ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 5, 1970 Математика

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ, Г. С. ЦЕЙТИН

КРИТЕРИЙ СПРЯМЛЯЕМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Как было показано в [1], для конструктивной спрямляемости конструктивной кривой необходимо, чтобы обе ее компоненты были функциями конструктивно ограниченной вариации, однако это условие не достаточно для конструктивной спрямляемости кривой*. Во время доклада об этих результатах на семинаре в МГУ А. А. Марков высказал следующее предположение: для спрямляемости конструктивной кривой необходимо и достаточно, чтобы компоненты всех конгруэнтных ей кривых были функциями ограниченной вариации. В настоящей статье мы дадим доказательство этого предположения А. А. Маркова.

Будем пользоваться терминологией и обозначениями из [1]. В частности, если фиксирована функция f и кривые K и K_1, определенные на $\alpha\Delta\beta$, то через W и W^* обозначаются алгорифмы, которые перерабатывают всякое дробление $\alpha_0 * \alpha_1 * \cdots * \alpha_h$ сегмента $\alpha\Delta\beta$ соответственно в FR-числа

$$\sum_{l=0}^{h-1} |f(\alpha_{l+1}) - f(\alpha_l)|$$

и

$$\sum_{l=0}^{h-1} \sqrt{(K^{\xi}(\alpha_{l+1}) - K^{\xi}(\alpha_l))^2 + (K^{\eta}(\alpha_{l+1}) - K^{\eta}(\alpha_l))^2}\,;$$

через W_1^* будет обозначаться алгорифм, определяемый так же, как W^*, с заменой K на K_1.

Термины, связанные с конструктивным интегрированием по Риману, понимаются так же, как в [2] и [3]. Будем говорить, что функция f, заданная на $\alpha\Delta\beta$, является *линейной комбинацией* функций g и h, заданных на $\alpha\Delta\beta$, если потенциально осуществимы такие FR-числа u и v, что при любом $x \in \alpha\Delta\beta$

$$f(x) \overline{\overline{\cdot}}\, u \cdot g(x) + v \cdot h(x).$$

Теорема. *Кривая K, заданная на $\alpha\Delta\beta$, спрямляема в том и только в том случае, когда любая линейная комбинация ее компонент является функцией ограниченной вариации; в этом случае длина кривой K равна*

* В дальнейшем прилагательное „конструктивный“ в терминах, относящихся к конструктивному анализу, часто будет опускаться.

$$\frac{1}{2}\cdot\int_{0}^{\pi}\left|\bigvee_{t=\alpha}^{t=\beta}\left(K^{\xi}(t)\cdot\cos\varphi+K^{\eta}(t)\cdot\sin\varphi\right)\right|d\varphi. \tag{1}$$

Для доказательства нам потребуются две леммы.

Пусть F есть конструктивная последовательность функций, определенных на $\alpha\Delta\beta$. Будем говорить, что эта последовательность *равностепенно непрерывна* на $\alpha\Delta\beta$, если

$$\forall n\exists m\forall kxy\,(x,\,y\in\alpha\Delta\beta\,\&\,|x-y|<2^{-m}\supset|F_k(x)-F_k(y)|<2^{-n}).$$

Лемма 1. *Пусть F есть конструктивная последовательность функций, равностепенно непрерывная на $\alpha\Delta\beta$, и пусть конструктивная функция f, определенная на $\alpha\Delta\beta$, такова, что при любом $x\in\alpha\Delta\beta$*

$$F_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}f(x). \tag{2}$$

Тогда функция f равномерно непрерывна на $\alpha\Delta\beta$, и последовательность F сходится к f равномерно.

Доказательство. Докажем вначале равномерную непрерывность f. Пусть n — произвольное натуральное число. Пользуясь равностепенной непрерывностью F, построим натуральное число m такое, что

$$\forall kxy\,(x,\,y\in\alpha\Delta\beta\,\&\,|x-y|<2^{-m}\supset|F_k(x)-F_k(y)|<2^{-n-1}).$$

Тогда, ввиду (2), для любых x и y, принадлежащих $\alpha\Delta\beta$ и таких, что $|x-y|<2^{-m}$, будет

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 2^{-n-1}<2^{-n};$$

таким образом, мы показали, что

$$\forall n\exists m\,\forall xy\,(x,\,y\in\alpha\Delta\beta\,\&\,|x-y|<2^{-m}\supset|f(x)-f(y)|<2^{-n}),$$

т. е. f равномерно непрерывна на $\alpha\Delta\beta$.

Теперь докажем равномерную сходимость F к f. Пусть n — произвольное натуральное число. Построим натуральное число l такое, что

$$\forall kxy\,(x,\,y\in\alpha\Delta\beta\,\&\,|x-y|<2^{-l}\supset|F_k(x)-F_k(y)|<2^{-n-2}),$$

и, кроме того

$$\forall xy\,(x,\,y\in\alpha\Delta\beta\,\&\,|x-y|<2^{-l}\supset|f(x)-f(y)|<2^{-n-2}).$$

Далее, построим натуральное число k такое, что

$$\frac{\beta-\alpha}{k}<2^{-l},$$

FR-числа $u_0,\,u_1,\cdots,\,u_k$ такие, что

$$u_i=\alpha+\frac{i}{k}\cdot(\beta-\alpha)\quad(0\leqslant i\leqslant k),$$

и, наконец, пользуясь соотношением (2), построим натуральное число m такое, что для всякого i от 0 до k и для всякого $j>m$

$$|F_j(u_i)-f(u_i)|<2^{-n-2}.$$

Пусть теперь x — произвольное FR-число, принадлежащее $\alpha\Delta\beta$. Построим натуральное число i такое, что

$$|x-u_i|<2^{-i}.$$

Тогда при всяком $j>m$ будем иметь

$$|F_j(x)-f(x)|\leqslant|F_j(x)-F_j(u_i)|+$$
$$+|F_j(u_i)-f(u_i)|+|f(u_i)-f(x)|<$$
$$<2^{-n-2}+2^{-n-2}+2^{-n-2}<2^{-n}.$$

Таким образом

$$\forall n\exists m\forall jx\,(x\in\alpha\Delta\beta\,\&\,j\geqslant m\supset|F_j(x)-f(x)|<2^{-n}).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Для любых FR чисел u и v

$$\int_0^{\pi}|u\cdot\cos\varphi+v\cdot\sin\varphi|\,d\varphi=2\cdot\sqrt{u^2+v^2}.$$

Доказательство. Если $u^2+v^2=0$, то $u=v=0$, и требуемое утверждение устанавливается немедленно. Если $u^2+v^2\neq0$, то можно построить такое FR-число φ_0, что

$$u=\sqrt{u^2+v^2}\cdot\cos\varphi_0,$$
$$v=\sqrt{u^2+v^2}\cdot\sin\varphi_0,$$

откуда

$$\int_0^{\pi}|u\cdot\cos\varphi+v\cdot\sin\varphi|\,d\varphi=\sqrt{u^2+v^2}\cdot\int_0^{\pi}|\cos(\varphi-\varphi_0)|\,d\varphi=$$

$$=\sqrt{u^2+v^2}\cdot\int_0^{\pi}|\cos\varphi|\,d\varphi=2\cdot\sqrt{u^2+v^2}.$$

Таким образом, требуемое равенство справедливо как в случае u^2+ $+v^2=0$, так и в случае $u^2+v^2\neq0$; следовательно, имеет место двойное отрицание этого равенства, а значит и само равенство.

Доказательство теоремы. Необходимость. Предположим, что кривая K спрямляема. Пусть u и v — какие-либо FR-числа, и пусть функция f, заданная на $\alpha\Delta\beta$, такова, что при любом $x\in\alpha\Delta\beta$

$$f(x)=u\cdot K^{\xi}(x)+v\cdot K^{\eta}(x).$$

Построим кривую K_1 такую, что при любом $x\in\alpha\Delta\beta$

$$K_1^{\xi}(x)=u\cdot K^{\xi}(x)+v\cdot K^{\eta}(x),$$
$$K_1^{\eta}(x)=-v\cdot K^{\xi}(x)+u\cdot K^{\eta}(x).$$

Легко проверить, что для любого дробления P сегмента $\alpha\Delta\beta$

$$W_1^*(P)=\sqrt{u^2+v^2}\cdot W^*(P),$$

а потому, ввиду спрямляемости кривой K, кривая K_1 также спрямляема; но тогда, на основании теоремы 1 из [1], функция K_1^ξ, а значит и f, является функцией ограниченной вариации на $\alpha\Delta\beta$.

Достаточность. Пусть любая линейная комбинация K^ξ и K^η есть функция ограниченной вариации на $\alpha\Delta\beta$. Покажем, что в этом случае кривая K имеет длину, выражающуюся формулой (1).

Из нашего предположения следует, в частности, что K^ξ и K^η суть функции ограниченной вариации; обозначим их вариации через V_ξ и V_η. Пользуясь леммой {1} из [4], легко построить алгорифм J, перерабатывающий всякое FR-число φ в запись функции, которая по всякому FR-числу $t\in\alpha\Delta\beta$ выдает FR-число

$$\cos\varphi\cdot K^\xi(t)+\sin\varphi\cdot K^\eta(t).$$

В дальнейшем вместо „функция, запись которой есть $J(\varphi)$“ мы будем говорить просто „функция J_φ“.

Согласно предположению, для всякого FR-числа φ функция J_φ есть функция ограниченной вариации на $\alpha\Delta\beta$. Таким образом, потенциально осуществим алгорифм, который по всякому φ выдает вариацию функции J_φ. Построим такой алгорифм и обозначим его через h. Мы будем употреблять следующие сокращенные обозначения из [1]:

$$x_i^{(n)}=\alpha+\frac{i}{2^n}\cdot(\beta-\alpha);$$

$$\Delta_n K_i^\xi=K^\xi(x_{i+1}^{(n)})-K^\xi(x_i^{(n)});$$

$$\Delta_n K_i^\eta=K^\eta(x_{i+1}^{(n)})-K^\eta(x_i^{(n)}).$$

Построим конструктивную последовательность H функций, определенных на $0\Delta\pi$, такую, что для любого натурального числа n и любого FR-числа $\varphi\in 0\Delta\pi$

$$H_n(\varphi)=\sum_{i=0}^{2^n-1}|\cos\varphi\cdot\Delta_n K_i^\xi+\sin\varphi\cdot\Delta_n K_i^\eta|.$$

Согласно лемме 4 из [1], при любом φ, принадлежащем $0\Delta\pi$, имеем

$$H_n(\varphi)\underset{n\to\infty}{\to}h(\varphi). \qquad (3)$$

Далее при любых φ_1 и φ_2, принадлежащих $0\Delta\pi$, и при любом натуральном n

$$|H_n(\varphi_2)-H_n(\varphi_1)|=\Bigg|\sum_{i=0}^{2^n-1}|\cos\varphi_2\cdot\Delta_n K_i^\xi+$$

$$+\sin\varphi_2\cdot\Delta_n K_i^\eta|-\sum_{i=0}^{2^n-1}|\cos\varphi_1\cdot\Delta_n K_i^\xi+\sin\varphi_1\cdot\Delta_n K_i^\eta|\Bigg|<$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{2^n-1} \left|(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)\cdot\Delta_n K_l^{\xi} + (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)\cdot\Delta_n K_l^{\eta}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi_2-\varphi_1|\cdot \sum_{l=0}^{2^n-1} (|\Delta_n K_l^{\xi}| + |\Delta_n K_l^{\eta}|) \leqslant |\varphi_2-\varphi_1|\cdot(V_{\xi} + V_{\eta}).$$

Таким образом, последовательность H равностепенно непрерывна на $0\Delta\pi$, а потому, ввиду (3), получаем на основании леммы 1, что функция h равномерно непрерывна, и H равномерно сходится на $0\Delta\pi$ к h. Следовательно функции H_n и h интегрируемы по Риману на $0\Delta\pi$, и

$$\int_0^{\pi} H_n(\varphi)\,d\varphi \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^{\pi} h(\varphi)\,d\varphi. \tag{4}$$

С другой стороны, пользуясь леммой 2, получаем для любого натурального n:

$$\int_0^{\pi} H_n(\varphi)\,d\varphi = \sum_{l=0}^{2^n-1} \int_0^{\pi} |\cos\varphi\cdot\Delta_n K_l^{\xi} + \sin\varphi\cdot\Delta_n K_l^{\eta}|\,d\varphi =$$

$$= 2\cdot \sum_{l=0}^{2^n-1} \sqrt{(\Delta_n K_l^{\xi})^2 + (\Delta_n K_l^{\eta})^2} = 2\cdot W^*(T(n)), \tag{5}$$

где T есть алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное n в дробление $x_0^{(n)} * x_1^{(n)} * \cdots * x_{2^n}^{(n)}$. Из (4) и (5) на основании леммы 5 из [1] следует, что кривая K спрямляема, и FR-число $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} h(\varphi)\,d\varphi$ является ее длиной. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *Для того, чтобы кривая K, заданная на $\alpha\Delta\beta$, была спрямляема, необходимо и достаточно, чтобы для любых FR-чисел u и v, удовлетворяющих условию $u^2 + v^2 = 1$, функция f, заданная на $\alpha\Delta\beta$ и такая, что*

$$\forall t\,(t \in \alpha\Delta\beta \supset f(x) = u\cdot K^{\xi}(t) + v\cdot K^{\eta}(t)),$$

была функцией ограниченной вариации.

В самом деле, необходимость приведенного условия немедленно следует из теоремы; достаточность его фактически установлена в процессе доказательства теоремы, так как там мы использовали ограниченность вариации лишь таких линейных комбинаций K^{ξ} и K^{η}, у которых сумма квадратов коэффициентов есть 1.

Будем говорить, что кривая K_1, заданная на сегменте $\alpha\Delta\beta$, *конгруэнтна* кривой K, заданной на том же сегменте, если потенциально осуществимы такие FR-числа φ, C, D, что при любом $t \in \alpha\Delta\beta$

$$K_1^{\xi}(t) = K^{\xi}(t)\cdot\cos\varphi + K^{\eta}(t)\cdot\sin\varphi + C;$$

$$k_1^{\eta}(t) = -K^{\xi}(t)\cdot\sin\varphi + K^{\eta}(t)\cdot\cos\varphi + D.$$

Следствие 2. *Для того, чтобы кривая K, заданная на ${}_{\alpha}\Delta^{\beta}$, была спрямляема, необходимо и достаточно, чтобы компоненты всех кривых, конгруэнтных K, были функциями ограниченной вариации.*

Следствие 3. Если кривая K, заданная на ${}_{\alpha}\Delta^{\beta}$, равномерно дифференцируема, то ее длина равна

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(K^{\xi\prime}(t))^2 + (K^{\eta\prime}(t))^2}\, dt.$$

Доказательство немедленно следует из формулы (1) и леммы 2 на основании равенства

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{V}}} f = \int_{\alpha}^{\beta} |f'(t)|\, dt,$$

справедливого для любой равномерно дифференцируемой функции (см. [2], теорема 4); возможность перемены порядка интегрирований легко устанавливается, исходя из равномерной непрерывности подынтегральной функции.

Отметим в заключение, что формула (1), выражающая длину кривой через вариации линейных комбинаций ее компонент, может быть доказана аналогичным способом также в рамках классического анализа. Авторы не встречали подобной формулы в литературе по классическому анализу.

Вычислительный центр АН Армянской ССР и
Ереванского государственного университета
Вычислительный центр Ленинградского
государственного университета
Поступило 25.VI.1970

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ, Գ. Ս. ՑԵՅՏԻՆ. Կոնստրուկտիվ հարթ կորերի ուղղելիության հայտանիշը (ամփոփում)

Ապացուցվում է, որ կոնստրուկտիվ կորը կոնստրուկտիվորեն ուղղելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա բաղադրիչների բոլոր գծային կապակցությունները ունեն կոնստրուկտիվորեն սահմանափակ վարիացիաներ։ $\alpha < t < \beta$ միջակայքում որոշված K կորի երկարությունը արտահայտվում է նրա K^{ξ} և K^{η} բաղադրիչների գծային կապակցությունների վարիացիաների միջոցով հետևյալ բանաձևի օգնությամբ՝

$$L = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi}\left[\overset{t=\beta}{\underset{t=\alpha}{\mathrm{V}}}\left(K^{\xi}(t)\cdot\cos\varphi + K^{\eta}(t)\cdot\sin\varphi\right)\right| d\varphi,$$

որը տեղի ունի նաև դասական անալիզում։

I. D. ZASLAVSKY, G. S. TSEYTIN. *Rectifiability criterion for constructive planar curves* (summary)

The following theorem is proved: the constructive curve is constructively rectifiable if and only if all linear combinations of its components are functions of constructively bounded variation. The length of the curve K with components K^{ξ} and K^{η} defined on the segment $\alpha \leq t \leq \beta$ can be expressed in terms of these linear combinations and their variations by means of the formula

$$L=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left|\overset{\beta}{\underset{t=\alpha}{\mathrm{V}}}\left(K^{\xi}(t)\cdot\cos\varphi+K^{\eta}(t)\cdot\sin\varphi\right)\right|d\varphi,$$

which holds also in classical analysis.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Д. Заславский*. О спрямляемости конструктивных плоских кривых, Известия АН АрмССР, „Математика“, 2, № 2, 69—82, 1967.
2. *И. Д. Заславский*. О дифференцируемости и интегрировании конструктивных функций, ДАН СССР, 156, № 1, 1964, 25—27.
3. *Б. А. Кушнер*. Некоторые массовые проблемы, связанные с интегрированием конструктивных функций, Диссертация, Москва, МГУ, 1967.
4. *Г. С. Цейтин*. Об алгорифмических операторах в конструктивных метрических пространствах, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LXVII, 295—361, 1962.