Г. С. МИКАЕЛЯН

О Q-КАРТЕРОВСКИХ ПОДГРУППАХ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ГРУПП С Q-РАДИКАЛОМ КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА

В в е д е н и е

В статье вводится понятие Q-картеровской подгруппы (см. п. 2°). (Такие подгруппы в более частной форме, а именно, когда для всякого $\alpha \in M$ вместе силовского класса Σ_α (см. п. 2°) берется некоторый класс P_α групп, где P_α — простое число и различным α соответствуют различные P_α , рассматривались в работе Стонехевера [2]). Доказываются некоторые теоремы о существовании и сопряженности таких подгрупп в локально конечных группах с Q-радикалом конечного индекса. В частности, из этих теорем для рассматриваемых Стонехевером типов групп утверждения теоремы 2.1 работы [2] получены в более слабых предположениях (см. следствия 2, 3).

В п. 3° приводится определение силовской LQ-базы, введенное ранее в работе автора [7], где, в частности, доказаны некоторые теоремы о сопряженности таких баз периодических групп. Здесь же доказывается один критерий о существовании полной силовской нижней Q-базы (см. п. 3°) в локально конечной группе с Q-радикалом конечного индекса.

1°. Пусть Σ — некоторый абстрактный класс групп. Обозначим через $L\Sigma$ класс всех групп, обладающих локальными системами из Σ -групп, $E\Sigma$ — класс всех расширений Σ -групп при помощи Σ -групп, $T\Sigma$ — класс всех гомоморфных образов Σ -групп и $S\Sigma$ — класс всех подгрупп Σ -групп. Обозначим, далее, через Φ некоторую подсистему системы операторов $\langle S, T, E, L \rangle$. (Здесь Φ могла быть и любая система теоретико-групповых операций, но нам достаточно ограничиться только рассматриваемыми подсистемами). Теперь минимальный класс групп, содержащий Σ и замкнутый относительно каждого из операторов из Φ будем обозначать через $\{\Sigma|\Phi\}$. Ясно, что группы из класса $\{\Sigma|\Phi\}$ будут получаться из Σ -групп всевозможными последовательными применениями операторов из Φ в конечное число раз. Если некоторая группа из $\{\Sigma|\Phi\}$ получена из Σ -групп n -кратным применением указанных операторов, то скажем, что она имеет *глубину* (Φ -глубину) n до класса Σ .

Лемма 1. Для произвольного класса групп Σ справедливы следующие равенства:

$$|\Sigma|S, T, E, L\rangle = \{S\Sigma|T, E, L\rangle, \quad (1)$$

$$|\Sigma|S, T, E, L\rangle = \{T\Sigma|E, L\rangle. \quad (2)$$

Доказательство. Докажем сначала соотношение (1). Для этого, индукцией по глубине n до класса $S\Sigma$ докажем, что

$$S|\Sigma\Sigma|T, E, L\rangle \subseteq \{S\Sigma|T, E, L\rangle = \Sigma'. \quad (3)$$

При $n=0$ (3) следует из равенства $SS\Sigma = S\Sigma$.

Пусть теперь $G \subseteq G_1$, где G_1 — Σ' -группа глубины $n+1$ до $S\Sigma$. Здесь возможны такие случаи:

1) $G_1 = G'/H$, где G' — Σ' -группа глубины n до $S\Sigma$. Тогда $G = G_1/H$, где $G_1 \in \Sigma'$ и так как $T\Sigma' \subseteq \Sigma'$, то $G \in \Sigma'$.

2) $G/A \simeq B$, где A и B Σ' -группы глубины меньше, чем $n+1$. Тогда $GA/A \simeq G/G \cap A$ и, так как по индукции $G \cap A \in \Sigma'$, $GA/A \in \Sigma'$, а также $E\Sigma' \subseteq \Sigma'$, то $G \in \Sigma'$.

3) Пусть $\{G_\alpha | \alpha \in M\}$ — локальная система группы G_1 из Σ' -групп, каждая из которых имеет глубину меньшую, чем $n+1$. Тогда, очевидно, система $\{G_\alpha | \alpha \in M\}$, где $G_\alpha = G \cap G'$, будет локальной для группы G и по индукции для каждого $\alpha \in M$ $G_\alpha \in \Sigma'$. Но $LE' = \Sigma'$. Следовательно, по $G \in \Sigma'$.

Утверждение (3) доказано. Из него сразу следует (1). Докажем теперь (2). Обозначим $\Sigma' = \{T\Sigma|E, L\rangle$ и снова индукцией по глубине n до $T\Sigma$ докажем, что

$$T\Sigma' \subseteq \Sigma', \quad S\Sigma' \subseteq \Sigma'. \quad (4)$$

Докажем сначала первое включение. При $n=0$ имеем $TT\Sigma \subseteq \Sigma'$, что очевидно.

Пусть теперь $G = G'/H$, где G' есть Σ' -группа глубины $n+1$ до $T\Sigma$. Рассмотрим два случая:

1) $G'/A \simeq B$, где A и B есть Σ' -группы глубины, меньше $n+1$. Ввиду изоморфизмов $G'/AH \simeq (G'/A)/(AH/A)$, $AH/H \simeq A/A \cap H$ и, в силу индуктивного предположения, имеем $G'/AH, AH/H \in \Sigma'$. Рассмотрим, далее, изоморфизм $(G'/H)/(AH/H) \simeq G'/AH$. Отсюда, и из $E\Sigma' \subseteq \Sigma'$ следует, что

$$G'/H \in \Sigma', \text{ т. е. } G \in \Sigma'.$$

2) $\{G_\alpha | \alpha \in M\}$ — локальная система группы G из Σ' -групп, каждая из которых имеет глубину до $T\Sigma$, меньшую $n+1$. Тогда система подгрупп $\{G_\alpha | \alpha \in M\}$, где $G_\alpha = G'_\alpha/H/H$, будет локальной для группы G'/H . Ввиду изоморфизма $G'_\alpha H/H \simeq G'_\alpha/G_\alpha \cap H$ и в силу индуктивного предположения, $G_\alpha \in \Sigma'$ для всех $\alpha \in M$ и, так как $LE' \subseteq \Sigma'$, то $G \in \Sigma'$. Первое из утверждений (4) доказано, докажем второе.

При $n=0$ мы имеем $ST\Sigma \subseteq \Sigma'$. Действительно, пусть $G \in ST\Sigma$. Тогда $G \subseteq G' \in T\Sigma$ и $G' = G''/H$, где $G'' \in S\Sigma$. Ясно, что $G = G_1/H$, $G_1 \subseteq G''$. Но тогда $G_1 \in S\Sigma$. Следовательно, $G \in T\Sigma$.

и так как $T\Sigma \subseteq \Sigma'$, то $G \in \Sigma'$. Теперь предположим, что $G \subseteq G'$, где G' есть Σ' -группа глубины $n+1$ до $T\Sigma$. Тогда возможны такие случаи:

1) $G'/A \simeq B$, где A и B — Σ' -группы глубины, меньше $n+1$. Ясно, что $GA/A \simeq G/G \cap A$. С другой стороны, по индуктивному предположению $G \cap A \in \Sigma'$ и $GA/A \in \Sigma'$. Отсюда и из $E\Sigma' \subseteq \Sigma'$ следует, что $G \in \Sigma'$.

2) $[G'_\alpha | \alpha \in M]$ — локальная система группы G' из Σ' -групп, каждая из которых имеет глубину, меньшую $n+1$ до $T\Sigma$. Тогда, очевидно, система $[G_\alpha | \alpha \in M]$, где $G_\alpha = G \cap G'_\alpha$, будет локальной для группы G и по индукции получаем $G_\alpha \in \Sigma'$ для всех $\alpha \in M$. Но $L\Sigma' \subseteq \Sigma'$. Следовательно, $G \in \Sigma'$. Доказано и второе из утверждений (4). Из этих утверждений следует (2). Лемма доказана.

Класс групп называется *силовским*, если $\theta\Sigma \subseteq \Sigma$, где $\theta = S, T, E, L$. Из доказанной леммы следуют некоторые утверждения о силовском классе, порожденном данным (замкнутым относительно подгрупп и гомоморфных образов), классом групп Σ , т. е. о минимальном силовском классе, содержащем Σ .

Следствие 1. Если класс групп Σ замкнут относительно подгрупп (подгрупп и гомоморфных образов), то порожденный им силовский класс получается из Σ -групп всевозможными последовательными применениями операторов T, E и L (E и L) конечное число раз.

Для произвольного класса Σ обозначим через $\bar{\Sigma}$ класс групп, каждый элемент которых порождает циклическую Σ -группу. Если, например, Σ — класс всех локально конечных p -групп, то $\bar{\Sigma}$ — будет классом всех p -групп. Ясно, что если $S\Sigma \subseteq \Sigma$, то $\Sigma \subseteq \bar{\Sigma}$.

Лемма 2. Пусть $\langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$ — *расщепляемая система силовских классов* (см. [3] и [6]). Тогда для всякого $\alpha \in M$

$$\left\{ \bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha | S, T, E, L \right\} \cap \bar{\Sigma}_\alpha = \Sigma_\alpha.$$

Доказательство. Ясно, что $TS \left(\bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha$.

Следовательно, по предыдущей лемме достаточно показать, что

$$\left\{ \bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha | E, L \right\} \cap \bar{\Sigma}_\alpha = \Sigma_\alpha.$$

Последнее равенство докажем индукцией по глубине n . При $n=0$ оно очевидно. Пусть G есть $\bar{\Sigma}$ -группа глубины $n+1$. Тогда возможны следующие случаи:

1) $G/A \simeq B$, где A и B принадлежат классу $\left\{ \bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha | E, L \right\}$ и имеют глубины, меньшие $n+1$. Из $G \in \bar{\Sigma}_\alpha$ и из того, что $\bar{\Sigma}_\alpha$ — силовский класс (это очевидно), следует, что $A, B \in \bar{\Sigma}_\alpha$. По индукции $A, B \in \Sigma_\alpha$. Но $E\Sigma_\alpha = \Sigma_\alpha$. Следовательно, $G \in \Sigma_\alpha$.

2) $[G_\beta | \beta \in N]$ — локальная система группы G из $\left\{ \bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha | E, L \right\}$ -групп, каждая из которых имеет глубину, меньшую $n+1$. Тогда из $G_\beta \subseteq G$

следует $G_\beta \in \bar{\Sigma}_\alpha$. По индукции $G_\beta \in \Sigma_\alpha$ для всех $\beta \in N$, и так как $L\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_\alpha$, то $G \in \Sigma_\alpha$. Лемма доказана.

2°. В дальнейшем всюду через Q будет обозначена расщепляемая система силовских классов $\langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$. Для всякой группы G обозначим через $R_\alpha(G)$ максимальную нормальную Σ_α -подгруппу этой группы. Далее положим

$$R_Q(G) = \prod_{\alpha \in M} R_\alpha(G).$$

Подгруппа $R_Q(G)$ будет максимальной Q -разложимой (см. [3]) нормальной подгруппой группы G . В работе Б. И. Плоткина [3] показано, что класс Q -разложимых групп радикальна в смысле Плоткина. Следовательно, подгруппа $R_Q(G)$ определена однозначно. Это же верно и для $R_\alpha(G)$. Эти подгруппы назовем Q и Σ_α -радикалами группы G .

Подгруппу A некоторой группы G назовем Q -картеровской, если она

- 1) Q -разложима,
- 2) максимальна в G как Q -разложимая подгруппа,
- 3) совпадает со своим нормализатором в G .

В работе Стонехевера [2] рассматривались совпадающие со своими нормализаторами, максимальные локально-нильпотентные подгруппы периодических групп. Эти подгруппы будут Q -картеровскими, если для каждого $\alpha \in M$ вместо класса Σ_α взять класс всех p_α -групп, где p_α — простое число и различным α соответствуют различные p_α .

В дальнейшем всюду через K обозначается некоторый класс групп со свойствами $SK \subseteq K$ и $TK \subseteq K$.

Скажем, что для группы G имеет место SQ -теорема, если для всякого $\alpha \in M$ в G имеет место сопряженность силовских Σ_α -подгрупп.

Теорема 1. Пусть в каждой конечной K -группе имеет место SQ -теорема. Тогда каждая локально конечная K -группа, являющаяся расширением Q -разложимой группы при помощи конечной Q -разложимой группы, обладает Q -картеровской подгруппой.

Доказательство. Пусть G — заданное расширение, H — ее Q -разложимая нормальная подгруппа конечного индекса. Проведем доказательство индукцией по числу тех $\alpha \in M$, для которых силовские Σ_α -подгруппы группы G не нормальны в ней (так как группа $\bar{G} = G/H$ конечна, то число таких α также конечно). Если таких α не существует, то G сама Q -разложима. Действительно, пусть G не является Q -разложимой. Тогда ясно, что $G \neq R_Q(G)$. Далее, из $H \subseteq R_Q(G)$ следует, что группа $G/R_Q(G)$ также Q -разложима. Следовательно существует такая $\alpha \in M$ и такая подгруппа A группы G , что

$$1 \neq A/R_Q(G) \in \Sigma_\alpha.$$

Теперь, так как $A \in \{ \cup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha / S, \Sigma, E, L \}$, то здесь можно применить

лемму 1 из [6]. По этой лемме существует Σ_α -элемент группы A , не содержащийся в $R_Q(G)$. Но, по предположению, все Σ_α -элементы группы G содержатся в $R_\alpha(G)$ и, значит, в $R_Q(G)$. Полученное противоречие и показывает, что G — Q -разложима.

Для дальнейшего необходимо доказать две леммы.

Лемма 3. Пусть для некоторого $\alpha \in M$ в каждой конечной K -группе имеет место $C \langle \Sigma_\alpha \rangle$ -теорема. Тогда, если локально конечная K -группа G обладает Q -разложимым нормальным делителем H конечного индекса, то в G также имеет место $C \langle \Sigma_\alpha \rangle$ -теорема.

Доказательство. Пусть A и B —силовские Σ_α -подгруппы группы G . Обозначим каждое из равных подгрупп $A \cap H$ и $B \cap H$ через C . Она будет составлена из всех Σ_α -элементов группы H , следовательно характеристична в ней и нормальна в G . Ввиду изоморфизмов $AH/H \simeq A/C$ и $BH/H \simeq B/C$ подгруппы A/C и B/C конечны, и так как G —локально конечна, то конечна и группа $D = \langle A, B \rangle / C$. С другой стороны, A/C и B/C —силовские Σ_α -подгруппы в группе G/C и, следовательно, в D . Если, например, $A/C \subseteq A_1/C \in \Sigma_\alpha$, где A_1 —подгруппа в G , то $A_1 \in \Sigma_\alpha$ и отсюда из $A \subseteq A_1$ получаем $A = A_1$. Теперь по предположению в D имеет место сопряженность подгрупп A/C и B/C , откуда и следует сопряженность A и B .

Лемма 4. Пусть для некоторого $\alpha \in M$ в каждой конечной K -группе имеет место $C \langle \Sigma_\alpha \rangle$ -теорема. Тогда, если локально конечная K -группа G обладает Q -разложимой нормальной подгруппой H конечного индекса, то образ $\bar{A}$ силовской Σ_α -подгруппы A группы G при естественном гомоморфизме $G \rightarrow \bar{G} = G/H$ будет силовской Σ_α -подгруппой в $\bar{G}$.

Доказательство. Предположим, что

$$\bar{A} \subseteq \bar{A}_1 = A_1/H \in \Sigma_\alpha. \tag{5}$$

Ясно, что $\bar{A}_1$ —конечная, а A_1 —локально конечная группы. Следовательно

$$A_1 = BH, \tag{6}$$

где B —конечная группа. Обозначим

$$\Sigma_\alpha^- = \{ \bigcup_{\beta \in M / \langle \alpha \rangle} \Sigma_\beta \mid E, L \}.$$

Из леммы 2 работы [6] следует, что

$$\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\alpha^- = \varepsilon, \tag{7}$$

где ε —силовский класс, состоящий только из единичной группы. Пусть теперь a —некоторый Σ_α^- -элемент группы A_1 . Тогда из (5) и (7) следует, что $a \in H$, т. е. $a \in R_\alpha^-(H)$ и все Σ_α^- -элементы группы A_1 составляют подгруппу в ней. Но $B \subseteq A_1$, значит Σ_α^- -элементы группы

B также составляют подгруппу в ней. Ясно, что это будет подгруппа $R_{\alpha}(B)$. Отсюда, учитывая, что $B \in \{ \bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_{\alpha} / E, L \}$ и (7) получаем

$$B/R_{\alpha}(B) \in \Sigma_{\alpha},$$

или

$$B/R_{\alpha}(B) \in \Sigma_{\alpha},$$

в силу леммы 2.

Теперь, по известной теореме Шура, $B = CR_{\alpha}(B)$, где $C = B/R_{\alpha}(B)$ и, следовательно, $C \in \Sigma_{\alpha}$. Далее, имея ввиду (6), получим

$$\begin{aligned} A_1 &= CR_{\alpha}(B)H = \\ &= CR_{\alpha}(H)R_{\alpha}(B)R_{\alpha}(H) = CR_{\alpha}(H)R_{\alpha}(H), \end{aligned}$$

где $CR_{\alpha}(H) \in \Sigma_{\alpha}$. По лемме 3 в группе A_1 имеет место сопряженность силовских Σ_{α} -подгрупп для всех $\alpha \in M$. Следовательно, для некоторого $\alpha \in A_1$ имеем

$$\alpha^{-1}CR_{\alpha}(H)\alpha \subseteq A.$$

Но тогда $A_1H = AH$ и $\bar{A}_1 = \bar{A}$, т. е. действительно $\bar{A}$ — силовская Σ_{α} -подгруппа в $\bar{G}$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть для $\alpha \in M$ силовская Σ_{α} -подгруппа G_{α} группы G не ненормальна в ней. Обозначим $\bar{G}_{\alpha} = G_{\alpha}H/H$. По лемме 4 $\bar{G}_{\alpha}$ будет силовской Σ_{α} -подгруппой в группе $\bar{G}$. Но $\bar{G}$ — Q -разложима. Следовательно $\bar{G}_{\alpha} \perp \bar{G}$ или $G_{\alpha}H \trianglelefteq G$. Обозначим, далее, $D = N_G(G_{\alpha})$. Покажем, что

$$HD = G. \quad (8)$$

Действительно, пусть $g \in G$. Тогда G_{α} и $g^{-1}G_{\alpha}g$ будут силовскими Σ_{α} -подгруппами группы $G_{\alpha}H$, и так как по лемме 3 в группе $G_{\alpha}H$ имеет место $C \langle \Sigma_{\alpha} \rangle$ -теорема, то существует такой элемент c из $G_{\alpha}H$, что

$$c^{-1}G_{\alpha}c = g^{-1}G_{\alpha}g.$$

Отсюда $cg^{-1} \in D$, т. е. $g \in HD$ и (8) доказано. Докажем теперь, что в G существует Q -разложимая подгруппа L с условием

$$G = LH. \quad (9)$$

Ясно, что в группе D меньше таких α , для которых силовская Σ_{α} -подгруппа нормальна в ней (по сравнению с G). По индуктивному предположению в ней существует Q -разложимая подгруппа L с условием

$$D = L(H \cap D).$$

Отсюда, имея ввиду (8), получаем (9).

Берем теперь максимальную подгруппу из L , удовлетворяющую равенству (9). Тогда

$$L = \bigcap_{\alpha \in M} N_G(G_\alpha), \quad (10)$$

где G_α — некоторая силовская Σ_α -подгруппа группы G .

Действительно, так как L — Q -разложима, то $L \subseteq N_G(L_\alpha)$, где L_α — силовская Σ_α -подгруппа группы L . Далее, $L \subseteq N_G(R_\alpha(G))$ и, следовательно, $L \subseteq N_G(L_\alpha R_\alpha(G))$. Но $L_\alpha R_\alpha(G)$ — силовская Σ_α -подгруппа в G , так как

$$\begin{aligned} G &= LH = (L_\alpha L_\alpha^-) R_\alpha(H) R_\alpha^-(H) = \\ &= (L_\alpha R_\alpha(H))(L_\alpha^- R_\alpha^-(H)), \end{aligned}$$

$$G_\alpha = L_\alpha R_\alpha(H) \in \Sigma_\alpha, \quad L_\alpha^- R_\alpha^-(H) \in \Sigma_\alpha^-$$

и $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\alpha^- = \epsilon$.

Но группа $\bigcap_{\alpha \in M} N_G(G_\alpha)$ Q -разложима (это доказывается точно так же, как в начале доказательства теоремы устанавливалась Q -разложимость группы G), и поскольку L — максимальная Q -разложимая подгруппа группы G , то (10) справедливо.

Пусть теперь $x \in N_G(L)$. Тогда $x \in N_G(L_\alpha)$ для всех $\alpha \in M$, или $x \in N_G(L_\alpha R_\alpha(H))$, т. е. $x \in N_G(G_\alpha)$ и, следовательно, $x \in L$. Теорема доказана.

Под фактором группы G , как это принято, будем понимать каждую фактор-группу любой ее подгруппы.

Из хода доказательства теоремы 1 видно, что можно было доказать и такую теорему.

Теорема 1*. Локально конечная группа, в каждом конечном факторе которой имеет место CQ -теорема и которая является расширением Q -разложимой группы, при помощи конечной Q -разложимой группы, обладает Q -картеровской подгруппой.

3°. Обозначим через $\{\Sigma\}$ — силовский класс, порожденный классом групп Σ , т. е. $\{\Sigma\} = \{\Sigma | S, T, E, L\}$. Напомним, что $Q = \langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$ — расщепляемая система силовских классов. Для всякого $N \subseteq M$, $|N| > 1$, где $|N|$ — мощность множества N , отметим силовский класс L_N с условием $\{\Sigma_\beta | \beta \in N\} \subseteq L_N \subseteq \overline{\{\Sigma_\beta | \beta \in N\}}$. Совокупность всех таких L_N обозначим через L . Теперь систему подгрупп $\langle G_\alpha | \alpha \in M \rangle$ некоторой группы G назовем ее силовской LQ -базой, если

1) Для каждого $\alpha \in M$ G_α является силовской Σ_α -подгруппой группы G .

2) Для всякого $N \subseteq M$, $|N| > 1$ $\{G_\beta | \beta \in N\} \in L_N$. В частности, если $L_N = \{\Sigma_\beta | \beta \in N\}$ для всех $N \subseteq M$, то эту систему назовем силовской нижней Q -базой. Очевидно, каждая силовская нижняя Q -база будет и силовской LQ -базой для всякой совокупности L .

Обратное же утверждение неверно. Если вместе с 1) и 2) вы-
появляется еще и

3) $\{G_\alpha | \alpha \in M\} = G$,

то заданную систему назовем полной силовской LQ -базой. Аналогично определяется полная силовская нижняя Q -база.

Примерами силовских LQ -баз являются известное понятие силовой Π -базы (см. [1]), силовой θ -базы, силовой Σ -базы (см. [6]) и т. д.

Сейчас мы докажем один критерий существования полной силовой нижней Q -базы.

Теорема 2. Пусть в произвольной конечной K -группе имеет место CQ -теорема. Тогда каждая локально конечная K -группа, являющаяся расширением Q -разложимой группы при помощи конечной Q -разложимой группы, обладает полной силовой нижней Q -базой.

Доказательство. Здесь выполняются все условия теоремы 1 и в обозначениях этой теоремы существует Q -картеровская подгруппа L группы G , представимая в виде $L = \bigcap_{\alpha \in M} N_G(H_\alpha L_\alpha)$, где $H_\alpha L_\alpha$ — силовская Σ_α -подгруппа группы G . Из $H_{\alpha_1} L_{\alpha_1} \cdots H_{\alpha_n} L_{\alpha_n} = (H_{\alpha_1} \cdots H_{\alpha_n})(L_{\alpha_1} \cdots L_{\alpha_n})$ и из $H_{\alpha_1} \cdots H_{\alpha_n}, L_{\alpha_1} \cdots L_{\alpha_n} \in \{\Sigma_{\alpha_1}, \dots, \Sigma_{\alpha_n}\}$, ввиду изоморфизма $H_{\alpha_1} \cdots H_{\alpha_n} L_{\alpha_1} \cdots L_{\alpha_n} / H_{\alpha_1} \cdots H_{\alpha_n} \cong L_{\alpha_1} \cdots L_{\alpha_n} / H_{\alpha_1} \cdots H_{\alpha_n} \cap L_{\alpha_1} \cdots L_{\alpha_n}$ получаем $H_{\alpha_1} \cdots L_{\alpha_n} \in \{\Sigma_{\alpha_1}, \dots, \Sigma_{\alpha_n}\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in M$. Но существует только конечное число $\alpha \in M$, для которых силовская Σ_α -подгруппа не нормальна в G . Следовательно, система $\langle H_\alpha L_\alpha | \alpha \in M \rangle$ будет силовой нижней Q -базой группы G . Покажем, что она полная. Действительно, по лемме 4 подгруппа $H_\alpha L_\alpha H / H = L_\alpha H / H$, $\alpha \in M$, будет силовской Σ_α -подгруппой в группе G/H . Следовательно, система $\langle G_\alpha H / H | \alpha \in M \rangle$ является нижней силовой Q -базой в G/H . Но G/H Q -разложима. Следовательно $G/H = \{L_\alpha H / H | \alpha \in M\}$ или $G = \{L_\alpha H | \alpha \in M\} = \{L_\alpha H_\alpha | \alpha \in M\}$. Теорема доказана.

Аналогично можно было доказать и такую теорему.

Теорема 2*. Пусть в любом конечном факторе локально конечной группы G имеет место CQ -теорема. Тогда, если G является расширением Q -разложимой группы при помощи конечной Q -разложимой группы, то она обладает полной силовой нижней Q -базой.

4°. Теорема 3. Пусть в каждой конечной K -группе справедлива CQ -теорема, и пусть локально конечная K -группа G обладает Q -разложимой нормальной подгруппой конечного индекса. Тогда из существования в группе $G = G/H$ Q -картеровских подгрупп следует существование таких подгрупп и в группе G .

Доказательство. Пусть $\bar{B} = B/H$ — Q -картеровская подгруппа группы $\bar{G}$. Группа B удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. По этой теореме в B существует такая максимальная, совпадающая со своим нормализатором Q -разложимая подгруппа L , что $B = LH$. Пусть $x \in N_G(L)$. Тогда $x \in N_G(B)$. Следовательно $x \in B$ и $x \in N_B(L)$, откуда $x \in L$. Предположим, что L^* — Q -разложимая подгруппа группы G , содержащая L . Тогда группа $\bar{L}^* = L^*H/H$ также Q -разложима, и ввиду

$L^* \supseteq \bar{B}$ и максимальнойности $\bar{B}$ и $\bar{G}$ получаем $L^* = \bar{B}$ или $B = LH = L^*H$. Но L — максимальная Q -разложимая подгруппа в B и $L \subseteq L^* \subseteq B$. Следовательно, $L = L^*$ и теорема доказана.

Здесь можно было доказать и такую теорему.

Теорема 3*. Пусть в каждом конечном факторе локально конечной группы G справедлива CQ -теорема. Тогда, если в G существует Q -разложимая нормальная подгруппа H конечного индекса, то из существования в группе G/H Q -картеровских подгрупп следует существование таких подгрупп в группе G .

В работе Б. И. Плоткина [4] через $R(G)$ обозначен локально нильпотентный радикал группы G . Там же показано, что локально конечная и локально нильпотентная группа разлагается в прямое произведение своих силовских p -подгрупп. Имея в виду это, приходим к такому следствию.

Следствие 2. Пусть G — локально конечная, а $\bar{G} = G/R(G)$ — конечная группы. Тогда из существования в $\bar{G}$ максимальных, совпадающих со своими нормализаторами, локально нильпотентных подгрупп следует существование таких подгрупп в G .

В теореме 2.1 работы [2] аналогичный результат получен при наличии еще и требования локальной разрешимости на G . Но так как существуют простые картеровы (т. е. максимальные совпадающие со своими нормализаторами нильпотентные) подгруппы, то следствие 2 сильнее соответствующего утверждения указанной теоремы.

5°. По-прежнему $Q = \langle \Sigma_\alpha \mid \alpha \in M \rangle$ — расщепляемая система силовских классов. Назовем группу G ON -группой, если для всякого $\alpha \in M$ каждая Σ_α -подгруппа группы G удовлетворяет нормализаторному условию. QN -группой будет каждая N -группа (см. [1]). Если вместо каждого Σ_α взять некоторый класс p_α -групп, где p_α — простое число, то каждая конечная группа также будет QN -группой.

Теорема 4. Пусть в каждой конечной K -группе справедлива CQ -теорема, а локально конечная K -группа G обладает такой Q -разложимой нормальной подгруппой H , что $\bar{G} = G/H$ — конечная QN -группа. Тогда из сопряженности в $\bar{G}$ Q -картеровских подгрупп следует сопряженность таких подгрупп в группе G .

Доказательство. Сначала индукцией по тем $\alpha \in M$, для которых силовская Σ_α -подгруппа не нормальна в G , докажем следующую лемму.

Лемма 5. Пусть в каждой конечной K -группе выполняется CQ -теорема. Тогда, если локально конечная K -группа G обладает Q -разложимой нормальной подгруппой H конечного индекса, то Q -картеровские подгруппы группы G , представимые в виде $G = LH$, сопряжены.

Доказательство. Ясно, что группа G/H Q -разложима и, как следует из доказательства теоремы 1, Q -картеровские подгруппы

L и L^* , удовлетворяющие условию леммы, можно представить в таком виде

$$L = \bigcap_{\alpha \in M} N_G(G_\alpha), \quad L^* = \bigcap_{\alpha \in M} N_G(G_\alpha^*),$$

где G_α и G_α^* — силовские Σ_α -подгруппы группы G . Так как, по лемме 3, в G имеет место сопряженность силовских Σ_α -подгрупп, то можно считать, что L^* (точнее, некоторая ее сопряженная), содержится в $N_G(G_\alpha)$. Но тогда

$$N_G(G_\alpha) = L(H \cap N_G(G_\alpha)) = L^*(H \cap N_G(G_\alpha)).$$

Группа $N_G(G_\alpha)/H \cap N_G(G_\alpha)$ конечна и Q -разложима. Далее, в группе $N_G(G_\alpha)$ меньше α , для которых силовская Σ_α -подгруппа не нормальна в ней. По индукции, в $N_G(G_\alpha)$ имеет место сопряженность подгрупп L и L^* , что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть L — произвольная Q -картеровская подгруппа группы G . Ясно, что группа $\bar{L} = LH/H$ Q -разложима. Пусть $x \in N_G(LH)$, тогда $x^{-1}Lx$ будет Q -картеровской подгруппой группы LH и $x^{-1}Lx = LH$. По лемме 5, отсюда следует сопряженность подгрупп L и $x^{-1}Lx$ в LH , т. е. существует такой элемент $y \in LH$, что

$$y^{-1}Ly = x^{-1}Lx$$

или $xy^{-1} \in N_G(L)$. Следовательно, $xy^{-1} \in L$ и $x \in LH$. Таким образом, подгруппа LH совпадает со своим нормализатором в G . Такой будет и, следовательно, подгруппа $\bar{L}$ в $\bar{G}$. Если теперь $\bar{L}$ строго содержится в некоторой Q -разложимой подгруппе $\bar{L}_1$ группы $\bar{G}$, то ввиду того, что $\bar{G}$ QN -группа, $\bar{L}_1$ будет N -группой и, следовательно, $\bar{L}$ строго будет содержаться в своем нормализаторе, в группе $\bar{L}_1$, и так как $N_{\bar{L}_1}(\bar{L}) \subseteq N_{\bar{G}}(\bar{L})$, то получается противоречие, что и доказывает максимальность подгруппы $\bar{L}$ в $\bar{G}$ как Q -разложимой подгруппы.

Таким образом, если L и L^* Q -картеровские подгруппы в G , то $\bar{L}$ и $\bar{L}^*$ будут такими в группе $\bar{G}$. Но, по предположению, в $\bar{G}$ имеет место сопряженность указанных подгрупп, т. е.

$$x^{-1}LxH = L^*H,$$

где $x \in G$. Теперь, по лемме 5, подгруппы $x^{-1}Lx$ и L^* сопряжены. Сопряжены, следовательно, и подгруппы L и L^* . Теорема доказана.

И здесь можно было сформулировать теорему 4*, как это делалось в предыдущих случаях.

Следствие 3. Пусть G — локально конечная, а $G/R(G)$ — конечная группы. Тогда из сопряженности в $G/R(G)$ максимальных совпадающих со своими нормализаторами нильпотентных подгрупп следует сопряженность в G максимальных совпадающих со своими нормализаторами локально нильпотентных подгрупп.

В упомянутой теореме 2.1 из [2] этот же результат получен при наличии локально разрешимости группы G .

Следовательно, и здесь можно было бы сделать замечание, которое делалось по поводу следствия 2.

В заключение, с чувством глубокой благодарности хотелось бы отметить, что настоящая работа выполнена под руководством покойного профессора А. Г. Куроша.

Ереванский государственный
университет

Поступило 15.III.1972

Հ. Ս. ՄԻԿԱԵԼԻԱՆ. Վերջավոր ինդեքսով Q -նադիկալ ունեցող լոկալ վերջավոր խմբերի Q -կարտերյան ենթախմբերի մասին (ամփոփում)

Հոդվածում մտցվում է Q -կարտերյան ենթախմբի գաղափարը: Ստացվում են թեորեմներ վերջավոր ինդեքսով Q -նադիկալ ունեցող լոկալ վերջավոր խմբերում Q -կարտերյան ենթախմբերի գոյություն և համալուծության վերաբերյալ: Այդ թեորեմներից մասնավոր դեպքերում ստացված հետևանքները ուժեղացնում են Ստոնհեյվերի [2] աշխատանքի հիմնական արդյունքը:

H. S. MIKAELIAN. *On Q -carter subgroups of locally finite groups with finite index Q -radical (summary)*

The notion of Q -carter subgroup generalises the concepts, introduced in [2]. Some theorems of existence and conjugateness of Q -carter subgroups are proved for locally finite groups. These theorems actually improve the conditions, under which the main result of Stonehewers [2] is valid.

The Sylow LQ -base is defined and a criterium of existence of complete Sylow Q -base is proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Г. Курош. Теория групп, Изд. 3, М., 1967.
2. S. E. Stonehewer. Abnormal subgroups of a class of periodic locally soluble groups, Proc. London Math. Soc., 14, 1964, 520—536.
3. Б. И. Плоткин. Абстрактные силовские свойства, Тр. Уральск. электромех. ин-та инж. ж.-д. трансп., вып. 2, 1959, 7—14.
4. Б. И. Плоткин. Радикальные группы, Мат. сб., 37, 1955, 507—526.
5. W. Specht. Gruppentheorie, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1956.
6. Г. С. Микаелян. О силовских базах бесконечных групп относительно расщепляемой системы силовских классов, Известия АН Арм.ССР, „Математика“, V, № 2, 1970, 154—161.
7. Г. С. Микаелян. О силовских LQ -базах групп, Известия АН Арм.ССР, „Математика“, VI, № 5, 1971, 393—405.