ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 6, 1972 Математика

Г. Б. МАРАНДЖЯН

О СТРОГО ЭФФЕКТИВНОЙ ИММУННОСТИ СТЕРЖНЕЙ АДДИТИВНО ОПТИМАЛЬНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе [2] А. Н. Колмогоров ввел понятие сложности натурального числа относительно частично рекурсивной функции и понятие асимптотически оптимальной рекурсивной функции (АОФ)*. В [4] исследованы некоторые свойства этих функций, в частности, введено понятие стержня частично рекурсивной функции и доказано, что стержень АОФ—иммунное, но не гипериммунное множество (теорема 10). В настоящей работе будет доказано, что стержень любой АОФ есть строго эффективно иммунное множество. Будет также доказано, что всякая нижняя вычислимая оценка сложностей натуральных чисел относительно АОФ конструктивно ограничена, что является усилением теоремы 8 из [4].

Символы $\simeq$, [ ] и μ используются в том же смысле, в каком они используются в [1]. Напомним, что если R—$(n+1)$-местный перечислимый предикат, то через $\mu y R(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ обозначается n-местная частично рекурсивная функция, определенная на наборе $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $\exists y R(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ и принимающая в качестве значения такое натуральное число t, что имеет место $R(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$.

Следуя [7], суждение „частично рекурсивная функция α определена на наборе чисел $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$“ будем записывать следующим образом: $!\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n)$; если A и B—предметные термы, то суждение $A \& !B \& A \simeq B$ будем записывать следующим образом: $A \doteq B$.

Будем предполагать, что зафиксирована некоторая универсальная нумерация частично рекурсивных функций и связанная с ней постовская нумерация рекурсивно перечислимых множеств и, следуя [9], одноместную функцию с номером n в этой нумерации будем обозначать φ_n, а область ее определения — W_n.

Все термины и утверждения понимаются конструктивно [5], [7].

Предикат M определим следующим образом ([3], [4]):

$$M(\alpha, \beta, c) \leftrightarrows \forall x\,(!\beta(x) \supset \exists y\,(\alpha(y) \doteq \beta(x) \& \lambda(y) \leqslant \lambda(x) + c)),$$

где $\lambda(x) = [\log_2(x+1)]$.

Содержательно $M(\alpha, \beta, c)$ означает, что функция α кодирует натуральные числа, быть может, на константу c „хуже“ чем β.

* Ниже будет использоваться термин „аддитивно оптимальная функция“ вместо „асимптотически оптимальная функция“.

Предикат $\bar{\alpha}$ определяется следующим образом ([4]):

$$\bar{\alpha}(x, y) \leftrightarrows \exists z (\alpha(z) \doteq x \& \lambda(z) = y) \& \forall z (\alpha(z) \doteq x \supset \urcorner \lambda(z) < y).$$

$\bar{\alpha}(x, y)$ содержательно означает, что y есть сложность числа x относительно частично рекурсивной функции α.

Всякой частично рекурсивной одноместной функции α ставим в соответствие множество S_α, именуемое *стержнем* функции α следующим образом [3]: относим к S_α те и только те натуральные числа x, которые удовлетворяют условию

$$!\,\alpha(x) \& \forall y (y < x \supset \urcorner (!\,\alpha(y) \& \alpha(y) \doteq \alpha(x))).$$

Таким образом, S_α — множество тех значений аргументов, при которых функция α „впервые" принимает то или иное значение. Напомним теперь определение строго эффективно иммунного множества [8].

Определение. Бесконечное множество A называется *строго эффективно иммунным*, если существует такая частично рекурсивная* одноместная функция π, что выполняется условие

$$\forall x (W_x \subseteq A \supset (!\,\pi(x) \& \forall y (y \in W_x \supset y < \pi(x)))).$$

Лемма. *Каковы бы ни были функция* α, *аддитивно оптимальная для множества* $\Psi^{(1)}$ *всех одноместных частично рекурсивных функций и двухместная частично рекурсивная функция* θ, *можно построить такую одноместную обще рекурсивную функцию* ρ, *что будет выполнено следующее условие*:

$$\forall xy (!\,\theta(x, y) \supset \forall z (\bar{\alpha}(\theta(x, y), z) \supset z \leqslant \rho(x) + \lambda(y))). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть α — АОФ для $\Psi^{(1)}$ и θ — двухместная частично рекурсивная функция. По определению АОФ имеем

$$\forall x \exists c M(\alpha, \varphi_x, c),$$

что конструктивно понимается как возможность построения такой обще рекурсивной функции β, что выполняется условие

$$\forall x M(\alpha, \varphi_x, \beta(x)). \tag{2}$$

Используя S_n^m-теорему из § 65 монографии [1], можно построить такую обще рекурсивную функцию γ, что будем иметь

$$\varphi_{\gamma(x)}(y) \simeq \theta(x, y), \tag{3}$$

а также такую обще рекурсивную функцию δ, что

$$\varphi_{\delta(x)}(y) \simeq \varphi_{\gamma(x)}(\alpha(y)). \tag{4}$$

Из (2) следует

$$\forall x M(\alpha, \varphi_{\delta(x)}, \beta(\delta(x))),$$

или, более подробно

---

* Класс определяемых множеств не изменится, если в определении заменить „частично рекурсивная" на „обще рекурсивная" (см. [8]).

$$\forall xy\,(!\,\varphi_{\delta(x)}(y) \supset \exists t\,(\alpha(t) \doteq \varphi_{\delta(x)}(y)\ \&\ \lambda(t) < \lambda(y) + \beta(\delta(x)))),$$

откуда вытекает

$$\forall xyz\,(\varphi_{\delta(x)}(y) \doteq \varphi_{\gamma(x)}(z) \supset \exists t\,(\alpha(t) \doteq \varphi_{\gamma(x)}(z)\ \&\ \lambda(t) \leqslant \lambda(y) + \beta(\delta(x)))). \tag{5}$$

Из (4) получаем

$$\forall xyz\,(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\alpha(y) \doteq z \supset \varphi_{\delta(x)}(y) \doteq \varphi_{\gamma(x)}(z))). \tag{6}$$

Из совместного рассмотрения (5) и (6) получим

$$\forall xyz\,(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\alpha(y) \doteq z \supset \exists t\,(\alpha(t) \doteq \varphi_{\gamma(x)}(z)\ \&\ \lambda(t) \leqslant \lambda(y) + \beta(\delta(x))))), \tag{7}$$

откуда непосредственно следует

$$\forall xtzp\,(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset ((\bar{\alpha}(z, \lambda(t))\ \&\ \bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p))) \supset \lambda(p) \leqslant \lambda(t) + \beta(\delta(x)))). \tag{8}$$

Поскольку α—АОФ, то, согласно лемме 4 из § 1 гл. 1 [4], найдется такая константа c, что будем иметь

$$\forall zt\,(\bar{\alpha}(z, \lambda(t)) \supset \lambda(t) \leqslant \lambda(z) + c). \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем

$$\forall xtzp\,(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset ((\bar{\alpha}(z, \lambda(t))\ \&\ \bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p))) \supset \lambda(p) < \lambda(z) + c + \beta(\delta(x)))),$$

откуда, после несложных преобразований, следует

$$\forall xtzp\,(\bar{\alpha}(z, \lambda(t)) \supset (!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p)) \supset \lambda(p) \leqslant \lambda(z) + c + \beta(\delta(x))))),$$

а тогда

$$\forall xzp\,(\neg\neg\exists t\bar{\alpha}(z, \lambda(t)) \supset \neg\neg(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p)) \supset \lambda(p) \leqslant \lambda(z) + c + \beta(\delta(x))))),$$

откуда, используя разрешимость отношения $\lambda(p) \leqslant \lambda(z) + c + \beta(\delta(x))$, получим

$$\forall xzp\,(\neg\neg\exists t\bar{\alpha}(z, \lambda(t)) \supset (!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p)) \supset \lambda(p) \leqslant \lambda(z) + c + \beta(\delta(x))))),$$

а затем

$$\forall z\neg\neg\exists t\bar{\alpha}(z, \lambda(t)) \supset \forall xzp\,(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p)) \supset \lambda(p) \leqslant \lambda(z) + c + \beta(\delta(x)))). \tag{10}$$

Согласно следствию 2 из § 1 гл. 1 [4] имеем

$$\forall z\neg\neg\exists t\,\bar{\alpha}(z, \lambda(t)). \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует

$$\forall xzp\,(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p)) \supset \lambda(p) \leqslant \lambda(z) + c + \beta(\delta(x)))). \quad (12)$$

Для завершения доказательства леммы достаточно теперь взять

$$\rho(x) = \beta(\delta(x)) + c,$$

тогда из (3) и (12) последует (1). Лемма доказана.

Докажем теперь следующую теорему, дающую, в частности, естественный пример строго эффективно иммунного множества.

Теорема 1. *Стержень функции, аддитивно оптимальной для класса всех одноместных частично рекурсивных функций, есть строго эффективно иммунное множество.*

Доказательство. Пусть α — одноместная частично рекурсивная функция, аддитивно оптимальная для класса $\mathcal{Y}^{(1)}$. Построим частично рекурсивную функцию ψ следующим образом:

$$\psi(n, 0) \simeq \nu t\,(!\,\varphi_n(t)\,\&\,\varphi_n(t) > 0);$$

$$\psi(n, x+1) \simeq \nu t\,(!\,\varphi_n(t)\,\&\,\varphi_n(t) \geqslant 2\psi(n, x)).$$

Нетрудно видеть, что одноместная функция, получающаяся из ψ фиксацией на месте первого аргумента произвольного натурального числа n, является стройной функцией [6] по второму аргументу*, причем в области своего определения эта функция перечисляет в возрастающем порядке некоторое подмножество множества W_n. Нетрудно также видеть, что

$$!\,\psi(n, x) \supset \psi(n, x) \geqslant 2^x. \quad (13)$$

Определим функцию θ следующим образом:

$$\theta(n, x) \simeq \alpha(\psi(n, x)).$$

По лемме, доказанной выше, найдется такая обще рекурсивная функция ρ, что будет выполнено условие

$$\forall xnz\,(!\,\theta(n, x) \supset (\bar{\alpha}(\theta(n, x), z) \supset z \leqslant \rho(n) + \lambda(x))). \quad (14)$$

Докажем теперь, что при любом n, если $W_n \subseteq S_\alpha$, то

$$\forall y\,(y \in W_n \supset y < 2^{3(\rho(n)+1)}).$$

Пусть n таково, что $W_n \subseteq S_\alpha$. Тогда

$$\forall x\,((!\,\theta(n, x) \equiv !\,\psi(n, x))\,\&\,\psi(n, x) \in S_\alpha), \quad (15)$$

следовательно

$$\forall xz\,(!\,\theta(n, x) \supset (\bar{\alpha}(\theta(n, x), z) \supset z = \lambda(\psi(n, x)))). \quad (16)$$

Рассматривая совместно (14) и (16) и учитывая (15), получим

$$\forall xz\,(!\,\psi(n, x) \supset (\bar{\alpha}(\theta(n, x), z) \supset \lambda(\psi(n, x)) \leqslant \rho(n) + \lambda(x))),$$

---

* $(n+1)$-местная частично рекурсивная функция ξ называется стройной по $(n+1)$-му аргументу, если выполнено условие

$$\forall x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}\,(!\,\xi(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}+1) \supset !\,\xi(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1})).$$

откуда следует

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,x)\supset\forall z\,(\bar{\alpha}\,(\theta\,(n,\,x),\;z)\supset\lambda\,(\psi\,(n,\;x))\leqslant\rho\,(n)+\lambda\,(x))),$$

а затем

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,\;x)\supset(\exists z\bar{\alpha}\,(\theta\,(n,\;x),\;z)\supset\lambda\,(\psi\,(n,\;x))\leqslant\rho\,(n)+\lambda\,(x))),$$

откуда получаем

$$\forall x\,((!\,\psi\,(n,\;x)\,\&\neg\neg\exists z\,\bar{\alpha}\,(\theta\,(n,\;x),\;z))\supset\lambda\,(\psi\,(n,\;x))\leqslant\rho\,(n)+\lambda\,(x))).$$

Из предыдущей формулы, используя следствие 2 из § 1 гл. 1 [4], получим

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,\;x)\supset\lambda\,(\psi\,(n,\;x))\leqslant\lambda\,(x+\rho\,(n)).\tag{17}$$

Из (13) имеем

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,\;x)\supset\lambda\,(\psi\,(n,\;x))\geqslant x).\tag{18}$$

Из (17) и (18) получаем

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,\;x)\supset x\leqslant\rho\,(n)+\lambda\,(x)),\tag{19}$$

откуда, учитывая очевидное неравенство

$$\lambda\,(x)\leqslant\frac{x+1}{2},\tag{20}$$

получаем

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,\;x)\supset x\leqslant 2\rho\,(n)+1).\tag{21}$$

Из (17) и (21) вытекает

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,\;x)\supset\lambda\,(\psi\,(n,\;x))\leqslant\rho\,(n)+\lambda\,(2\rho\,(n)+1)),$$

откуда, еще раз использовав неравенство (20), получим

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,\;x)\supset\lambda\,(\psi\,(n,\;x))<3\rho\,(n)+1),$$

следовательно, имеем

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,\;x)\supset\psi\,(n,\;x)<2^{3\rho\,(n)+2}).\tag{22}$$

Из (22), учитывая способ построения функции ψ, получаем

$$\neg\exists t\;(!\,\varphi_n\,(t)\,\&\,t\geqslant 2\cdot 2^{3\rho\,(n)+2}),$$

то есть

$$\forall t\,(!\,\varphi_n\,(t)\supset t<2^{3\,(\rho\,(n)+1)}),$$

откуда получим

$$\forall t\,(t\in W_n\supset t<2^{3\,(\rho\,(n)+1)}),$$

завершая тем самым доказательство теоремы.

Теорема 2. *Какова бы ни была АОФ α для $Ч^{(1)}$, любая частично рекурсивная нижняя оценка сложностей натуральных чисел относительно функции α конструктивно ограничена.*

Доказательство. Определим частично рекурсивную функцию ψ следующим образом:

$$\psi(x, 0) \simeq \nu t\, (!\, \varphi_x(t)),$$

$$\psi(x, y+1) \simeq \nu t\, (!\, \varphi_x(t) \,\&\, \varphi_x(t) > \varphi_x(\psi(x, y))).$$

Используя лемму, доказанную выше, построим такую обще рекурсивную функцию ρ, чтобы выполнялось условие

$$\forall xy\, (!\, \psi(x, y) \supset \forall z\, (\bar{\alpha}(\psi(x, y), z) \supset z \leqslant \rho(x) + \lambda(y))). \tag{23}$$

Допустим теперь, что частично рекурсивная функция β является нижней оценкой сложностей натуральных чисел относительно α. Это означает, что имеем

$$\forall x\, (!\, \beta(x) \supset \forall z\, (\bar{\alpha}(x, z) \supset \beta(x) \leqslant z)). \tag{24}$$

Пусть число m есть номер функции β в выбранной нами нумерации. Тогда (24) можно переписать следующим образом:

$$\forall x\, (!\, \varphi_m(x) \supset \forall z\, (\bar{\alpha}(x, z) \supset \varphi_m(x) \leqslant z)),$$

а тогда, учитывая то обстоятельство, что

$$\forall mx\, (!\, \psi(m, x) \supset !\, \varphi_m(\psi(m, x))),$$

получаем

$$\forall x\, (!\, \psi(m, x) \supset \forall z\, (\bar{\alpha}(\psi(m, x), z) \supset \varphi_m(\psi(m, x)) \leqslant z)). \tag{25}$$

Из (23) и (25) следует

$$\forall x\, (!\, \psi(m, x) \supset \forall z\, (\bar{\alpha}(\psi(m, x), z) \supset \varphi_m(\psi(m, x)) \leqslant \rho(m) + \lambda(x))). \tag{26}$$

Из построения функции ψ очевидным образом следует

$$\forall nx\, (!\, \varphi_n(\psi(n, x)) \supset \varphi_n(\psi(n, x)) \geqslant x). \tag{27}$$

Из (26) и (27) получаем

$$\forall x\, (!\, \psi(m, x) \supset \forall z\, (\bar{\alpha}(\psi(m, x), z) \supset x \leqslant \rho(m) + \lambda(x))),$$

откуда, после несложных преобразований, следует

$$\forall x\, (x > \rho(m) + \lambda(x) \supset (!\, \psi(m, x) \supset \neg \exists z\, (\bar{\alpha}(\psi(m, x), z)))). \tag{28}$$

Докажем теперь, что

$$\forall x\, (x > 2\rho(m) + 4 \supset \neg\, !\, \psi(m, x)). \tag{29}$$

В самом деле, легко видеть, что выполнено следующее условие:

$$\forall x\, (x > 2\rho(m) + 4 \supset x > \rho(m) + \lambda(x)),$$

что вместе с (28) дает

$$\forall x\, (x > 2\rho(m) + 4 \supset (!\, \psi(m, x) \supset \neg \exists z\, (\bar{\alpha}(\psi(m, x), z)))). \tag{30}$$

Пусть теперь a таково, что

$$a > 2\rho(m) + 4.$$

Тогда, если $!\,\psi(m, a)$, то из (30) следует, что выполнено условие

$$\neg\exists z\,(\overline{\alpha}\,(\psi\,(m, a),\ z)).$$

Но, как вытекает из следствия 2 § 1 гл. 1 [4], из $!\,\psi\,(m, a)$ имеем

$$\neg\neg\exists z\,(\overline{\alpha}\,(\psi\,(m, a),\ z)). \tag{31}$$

Из полученного противоречия следует (29).

Пусть теперь b таково, что имеем $!\,\psi\,(m, b)$. Тогда из (26) и (29) получим

$$\exists z\,(\overline{\alpha}\,(\psi\,(m, b),\ z)) \supset \varphi_m(\psi\,(m, b)) \leqslant \rho\,(m) + \lambda\,(2\rho\,(m) + 4),$$

откуда следует

$$\exists z\,(\overline{\alpha}\,(\psi\,(m, b),\ z) \supset \varphi_m\,(\psi\,(m, b)) \leqslant 2\,\rho\,(m) + 2.$$

Рассматривая последнюю формулу совместно с (31), получаем

$$\varphi_m\,(\psi\,(m, b)) \leqslant 2\,\rho\,(m) + 2.$$

Обозначим через τ обще рекурсивную функцию, определяемую следующим образом:

$$\tau\,(x) = 2\rho\,(x) + 2.$$

Очевидно, имеем

$$\forall x\,(!\psi\,(m, x) \supset \varphi_m\,(\psi\,(m, x)) \leqslant \tau\,(m)). \tag{32}$$

Из (32), принимая во внимание схему задания функции ψ, получаем

$$\forall x\ (!\ \varphi_m\,(x) \supset \varphi_m\,(x) \leqslant \tau\,(m)),$$

то есть

$$\forall x\,(!\ \beta\,(x) \supset \beta\,(x) \leqslant \tau\,(m)).$$

Таким образом, построена такая обще рекурсивная функция τ, которая по номеру любой частично рекурсивной функции β, ограничивающей сложности натуральных чисел относительно АОФ, выдает число, ограничивающее сверху функцию β. Теорема доказана.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета
Поступило 25.V.1972

Հ. Բ. ՄԱՐԱՆՋՅԱՆ. Ադիտիվորեն օպտիմալ ռեկուրսիվ ֆունկցիաների խիստ էֆեկտիվ իմունության մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են Ա. Ն. Կոլմոգորովի [2] աշխատության մեջ սահմանված ասիմպտոտիկ օպտիմալ ֆունկցիաների (ԱՕՖ) որոշ հատկություններ։

Ապացուցվում են հետևյալ 2 թեորեմները։

1. Կամայական ԱՕՖ-ի կորիզը խիստ էֆեկտիվ իմունային բազմություն է։

2. Ամեն մի մասնակի ռեկուրսիվ ֆունկցիա, որը ներքին գնահատական է հանդիսանում ԱՕՖ-ի նկատմամբ բնական թվերի բարդությունների համար, կոնստրուկտիվորեն սահմանափակ է։

H. B. MARANDJIAN. *On strongly effective immunity of the pivots of additively optimal recursive functions* (summary)

The paper deals with the properties of asymptotically optimal partial recursive functions (AOF) defined by A. N. Kolmogorov [2]. The following two theorems are proved.

1. The "pivot" [4] of any AOF is a strongly effectively immune set.

2. Any partial recursive function minorising the complexities of natural numbers with respect to an AOF is constructively bounded.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. К. Клини.* Введение в метаматематику, ИИЛ, М., 1957.
2. *А. Н. Колмогоров.* Три подхода к определению понятия „количество информации", Проблемы передачи информации, 1, № 1, 1965, 3—11.
3. *Г. Б. Маранджян.* О некоторых свойствах асимптотически оптимальных рекурсивных функций, Известия АН АрмССР, „Математика", IV, № 1, 1969, 3—22.
4. *Г. Б. Маранджян.* О сложностях представлений натуральных чисел с помощью рекурсивных функций, Исследования по теории алгорифмов, М., 1972.
5. *А. А. Марков.* О конструктивной математике, Труды Математического института АН СССР им. В. А. Стеклова, LXVII, М.—Л., 1962, 8—14.
6. *А. А. Мучник.* Решение проблемы сводимости Поста и некоторых других проблем теории алгорифмов, Труды ММО, 7, 1958, 391—405.
7. *Н. А. Шанин.* О конструктивном понимании математических суждений, Труды Математического института АН СССР им. В. А. Стеклова, LVII, М.—Л., 1958, 226—311.
8. *T. G. McLaughlin.* On a class of complete simple sets, Canadian Mathematical Bulletin, 8, № 1, 1965, 33—37.
9. *H. Jr. Rogers.* Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.