit{или} \ \|f\|_{p,\alpha} < \infty),$$

то

$$f(x) \in I^{\alpha}(L_p).$$

Отметим в связи с этим утверждением одну оценку для интегрального модуля непрерывности функции $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$ через модуль непрерывности ее дробной производной $\varphi(x) = (D^{\alpha}_{+} f)(x)$:

$$\int_0^\infty \frac{\omega_p(f,t)}{t^{1+\alpha}}\,dt \leqslant \frac{2}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty \frac{\omega_p(\varphi,t)}{t}\,dt, \tag{34}$$

вытекающую из (20).

Простое достаточное условие содержит следующая

Лемма 4. *Пусть $f(x)$ принадлежит пространству $H^\lambda(-\infty,\infty)$ гельдеровских на сомкнутой оси функций порядка λ. Если $f(\infty)=0$ и $\lambda > \max\left(\alpha, \frac{1}{p}\right)$, то $f(x)\in I^\alpha(L_p)$.*

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой условий $f\in L_p$, $\omega_p(f,\delta)=o(\delta^\alpha)$, $D^\alpha_+ f\in L_p$ теоремы 1. При этом стоит применять „глобальную“ оценку гельдеровости на оси:

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant \frac{A\,|x_1-x_2|^\lambda}{(1+|x_1|)^\lambda(1+|x_2|)^\lambda},\quad A \leqslant \|f\|_{H^\lambda}, \tag{35}$$

и при проверке условия $D^\alpha_+ f\in L_p$ воспользоваться оценкой интегралов вида

$$J_{a,b}(z) = \int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)^{-a}(1+|x-z|)^{-b}\,dx:$$

$$J_{a,b}(z) \leqslant \frac{c}{(1+|z|)^\nu},\quad \nu < \min(a,\, b,\, a+b-1), \tag{36}$$

при $a>0$, $b>0$, $a+b>1$ и $c=c(\nu)$.

Несколько больший интерес представляет следующая

Лемма 5. *Если $f(x)\in H^\lambda(-\infty,\infty)$, $\lambda>\alpha$, то*

$$\frac{f(x)-f(0)}{|x|^\gamma}\in I^\alpha(L_p),$$

при $\frac{1}{p}<\gamma<\frac{1}{p}$.

Доказательство. Обозначим $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{|x|^\gamma}$. Выполнимость условия $g(x)\in L_p$ очевидна. Для проверки условия $D^\alpha_+ g\in L_p$ составляем согласно (4) срезку $\varphi_\delta(x)=(D^\alpha_{+,\delta}g)(x)$, и оценим вначале $\varphi_\delta(x)$ для конечных значений x ($|x|<N$). Имеем

$$|\varphi_\delta(x)| \leqslant c_1|g(x)| + \|g\|_p\left\{\int_\delta^\infty t^{-(1+\alpha)p'}\,dt\right\}^{\frac{1}{p'}} \leqslant \frac{c_2}{|x|^{\gamma-\lambda}}+c_3, \tag{37}$$

$c_{2,3}=c_{2,3}(\delta)$, так что $\varphi_\delta(x)\in L_p(-N,N)$. Для $|x|>N$

$$|\varphi_\delta(x)| \leqslant \frac{1}{|x|^\gamma}\int_\delta^\infty \frac{|f(x)-f(x-t)|}{t^{1+\alpha}}\,dt + \int_\delta^\infty\left|\frac{1}{|x|^\gamma}-\frac{1}{|x-t|^\gamma}\right|\times$$

$$\times \frac{|f(x-t)-f(0)|\,dt}{t^{1+\alpha}} = A_1(x) + A_2(x).$$

Оценка для $A_1(x)$ получается за счет гельдеровости функции $f(x)$:

$$A_1(x) \leqslant \frac{c}{(1+|x|)^{\gamma+\lambda}} \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{t^{\lambda-\alpha-1}\,dt}{(1+|x-t|)^{\lambda}} \leqslant \frac{c(\delta)}{(1+|x|)^{\gamma+\lambda}} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{(1+t)^{\lambda-\alpha-1}\,dt}{(1+|x-t|)^{\lambda}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c(\delta)}{(1+|x|)^{\gamma+\alpha+\lambda}}$$

(последний переход получен с помощью оценки (36)). Для $A_2(x)$ имеем

$$A_2(x) \leqslant \frac{c}{|x|^{\gamma+\alpha}} \int\limits_{\frac{\delta}{|x|}}^{\infty} \left|1 - |\operatorname{sign} x - t|^{-\gamma}\right| \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \leqslant \frac{c}{|x|^{\gamma+\alpha}}$$

и тогда $|\varphi_\delta(x)| \leqslant c(\delta)(1+|x|)^{-\gamma-\alpha}$, $|x|>N$, так что $\varphi_\delta(x) \in L_p$. Покажем, что φ_δ — фундаментальная в L_p последовательность. В самом деле

$$\|\varphi_{\delta_1} - \varphi_{\delta_2}\|_p \leqslant \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{dt}{t^{\gamma+\alpha}} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f(xt)-f(0)}{|x|^{\gamma}} - \frac{f(xt-t)-f(0)}{|x-1|^{\gamma}} \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \right|.$$

Очевидно, достаточно показать, что $J(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\cdot|^p\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant ct^{\varepsilon}$ при $\varepsilon > \gamma + \alpha - 1$. Имеем: $J(t) \leqslant \left\{ \int\limits_{|x|<2} \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int\limits_{|x|>2} \right\}^{\frac{1}{p}} = J_1(t) + J_2(t)$. Нетрудно видеть, что $J_1(t) \leqslant ct^{\lambda}$, в силу гельдеровости $f(x)$, а для $J_2(t)$ получаем

$$J_2(t) \leqslant ct^{\lambda} \left\{ \int\limits_{|x|>2} (1+|xt|)^{-\lambda p} (1+|xt-t|)^{-\lambda p} |x|^{-\gamma p}\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ ct^{\lambda} \left\{ \int\limits_{|x|>2} \frac{|x-1|^{\lambda p}}{(1+|xt-t|)^{\lambda p}} \left| |x-1|^{-\gamma} - |x|^{-\gamma} \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = D(t) + E(t).$$

Далее несложные преобразования дают

$$D(t) \leqslant ct^{\lambda+\gamma-\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_{0}^{\infty} (1+s)^{-2\lambda p} s^{-\gamma p} \right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(t^{\lambda+\gamma-\frac{1}{p}}\right)$$

и

$$E(t) \leqslant ct^{\lambda} \left\{ \int\limits_{2}^{\infty} \frac{ds}{(1+st)^{\lambda p}(s+1)^{(1+\gamma-\lambda)p}} \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant ct^{1+\gamma-\frac{1}{p}}\left\{\int_{2t}^{\infty}\frac{ds}{(1+s)^{\lambda p}(s+t)^{(1+\gamma-\lambda)p}}\right\}^{\frac{1}{p}} = ct^{1+\gamma-\frac{1}{p}}\left(\int_{2t}^{1}+\int_{1}^{\infty}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= O(t^{1+\gamma-\frac{1}{p}}) + O\left(t^{\lambda}\ln^{\frac{1}{p}}\frac{1}{t}\right),$$

что и завершает оценку для $J(t)$.

Оценка для $\delta^{-\alpha}\omega_p(g,\delta)$ получается аналогичными преобразованиями и мы их опускаем.

Остановимся еще в этом параграфе на принадлежности к $I^{\alpha}(L_p)$ суммируемых на оси функций. Воспользуемся следующим простым соображением: если функция $\varphi(x)$ сохраняет знак на всей оси, то функция $f(x)=(I^{\alpha}_{\pm}\varphi)(x)$ „плохо" ведет себя при $x\to\pm\infty$ соответственно. Действительно, для $\varphi(x)\geqslant 0$ имеем при $x>n$

$$(I^{\alpha}_{+}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_{-\infty}^{-x}+\int_{-x}^{n}+\int_{n}^{x}\right)\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} > \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-x}^{n}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} >$$

$$> \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_{-n}^{n}\varphi(t)\,dt \geqslant \frac{c}{(1+x)^{1-\alpha}},\quad c\neq 0.$$

Следовательно, если $f(x)\in L_r\cap I^{\alpha}(L_p)$, $1\leqslant r\leqslant\frac{1}{1-\alpha}$, то функция $\varphi(x)=(D^{\alpha}_{\pm}f)(x)$ меняет знак на оси. Для суммируемых функций $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ можно получить более точную информацию: *Если $f(x)\in L_1\cap I^{\alpha}(L_p)$, то дробная производная $\varphi(x)=(D^{\alpha}_{+}f)(x)$, а также ее „срезки" $\varphi_{\delta}(x)=(D^{\alpha}_{+,\delta}f)(x)$ ортогональны единице*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx=0,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{\delta}(x)=0. \tag{38}$$

Для $\varphi_{\delta}(x)$ равенство (38) следует из возможности интегрирования $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{\delta}(x)\,dx=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_{\delta}^{\infty}\frac{dt}{t^{1+\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx-\int_{\delta}^{\infty}\frac{dt}{t^{1+\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\,dx\right]=0,$$

в предельном случае ($\delta=0$) проще всего воспользоваться представлением (24): $I^{\alpha}_{N}\varphi=f-K_N f$, откуда

$$\frac{N^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}(I^{\alpha}_{N}\varphi)(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx-\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}(x+1)}=0.$$

§ 4. Об ограниченности некоторых классов операторов в пространстве $I^\alpha(L_p)$

Введем в $I^\alpha(L_p)$ естественную норму

$$\|f\|_{\rm I} = \|D_+^\alpha f\|_p. \tag{39}$$

Равенство (39) определяет, вообще говоря, полунорму. Однако, на функциях $f(x) \in I^\alpha(L_p)$ полунорма $\|D_+^\alpha f\|_p$ служит в силу (12) нормой. На основании теоремы 1 можно ввести также нормы

$$\|f\|_{\rm II} = \|D_+^\alpha f\|_p + \|f\|_p, \quad \|f\|_{\rm III} = \|D_+^\alpha f\|_p + \|f\|_{p,\alpha}. \tag{39'}$$

В силу (17) нормы $\|f\|_{\rm I}$, $\|f\|_{\rm II}$, $\|f\|_{\rm III}$ эквивалентны на функциях $f(x) \in I^\alpha(L_p)$. Очевидно также, что $I^\alpha(L_p)$ полно относительно введенных норм.

Теорема 3. *Оператор „усеченного" дробного дифференцирования*

$$(D_{+,\delta}^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\delta^\infty \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt$$

при любом $\delta > 0$ *является оператором сжатия из* $I^\alpha(L_p)$ *в* L_p

$$\|D_{+,\delta}^\alpha f\|_p \leqslant \|D_+^\alpha f\|_p. \tag{40}$$

Доказательство следует из представления (8) и условия (9):

$$\|D_{+,\delta}^\alpha f\|_p \leqslant \|K\|_1 \, \|\varphi\|_p = \|D_+^\alpha f\|_p.$$

Теорема 4. *Оператор сингулярного интегрирования* (14) *ограничен в пространстве* $I^\alpha(L_p)$, *причем при нормировке* (39)

$$\|S\|_{I^\alpha(L_p) \to I^\alpha(L_p)} = \|S\|_{L_p \to L_p}.$$

Для доказательства теоремы 4 достаточно заметить, что операторы S и $I_\pm^\alpha$ коммутируют

$$SI_\pm^\alpha \varphi = I_\pm^\alpha S\varphi, \ \varphi \in L_p, \ 1 < p < \frac{1}{\alpha} \tag{41}$$

(что без труда проверяется, например, на функциях $\varphi \in C_0^\infty$).

Пусть $H^\lambda(-\infty, \infty)$—пространство гельдеровских на сомкнутой оси функций порядка λ (так что имеет место оценка (35)). Справедлива следующая

Теорема 5*. *Пространство* $I^\alpha(L_p)$ *инвариантно относительно операции умножения на функции* $h(x) \in H^\lambda(-\infty, \infty)$, $\lambda > \alpha$, *причем*

$$\|hf\|_I \leqslant k \, \|h\|_{H^\lambda} \cdot \|f\|_I, \tag{42}$$

где k *не зависит от* h *и* f.

---

* Более сложное доказательство теоремы 5 не полностью приведено в работе автора 6].

Доказательство. Пусть $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$. Покажем, что для $h(x) f(x)$ выполняется утверждение II теоремы 1. Условие $hf \in L_p$ очевидно. Для $\omega_p(hf, \delta)$, пользуясь оценками (35)—(36), получаем

$$\omega_p(hf, \delta) \leqslant \max_x |h(x)|\, \omega_p(f, \quad +$$

$$+ \delta^{\lambda} \|h\|_{H^{\lambda}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|^p\, dx}{(1+|x|)^{\lambda p}\, (1+|x-\delta|)^{\lambda p}} \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant c_1\, \omega_p(f, \delta) + \qquad (43)$$

$$+ c_2 \delta^{\lambda} \|f\|_p \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^{\lambda/\alpha} (1+|x-\delta|)^{\lambda/\alpha}} \right\}^{\alpha} = o(\ ^{\alpha}).$$

Остается убедиться в L_p сходимости „усеченной“ дробной производной $\psi_\delta = D^{\alpha}_{+,\delta}(hf)$. Очевидно, $\psi_\delta(x) = h(x)\, (D^{\alpha}_{+,\delta} f)(x) + B_\delta(x)$, где

$$B_\delta(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\delta}^{\infty} \frac{h(x) - h(x-t)}{t^{1+\alpha}} f(x-t)\, dt.$$

Так как $D^{\alpha}_{+,\delta} f$ сходится в L_p, то это верно и для $hD^{\alpha}_{+,\delta} f$, а для $B_\delta(x)$ аналогично (43) имеем

$$\|B_\delta\|_p \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \|h\|_{H^{\lambda}} \cdot \|f\|_p \cdot \int_{\delta}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^{\lambda/\alpha} (1+|x-t|)^{\lambda/\alpha}} \right\}^{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant c\, \|h\|_{H^{\lambda}} \|f\|_p \cdot \int_0^{\infty} \frac{t^{\lambda-\alpha-1}\, dt}{(1+t)^{\lambda}},$$

так что $B_\delta \in L_p$ и $\|B_\delta\|_p \leqslant c_1 \|h\|_{H^{\lambda}} \|f\|_p$ и тогда

$$\|D^{\alpha}_{+,\delta}(hf)\|_p \leqslant \|h\|_C\, \|D^{\alpha}_{+,\delta} f\|_p + c_2 \|h\|_{H^{\lambda}} \|f\|_p. \qquad (44)$$

Аналогично проверяется фундаментальность

$$\|B_{\delta_1} - B_{\delta_2}\|_p \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \|h\|_{H^{\lambda}} \cdot \|f\|_p \cdot \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda} (1+t)^{\lambda}} \right|.$$

И, наконец, оценка (42) следует из (44) и из (40). Теорема 5 доказана.

Выясним в заключение этого параграфа поведение свертки $A\varphi = a * \varphi$, как оператора, действующего из L_r в $I^{\alpha}(L_p)$ и из $I^{\alpha}(L_r)$ в $I^{\alpha}(L_p)$.

Лемма 6. *Оператор свертки ограниченно действует из* L_r, $1 \leqslant r \leqslant p$, *в* $I^{\alpha}(L_p)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, *если* $a(x) \in I^{\alpha}(L_q)$ *при* $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$.

Пусть далее M_p^p — пространство p-мультипликаторов [21]. Спра-ведлива следующая

Лемма 7. *Если $a(x) \in I^\alpha(L_q)$ при каком-нибудь $q \in \left(1, \frac{1}{\alpha}\right)$ и $|x|^\alpha \hat{a}(x) \in M_p^p$, то оператор свертки ограниченно действует из L_p в $I^\alpha(L_p)$.*

Следствие. Если $a(x) \in I^\alpha(L_q)$ при $q \in \left(1, \frac{1}{\alpha}\right)$ и $(D_+^\alpha a)(x) \in L_1$, то оператор свертки ограничен из L_p в $I^\alpha(L_p)$.

Лемма 8. *Оператор свертки $Af = a * f$ ограниченно действует из $I^\alpha(L_r)$ в $I^\alpha(L_p)$, $1 < r \leqslant p < \frac{1}{\alpha}$ при $a(x) \in L_q$, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$.*

Доказательство лемм следует из равенства

$$a * \varphi = I_+^\alpha (D_+^\alpha a * \varphi), \quad \varphi \in L_r, \quad a \in I^\alpha(L_q), \tag{45}$$

$$r \geqslant 1, \quad 1 < q < \frac{1}{\alpha + \frac{1}{r'}},$$

справедливость которого очевидна на множествах, плотных в соответствующих пространствах, а левые и правые части равенств порождают операторы, ограниченные при условиях лемм в соответствующих пространствах.

§ 5. Обращение потенциалов феллеровского типа

Рассмотрим операторы типа потенциала вида

$$M_\alpha \varphi = M_{c_1, c_2; \alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x - t)}{|x - t|^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt, \tag{46}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные; при $c_1 = \frac{1}{2} \frac{\cos \alpha\delta}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}}$, $c_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\sin \alpha\delta}{\sin \frac{\alpha\pi}{2}}$, $-\infty < \delta < \infty$, получим потенциалы, изученные В. Феллером в связи с уравнением диффузии в [14] (см. также [15], стр. 684). Для операторов (46) имеет место „обобщенное полугрупповое свойство"

$$M_{c_1, c_2; \alpha}(M_{d_1, d_2; \beta} \varphi) = M_{e_1, e_2; \alpha+\beta} \varphi$$

для $\varphi \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p < (\alpha + \beta)^{-1}$, произвольных c_1, c_2, d_1, d_2 и

$$e_1 = c_1 d_1 + c_2 d_2 + (c_1 d_1 - c_2 d_2)\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\pi}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\pi},\ e_2 = c_1 d_2 + c_2 d_1 + (c_2 d_1 - c_1 d_2)\times$$

$$\times\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\pi}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\pi}.$$

Доказательство этого свойства (сформулированного в ином виде) содержится в работе [11] автора. В [11] получено также описание образа $M_\alpha(L_1)$, $L_1 = L_1(-\infty, \infty)$, оператора M_α и найден обратный оператор

$$M_\alpha^{-1} f = M^{-1}_{c_1, c_2; \alpha} f = \frac{1}{k}\frac{d}{dx} M_{c_1, c_2; 1-\alpha} f, \tag{47}$$

$k = 4\left(c_1^2 \cos^2\frac{\alpha\pi}{2} + c_2^2 \sin^2\frac{\alpha\pi}{2}\right)\Gamma(1-\alpha)$ на образе $M_\alpha(L_1)$. Покажем, что потенциал (46) допускает простое обращение и на образе $M_\alpha(L_p)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$. В этом случае обращение „лиувиллевского" типа (47) заменяется оператором, построенным подобно производным Маршо (3).

Замечаем, что

$$M_\alpha(L_p) = I^\alpha(L_p) \tag{48}$$

при $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ (исключая, разумеется, единственный случай, когда $c_1 = c_2 = 0$). Действительно, $M_\alpha\varphi = u\, I^\alpha_+\varphi + v\, I^\alpha_-\varphi$, где $u = c_1 + c_2$, $v = c_1 - c_2$ и тождества (13), (41) дают

$$M_\alpha = I^\alpha_+ N = N I^\alpha_+,\ N\varphi = a_1\varphi + a_2 S\varphi, \tag{49}$$

где $a_1 = u + v\cos\alpha\pi$, $a_2 = v\sin\alpha\pi$ и S — сингулярный оператор (14). Остается заметить, что оператор N осуществляет изоморфизм пространства L_p на себя (при $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$).

В силу (49) получаем $M_\alpha^{-1} f = N^{-1} D^\alpha_+ f$ для $f \in I^\alpha(L_p)$. Нетрудно видеть, что $N^{-1} f = (a_1^2 + a_2^2)^{-1}(a_1 f - a_2 S f)$ и что $S D^\alpha_+ f = \operatorname{cosec}\alpha\pi\, D^\alpha_- f - \operatorname{ctg}\alpha\pi\, D^\alpha_+ f$ для $f \in I^\alpha(L_p)$ (в силу (13) и (12)). Следовательно, $M_\alpha^{-1} f = (a_1^2 + a_2^2)^{-1}(u\, D^\alpha_+ f + v\, D^\alpha_- f)$. Окончательно

$$(M_\alpha^{-1} f)(x) = \frac{1}{k_0}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_1 + c_2\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1+\alpha}}[f(x) - f(t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{k_0}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\frac{2c_1 f(x) - (c_1+c_2) f(x-t) - (c_1 - c_2) f(x+t)}{t^{1+\alpha}}\,dt, \tag{50}$$

где $k_0 = 4\left(c_1^2 \cos^2 \frac{\alpha\pi}{2} + c_2^2 \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}\right) = u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha\pi$; $M_\alpha^{-1} M_\alpha \varphi \equiv \varphi$ для $\varphi \in L_p$ и $M_\alpha M_\alpha^{-1} f \equiv f \in I^\alpha (L_p)$. Очевидно, формально мы можем записать, что $M_\alpha^{-1} = \frac{1}{k_0} M_{-\alpha}$.

§ 6. О нетеровости операторов типа потенциала

Перейдем к рассмотрению операторов типа потенциала общего вида

$$(M\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(x, t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{51}$$

Функцию $c(x, t)$ будем предполагать разрывной, вообще говоря, на диагонали $x = t$

$$c(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & t < x \\ v(x, t), & t > x. \end{cases}$$

Определение. Будем говорить, что функция $a(x, t) \in H_x^\lambda (R_2)$, если: 1) она определена в одной из полуплоскостей $t > x$, $t < x$ и гельдерова там по x порядка λ (равномерно по t):

$$|a(x_1, t) - a(x_2, t)| \leqslant c\, |x_1 - x_2|^\lambda (1 + |x_1|)^{-\lambda} (1 + |x_2|)^{-\lambda} \tag{52}$$

(ср. с (35)) и 2) $a(x, x) \stackrel{\text{def}}{=} a(x \pm 0, x) \in C(-\infty, \infty)$.

Будем считать, что $u(x, t), v(x, t) \in H_x^\lambda (R_2)$. В статье [10] дается доказательство нетеровости оператора (51) как оператора из L_p, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, в $I^\alpha (L_p)$ (при нормировке (39)—(39′)) в предположении, что $\lambda > \frac{1}{p}$. (В [10] рассматриается класс $H(\lambda, \mu, \nu)$, несколько более широкий, чем $H_x^\lambda (R_2)$: $H_x^\lambda (R_2) = H(\lambda, \lambda, 0)$, причем в [10] $\lambda > \frac{1}{p} + \nu$). Мы покажем здесь, что порядок гельдеровости λ можно снизить до естественного предела $\lambda > \alpha$.

Теорема 7*. *Пусть $u(x, t)$, $v(x, t) \in H_x^\lambda (R_2)$, $\lambda > \alpha$. Для того чтобы оператор* (51) *был нетеровым оператором из L_p в $I^\alpha (L_p)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$c^2 (x, x-0) + c^2 (x, x+0) \neq 0, \quad -\infty \leqslant x \leqslant \infty.$$

При выполнении этого условия индекс оператора M равен

---

* Теорема 7 в сформулированном виде анонсирована в [5]. Отметим в связи с нетеровостью оператора (51) работу М. И. Вишика и Г. И. Эскина [22], в которой операторы типа потенциала с „почти-разностным“ ядром рассматривались в иной постановке в случае области с конечной мерой.

$$\varkappa_M = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arg \left\{ c_1(x) + i c_2(x) \operatorname{tg} \frac{\alpha \pi}{2} \right\}, \tag{53}$$

где $c_1(x) = c(x, x-0) + c(x, x+0)$, $c_2(x) = c(x, x-0) - c(x, x+0)$.

Доказательство. Отмечаем прежде всего вложение

$$M(L_p) \subseteq I^\alpha(L_p), \tag{54}$$

проверяемое с помощью теоремы 1 (подробное доказательство при $\lambda > \alpha$ см. в [10], § 2). Введем оператор

$$(M_0 \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1(t) + c_2(t) \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt$$

с коэффициентами $c_1(t)$, $c_2(t)$ из (53). В [6] найдены условия нетеровости этого оператора из L_p в $I^\alpha(L_p)$ и вычислен его индекс (53) в предположении, что $c_1(t)$, $c_2(t) \in C(-\infty, \infty)$. Покажем, что оператор $T = M - M_0$ вполне непрерывен из L_p в $I^\alpha(L_p)$ при $\lambda > \alpha$. Мы имеем $T = T_u^+ + T_v^-$, где

$$(T_u^+ \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{u(x, t) - u(t, t-0)}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt$$

и аналогично для $T_v^- \varphi$. Очевидно, достаточно рассмотреть один из операторов T_u^+, T_v^-. Так как $T_u^+(L_p) \subseteq I^\alpha(L_p)$, то остается показать, что оператор $A \overset{\text{def}}{=} D_+^\alpha T_u^+$ вполне непрерывен из L_p в L_p. Несложные преобразования дают

$$(A\varphi)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int_0^\infty \frac{u(x, x-t-s) - u(x-t, x-t-s)}{s^{1-\alpha}} \times$$

$$\times \varphi(x-t-s)\, ds. \tag{55}$$

Отметим, кстати, что ограниченность оператора A в L_p легко получается из (55), если воспользоваться оценкой (52):

$$\|A\varphi\|_p \leqslant c \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|^P\, dx}{(1+|x+t|)^{\lambda P} (1+|x|)^{\lambda P}} \right\}^{\frac{1}{P}}, \tag{56}$$

где обозначено $f(x) = \int_0^\infty |\varphi(x-s)|\, s^{\alpha-1}\, ds \in L_P$, $P = \frac{p}{1-\alpha p}$ и далее, используя (36), имеем

$$\|A\varphi\|_p \leqslant c \|f\|_P \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x+t|)^{\lambda/\alpha} (1+|x|)^{\lambda/\alpha}} \right\}^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant c\,\|\varphi\|_p \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}(1+t)^\lambda}.$$

Доказательство же полной непрерывности A в L_p при $\lambda > \alpha$ потребует больших усилий. Приводим оператор A простыми преобразованиями к виду

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}(A\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{x} A(x,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

где $A(x,\tau) = \int_\tau^x \frac{u(x,\tau)-u(t,\tau)}{(x-t)^{1+\alpha}(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau$. Оценим норму в L_p разности

$\Delta = (A\varphi)(x+\delta) - (A\varphi)(x) = \int_x^{x+\delta} A(x+\delta,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{x} [A(x+\delta,\tau) -$
$- A(x,\tau)]\,\varphi(\tau)\,d\tau = \Delta_1 + \Delta_2$. Оценка для Δ_1 проста:

$$\|\Delta_1\|_p \leqslant \int_0^\delta d\tau \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p\, |A(x+\tau+\delta, x)|^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^\delta \frac{d\tau}{(\tau+\delta)^{1-\lambda}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p\, dx \left| \int_0^1 \frac{ds}{s^{1-\alpha}(1-s)^{1+\alpha-\lambda}} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < c_1 \delta^\lambda \|\varphi\|_p. \tag{57}$$

Далее

$$\|\Delta_2\|_p \leqslant \int_0^\infty d\tau \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |A(x+\tau+\delta, x) - A(x+\tau, x)|^p\, |\varphi(x)|^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Представим $A(x+\tau+\delta, x) - A(x+\tau, x)$ в виде $A_1 + A_2 + A_3$, где

$$A_1 = \int_x^{x+\tau} \frac{u(x+\tau+\delta, x) - u(x+\tau, x)}{(x+\tau+\delta-t)^{1+\alpha}(t-x)^{1-\alpha}}\,dt,\quad A_2 =$$

$$= \int_{x+\tau}^{x+\tau+\delta} \frac{u(x+\tau+\delta, x) - u(t,x)}{(x+\tau+\delta-t)^{1+\alpha}(t-x)^{1-\alpha}}\,dt,$$

$$A_3 = \int_x^{x+\tau} \left[\frac{1}{(x+\tau+\delta-t)^{1+\alpha}} - \frac{1}{(x+\tau-t)^{1+\alpha}} \right] \frac{u(x+\tau, x) - u(t,x)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,dt.$$

Оценим A_1, имеем

$$|A_1| \leqslant \frac{c\delta^\lambda \tau^\alpha}{(1+|x+\tau|)^\lambda} \int_0^1 \frac{ds}{s^{1-\alpha}[\delta+\tau(1-s)]^{1+\alpha}} = c_1 \frac{\delta^{\lambda-\alpha}\tau^\alpha}{(1+|x+\tau|)^\lambda(\delta+\tau)}$$

(в последнем равенстве использована лемма 1), так что

$$|A_1| \leqslant \frac{c_1}{(1+|x+\tau|)^\lambda} \frac{\delta^{\lambda-\alpha}}{\tau^{1-\alpha}}. \tag{58}$$

Оценка для A_2 получается аналогично и совпадает с (58). Далее, применяя в A_3 теорему о среднем, получаем

$$|A_3| \leqslant \frac{c}{(1+|x+\tau|)^\lambda} \frac{\delta}{\tau^{2-\lambda}} \int_0^1 \frac{(1-s+\xi)^\alpha \, ds}{s^{1-\alpha}(1-s)^{1+\alpha-\lambda}\left(1-s+\frac{\delta}{\tau}\right)^{1+\alpha}},$$

где $0<\xi<\frac{\delta}{\tau}$, так что

$$|A_3| \leqslant \frac{c}{(1+|x+\tau|)^\lambda} \frac{\delta}{\tau^{2-\lambda}} \int_0^1 \frac{ds}{s^{1-\alpha}(1-s)^{1+\varepsilon-\lambda}\left(1-s+\frac{\delta}{\tau}\right)^{1-\varepsilon}\left(1-s+\frac{\delta}{\tau}\right)^{\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 (1+|x+\tau|)^{-\lambda} \delta^\varepsilon \tau^{\lambda+\varepsilon-1},$$

где $c_1=c_1(\varepsilon)$ и $0<\varepsilon<\lambda-\alpha$. В силу оценок для A_1, A_2, A_3, имеем

$$\|\Delta_\delta\| \leqslant c\delta^\varepsilon \int_0^\infty \frac{a(\tau)\, d\tau}{\tau^{1-\lambda+\varepsilon}} + c\delta^{\lambda-\alpha} \int_0^\infty \frac{a(\tau)\, d\tau}{\tau^{1-\alpha}}, \tag{59}$$

где обозначено $a(\tau)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x+\tau|)^{-\lambda p} |\varphi(x)|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}}$. Очевидны следующие свойства функции $a(\tau)$:

$$|a(\tau)| < \|\varphi\|_p, \ \|a\|_q < k\, \|\varphi\|_p \quad \text{при} \quad q>\max\left(p, \frac{1}{\lambda}\right),$$

где $k=k(q)$. Простое применение неравенства Гельдера показывает, что интегралы в (59) конечны и допускают оценку $\int_0^\infty \frac{a(\tau)}{\tau^\nu} d\tau \leqslant c\, \|\varphi\|_p$ при $\nu=1-\lambda+\varepsilon$ или $\nu=1-\alpha$, $c=c(\lambda, \varepsilon, \alpha, q)$, если порядок суммируемости q для функции $a(\tau)$ выбрать в пределах $\max\left(p, \frac{1}{\lambda}\right)<q<$ $<\frac{1}{\lambda-\varepsilon}$, что приводит к следующему (всегда возможному) выбору ε: $\max\left(0, \lambda-\frac{1}{p}\right)<\varepsilon<\lambda-\alpha$.

В силу оценок (57) и (59) мы получаем: $\|\Delta\|_p = \|(A\varphi)(x+\delta)-$ $-(A\varphi)(x)\|_p \leqslant c\delta^\varepsilon \|\varphi\|_p$. Для того чтобы эта последняя оценка обеспечила полную непрерывность оператора A в $L_p(-\infty, \infty)$ остается проверить, что $\int\limits_{|x|>N} |(A\varphi)(x)|^p dx \to 0$ при $N \to \infty$ равномерно по φ, $\|\varphi\|_p \leqslant c$.

Возвращаясь для этого к оператору A в форме (55), аналогично оценкам в (56) находим, что

$$\left\{\int\limits_{|x|>N} |(A\varphi)(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant c \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left\{\int\limits_{|x|>N} \frac{|f(x-t)|^p dx}{(1+|x|)^{\lambda p}(1+|x-t|)^{\lambda p}}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$< c\|f\|_p \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left(\int\limits_{|x|>N} \frac{dx}{(1+|x|)^{\lambda/\alpha}(1+|x-t|)^{\lambda/\alpha}}\right)^{\alpha} \leqslant \frac{c_1\|\varphi\|_p}{(N+1)^{\varepsilon}} \int\limits_0^{\infty} \frac{t^{\lambda-\alpha-1}\,dt}{(t+1)^{\lambda-\varepsilon}},$$

где ε выбрано в пределах $0 < \varepsilon < \min(\lambda-\alpha, \alpha)$ и при последнем переходе мы воспользовались оценкой (36). Тем самым полная непрерывность оператора A в L_p получена, что и завершает доказательство теоремы 7.

Ростовский государственный
университет

Поступила 28.IV.1972

Ս. Գ. ՍԱՄԿՈ. Կոտորակային ինտեգրալների $I^\alpha(L_p)$ տարածության և պոտենցիալի տիպի օպերատորների մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է $L_p(-\infty, \infty)$ $\left(1<p<\frac{1}{\alpha}\right)$ տարածության ֆունկցիաներից α կարգի (լիուվիլյան տիպի) կոտորակային ինտեգրալներով ներկայացվող ֆունկցիաների $I^\alpha(L_p)$ տարածությունը։ Տրվում է նրա նկարագրությունը՝ տարբերական կոտորակային ածանցյալների և L_P, $P=\frac{p}{1-\alpha p}$ կամ $L_{p,\alpha}$ կշռային տարածությանը պատկանելու թերմիններով.

Ստացված են նույնպես ֆունկցիաների՝ $I^\alpha(L_p)$ պատկանելու մի շարք բավարար պայմաններ և հետազոտված է $I(L_p)$-ում օպերատորների որոշ դասերի վարքը։

Պոտենցիալի տիպի օպերատորների համար ստացված է նետերյանությունը L_p-ից $I^\alpha(L_p)$։ Ֆելլերյան տիպի պոտենցիալների մասնավոր դեպքում կառուցված է հակադարձ օպերատորը։

S. G. SAMKO. *On the space $I^\alpha(L_p)$ of fractional integral and on potential type operators* (summary)

The space $I^\alpha(L_p)$ consists of functions representable by fractional integrals (of Liouville type) of order α with density in $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$. The description of $I^\alpha(L_p)$ is given in the terms of difference fractional derivatives and in the terms of belonging of a function to the space L_P, $P = \frac{p}{1-\alpha p}$, or to the weight space $L_{p,\alpha}$. Some sufficient conditions for a function to belong to the space $I^\alpha(L_p)$ are obtained. The behaviour of some classes of operators in $I^\alpha(L_p)$ is investigated.

The operators of potential type are considered acting from L_p to $I^\alpha(L_p)$ and are shown to be Notherian. In the case of Feller type potentials the inverse operator is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. И. Лизоркин.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций, Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова, т. 105, 1969, 89—167.
2. *П. И. Лизоркин.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$, Матем. сб., 60, № 3, 1963, 325—353.
3. *П. И. Лизоркин.* Описание пространств $L_p^r(R_n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов, Матем. сб., 81, № 1, 1970, 79—91.
4. *С. Г. Самко.* Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши, ДАН СССР, 176, № 5, 1967, 1019—1022.
5. *С. Г. Самко.* Об операторах типа потенциала, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 299—301.
6. *С. Г. Самко.* Обобщенное интегральное уравнение Абеля на прямой, Изв. ВУЗ, Математика, № 8, 1970, 83—93.
7. *С. Г. Самко.* Интегральные уравнения первого рода с ядром типа потенциала, „Материалы Всесоюзн. конференции по краевым задачам", 1969, Казань, Изд-во Каз. ун-та, 1970, 216—220.
8. *С. Г. Самко.* Об обобщенном уравнение Абеля и операторах дробного интегрирования, Диф. уравнения, 4, № 2, 1968, 298—314.
9. *С. Г. Самко.* Об интегральном модуле непрерывности потенциалов с плотностями, суммируемыми на оси с весом, „Матем. анализ и его приложения", изд-во РГУ, Ростов н/Д., 1969, 175—184.
10. *С. Г. Самко.* Об интегральных уравнениях первого рода с ядром типа потенциала, Изв. ВУЗ, Математика, № 4, (107) 1971, 78—86.
11. *С. Г. Самко.* Об одном классе операторов типа потенциала на прямой, Изв. ВУЗ, Математика, № 5 (108), 1971, 92—100.
12. *L. von Wolfersdorf.* Uber eine Beziehung zwischen integralen nichtganzer Ordnung, Math. Z., 90, № 1, 1965, 24—28.
13. *J. S. Bosanquet.* On Liouville's extension of Abel's integral equation, Mathematika (Gr. Br.) 16, № 1, 1969, 59—85.
14. *W. Feller.* On a generalization of M. Riesz' potentials and the semigroups generated by them, Meddel. Lunds. Univ. mat. sem. supplem. 21, 1952, 73—81.
15. *Э. Хилле, Р. Филлипс.* Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962.
16. *Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа.* Неравенства, М., ИЛ., 1948.
17. *A. Marchaud.* Sur les derivées et sur les differences des fonctions de variables reéles, Journ. Mathém. pures et appliq., 6, 1927, 337—425.
18. *J. D. Tamarkin.* On integrable solutions of Abel's integral equation, Ann. Math. (2), 31, 1930, 219—228.
19. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., „Наука", 1966.
20. *С. Г. Михлин.* Интегралы Фурье и кратные сингулярные интегралы, Вестник ЛГУ, № 7, 1957, 143—155.
21. *Л. Хермандер.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, М., ИЛ, 1962.
22. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках переменного порядка, Труды ММО, 16, 1967, 25—50.
23. *С. Мандельбройт.* Теоремы замкнутости и теоремы композиции, М., ИЛ., 1962.
24. *М. Г. Крейн.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 5 (83), 1958, 3—120.