ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 4, 1970 Математика

Ф. Н. ГАЛСТЯН

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

Рассмотрим величину $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k 2^{-k}$, где x_k $(k = 1, 2, \cdots)$ —независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения—1, 0, 1. Положим $p(x_k = -1) = pr$, $p(x_k = 0) = q$ и $p(x_k = 1) = ps$, где p, q, r и s такие вероятности, что $p + q = 1$ $r + s = 1$. В работе исследовано распределение, предельное для $L(s_n)$ при $n \to \infty$. Случай $r=0$ рассмотрен Феллером [4], где установлена сингулярность предельного распределения при $pq(p - q) \neq 0$. Однако Феллер замечает, что точного представления для функции предельного распределения практически не существует. Тем не менее, в данной работе удалось найти очень простое представление для предельной функции распределения величины S_n в общем случае. Кроме того, получен простой алгорифм, позволяющий вычислить значение функции распределения в любой двоично-рациональной точке.

Ввиду того, что $|x_k 2^{-k}| \leqslant \frac{1}{2}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} E(x_k 2^{-k}) = Ex_1 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} D(x_k 2^{-k}) = Dx_1 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} < \infty,$$

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k}$ сходится п.н. [2]. Из п.н. сходимости вытекает сходимость законов распределения $L(s_n)$ в основном.

Функцию распределения и характеристическую функцию предельного распределения обозначим соответственно через $F(x)$ и $f(t)$.

Характеристическая функция случайной величины $x_k 2^{-k}$ равна $q + pre^{-it2^{-k}} + pse^{it2^{-k}}$, следовательно

$$f(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (q + pre^{-it2^{-k}} + pse^{it2^{-k}}). \tag{1}$$

При исследовании предельного распределения нам понадобятся следующие известные леммы [1].

Лемма 1. Пусть Φ_n—последовательность чисто разрывных функций распределения и последовательность сверток $F_n = \Phi_1 * \Phi_2 * \cdots$

$\dots * \Phi_n$ сходится к функции распределения F при $n \to \infty$. Тогда F — или чисто разрывное, или сингулярное, или абсолютно непрерывное распределение.

Лемма 2. В условиях леммы 1 для непрерывности F необходимо и достаточно, чтобы $\prod_{k=1}^{\infty} d_k = 0$, где

$$d_k = \max_x [\Phi_k (x+0) - \Phi_k (x-0)].$$

Доказательство следующей теоремы основывается на этих леммах.

Теорема 1. 1°. *Если* $p(p-q)[q+rs|r-s|] \neq 0$, *то распределение* $F(x)$ *сингулярно.*

2°. *При* $p=q$, $F(x)$ *является композицией следующих трех распределений: равномерного в* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, *несобственного, сосредоточенного в точке* $-\frac{1}{2}$ *и распределения с характеристической функцией* $\prod_{k=1}^{\infty} (r + se^{it2^{-k}})$.

3°. *При* $p=1$, $r=s$ — *равномерное распределение в* $(-1, 1)$.

4°. *При* $p=0$ — *несобственное распределение, сосредоточенное в точке* 0.

5°. *При* $p=1$, $r=0$ — *несобственное распределение, сосредоточенное в точке* 1.

6°. *При* $p=1$, $s=0$ — *несобственное распределение, сосредоточенное в точке* -1.

Доказательство. Из соотношения (1) после элементарных преобразований для любого целого m находим

$$|f(2\pi 2^m)|^2 = |f(2\pi)|^2 = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 4pq \sin^2 \pi 2^{-k} - 4p^2 rs \sin^2 2\pi 2^{-k}).$$

Нетрудно установить, что в условиях 1° все множители этого произведения строго положительны. Кроме того

$$\sum_{k=1}^{\infty} (4pq \sin^2 \pi 2^{-k} + 4p^2 rs \sin^2 2\pi 2^{-k}) < \infty.$$

Поэтому, обозначив $2\pi \cdot 2^m = t_m$, получим

$$\lim_{m\to\infty} |f(t_m)| > 0, \text{ следовательно } \overline{\lim_{t\to\infty}} |f(t)| > 0.$$

Из последнего соотношения и из теоремы Римана-Лебега следует, что распределение F не является абсолютно непрерывным.

В условиях 1° $d_k = \max(q, pr, ps) < 1$, следовательно, $\prod_{k=1}^{\infty} d_k = 0$ и по лемме 2 F—непрерывное распределение. Но согласно лемме 1 F не может быть смесью. Пункт 1° теоремы доказан.

Если $p = q = \frac{1}{2}$, то

$$f(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (1 + r e^{-it2^{-k}} + s e^{it2^{-k}}) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (e^{-it2^{-k-1}} + e^{it2^{-k-1}}) (r e^{-it2^{-k-1}} + s e^{it2^{-k-1}}) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \cos t2^{-k-1} e^{-it2^{-k-1}} (r + s e^{it2^{-k}}) =$$

$$= \frac{2 \sin 2^{-1} t}{t} e^{-it2^{-1}} \prod_{k=1}^{\infty} (r + s e^{it2^{-k}}),$$

откуда следует 2°.

Отложим на некоторое время исследование закона распределения $\Phi(x)$, соответствующего характеристической функции

$$\varphi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (r + s e^{it2^{-k}}).$$

Заметим однако, что по этому закону распределена рассмотренная Феллером величина $\sum_{k=1}^{\infty} y_k 2^{-k}$, где y_k—независимые величины, принимающие значения 0 и 1 с вероятностями r и s соответственно.

При $p=1$, $r = s$ имеем

$$f(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (e^{-it2^{-k}} + e^{it2^{-k}}) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos t2^{-k} = \frac{\sin t}{t},$$

что доказывает пункт 3°.

Пункты 4°, 5°, 6° очевидным образом следуют из выражения для $f(t)$ (1).

Следствие. Распределение $\Phi(x)$ при $rs(r-s) \neq 0$ является сингулярным, при $r=0$ — несобственным, сосредоточенным в точке 1, при $r = 1$—несобственным, сосредоточенным в точке 0, при $r=s$—равномерным в (0,1).

Для доказательства первых трех утверждений достаточно заметить, что $\varphi(t)$ получится из $f(t)$, если в последнем заменить p на s, q—на r, r—на 0 и s—на 1. Последнее утверждение проверяется непосредственно

$$\varphi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (1 + e^{it2^{-k}}) = e^{it2^{-1}} \prod_{k=1}^{\infty} \cos t2^{-k-1} = \frac{e^{it}-1}{it}.$$

Теорема 2. *Если* $p(q+rs)\neq 0$, *то* $F(x)$ *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$F(x)=qF(2x)+psF(2x-1)+prF(2x+1)$$

и может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда по функциям Уолша. Начальные моменты α_n *распределения* $F(x)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\alpha_n=\frac{p}{2^n-1}\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\left[s+(-1)^{n-k}r\right]\alpha_k,\quad n=1,2,\cdots.$$

Доказательство. В (1), заменив t на $2t$, получим

$$f(2t)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(q+pre^{-it2^{-k+1}}+pse^{it2^{-k+1}}\right)=$$

$$=\left(q+pre^{-it}+pse^{it}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(q+pre^{-it2^{-k}}+pse^{it2^{-k}}\right)=$$

$$=\left(q+pre^{-it}+pse^{it}\right)f(t).$$

Таким образом, характеристическая функция предельного распределения удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(2t)=\left(q+pre^{-it}+pse^{it}\right)f(t). \tag{2}$$

Случайная величина $s=$ п.н. $\lim s_n$ распределена в $[-1,1]$, следовательно $f(t)$ бесконечно дифференцируема. Поэтому для любого целого n из соотношения (2) имеем

$$2^nf^{(n)}(2t)=\left(q+pre^{-it}+pse^{it}\right)f^{(n)}(t)+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\left[(-i)^kpre^{-it}+i^kpse^{it}\right]f^{(n-k)}(t).$$

Подставив $t=0$ и учитывая соотношения $f^{(k)}(0)=i^k\alpha_k$, $\alpha_0=1$, получим

$$2^n i^n\alpha_n=i^n\alpha_n+p\sum_{k=1}^{n}C_n^k\left[(-1)^kr+s\right]i^n\alpha_{n-k},$$

или

$$\alpha_n=\frac{p}{2^n-1}\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\left[s+(-1)^{n-k}r\right]\alpha_k,\quad n=1,2,\cdots. \tag{3}$$

Умножая обе части (2) на $\dfrac{1-e^{-2itx}}{2\pi it}$ и интегрируя в промежутке $(-\infty,+\infty)$ (интегралы понимаются в смысле главного значения), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{-2itx}}{2it}f(2t)\,d(2t)=\frac{q}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{-2itx}}{it}f(t)\,dt+$$

$$+\frac{pr}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-it}-e^{-it(2x+1)}}{it}f(t)dt+\frac{ps}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it}-e^{-it(2x-1)}}{it}f(t)\,dt.$$

Так как $p(q+rs) \neq 0$, то по лемме 2 F непрерывна, поэтому имеем

$$F(x)-F(0)=q[F(2x)-F(0)]+pr[F(2x+1)-F(1)]+$$
$$+ps[F(2x-1)-F(-1)].$$

Однако $F(x)=0$ при $x \leqslant -1$ и $F(x)=1$ при $x \geqslant 1$. Поэтому

$$F(x)=qF(2x)+prF(2x+1)+psF(2x-1)+pF(0)-pr,$$

при $x=1$ отсюда получим $pF(0)-pr=0$, следовательно

$$F(x)=qF(2x)+psF(2x-1)+prF(2x+1). \tag{4}$$

В силу замечания, сделанного при доказательстве следствия теоремы 1, из (2), (3) и (4) вытекает, что функция распределения $\Phi(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Phi(x)=r\Phi(2x)+s\Phi(2x-1), \tag{5}$$

$\varphi(t)$ — уравнению

$$\varphi(2t)=(r+se^{it})\,\varphi(t),$$

а начальные моменты μ_n распределения $\Phi(x)$ — соотношениям

$$\mu_n=\frac{s}{2^n-1}\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\mu_k\,. \tag{6}$$

Соотношения (3) и (6) позволяют вычислить a_n и μ_n для любого n.

При помощи (3) можно вычислить значение $F(x)$ в любой двоично-рациональной точке. Для этого достаточно подставить в (4) вместо x последовательно $0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{5}{8}, \pm\frac{7}{8}, \cdots$ и учесть, что $F(x)=0$ при $x \leqslant -1$ и $F(x)=1$ при $x>1$.

В частности отсюда вытекает, что (4) имеет единственное непрерывное решение, удовлетворяющее указанным условиям.

Приступим к решению функциональных уравнений (4) и (5). Известно (см. [3]), что ортонормальные в $[0,\ 1]$ функции Уолша удовлетворяют соотношениям

$$\varphi_{n+1}^{2k-1}(x)=\begin{cases}\varphi_n^k(2x), & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}\\ (-1)^{k+1}\varphi_n^k(2x-1), & \frac{1}{2} < x \leqslant 1,\end{cases} \tag{7}$$

$$\varphi_{n+1}^{2k}(x)=\begin{cases}\varphi_n^k(2x), & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}\\ (-1)^{k}\varphi_n^k(2x-1), & \frac{1}{2} < x \leqslant 1\end{cases}\quad (n>2,\ 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}).$$

Решение уравнения (4) будем искать в виде

$$F(x)=a_0+a_1\varphi_1\left(\frac{x+1}{2}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}a_n^k\varphi_n^k\left(\frac{x+1}{2}\right),\ -1<x<1. \tag{8}$$

При $-1 < x < -\frac{1}{2}$ (4) обратится в следующее:

$$F(x) = prF(2x+1).$$

Заменив F разложением (8), получим

$$a_0 + a_1\varphi_1\left(\frac{x+1}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k \varphi_n^k\left(\frac{x+1}{2}\right) = pr\left[a_0 + a_1\varphi_1(x+1) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k \varphi_n^k (x+1)\right].$$

Воспользовавшись соотношениями (7), после несложных преобразований находим

$$a_0 + a_1 + a_2^1 + a_2^2 + (a_3^1 + a_3^2 + a_3^3 + a_3^4)\,\varphi_1(2x+2) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} (a_{n+2}^{4k-3} + a_{n+2}^{4k-2} + a_{n+2}^{4k-1} + a_{n+2}^{4k})\ \varphi_n^k(2x+2) =$$

$$= pr\left[\ a_0 + a_1 + (a_2^1 + a_2^2)\ \varphi_1(2x+2) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} (a_{n+1}^{2k-1} + a_{n+1}^{2k})\ \varphi_n^k(2x+2)\right].$$

В рассматриваемом случае $0 < 2x+2 < 1$, поэтому, приравняв коэффициенты при одинаковых функциях Уолша, получим

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1 + a_2^1 + a_2^2 = pr\,(a_0 + a_1) \\
&a_3^1 + a_3^2 + a_3^3 + a_3^4 = pr\,(a_2^1 + a_2^2) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{n+2}^{4k-3} + a_{n+2}^{4k-2} + a_{n+2}^{4k-1} + a_{n+2}^{4k} = pr\,(a_{n+1}^{2k-1} + a_{n+1}^{2k}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{9}$$

$$n \geqslant 1,\ 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}.$$

При $-\frac{1}{2} < x < 0$ уравнение (4) примет вид

$$F(x) = qF(2x) + prF(2x+1).$$

Заменив F разложением (8) и произведя аналогичные преобразования, получим

$$a_0+a_1-a_2^1-a_2^2-(a_3^1+a_3^2-a_3^3-a_3^4)\,\varphi_1(2x+1)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(a_{n+2}^{4k-3}+a_{n+2}^{4k-2}-a_{n+2}^{4k-1}-a_{n+2}^{4k})(-1)^{k+1}\varphi_n^k(2x+1)=$$

$$=q\Big[a_0+a_1+(a_2^1+a_2^2)\,\varphi_1(2x+1)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(a_{n+1}^{2k-1}+a_{n+1}^{2k})\,\varphi_n^k(2x+1)\Big]+$$

$$+pr\Big[a_0-a_1-(a_2^1-a_2^2)\,\varphi_1(2x+1)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(-1)^{k+1}(a_{n+1}^{2k-1}-a_{n+1}^{2k})\,\varphi_n^k(2x+1)\Big].$$

Имея ввиду, что $0<2x+1<1$, находим

$$\begin{array}{l}
a_0+a_1-a_2^1-a_2^2=q\,(a_0+a_1)+pr\,(a_0-a_1)\\
a_3^1+a_3^2-a_3^3-a_3^4=-q\,(a_2^1+a_2^2)+pr\,(a_2^1-a_2^2)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n+2}^{4k-3}+a_{n+2}^{4k-2}-a_{n+2}^{4k-1}-a_{n+2}^{4k}=(-1)^{k+1}q\,(a_{n+1}^{2k-1}+a_{n+1}^{2k})+pr\,(a_{n+1}^{2k-1}-a_{n+1}^{2k})\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\qquad(10)$$

$$n\geqslant 2,\ 1\leqslant k\leqslant 2^{n-1}.$$

Если $0<x<\dfrac{1}{2}$, то из (4) получим

$$F(x)=qF(2x)+psF(2x-1)+pr$$

или

$$a_0+a_1\varphi_1\left(\frac{x+1}{2}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}a_n^k\varphi_n^k\left(\frac{x+1}{2}\right)=pr+q\Big[a_0+a_1\varphi_1\left(x+\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}a_n^k\varphi_n^k\left(x+\frac{1}{2}\right)\Big]+ps\Big[a_0+a_1\varphi_1(x)+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}a_n^k\varphi_n^k(x)\Big].$$

Воспользовавшись (7), будем иметь

$$a_0-a_1-a_2^1+a_2^2+(a_3^1-a_3^2-a_3^3+a_3^4)\,\varphi_1(2x)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(a_{n+2}^{4k-3}-a_{n+2}^{4k-2}-a_{n+2}^{4k-1}+a_{n+2}^{4k})\,\varphi_n^k(2x)=$$

$$=pr+q\Big[a_0-a_1-(a_2^1-a_2^2)\,\varphi_1(2x)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(-1)^{k+1}(a_{n+1}^{2k-1}-a_{n+1}^{2k})\,\varphi_n^k(2x)\Big]+$$

$$+ps\Big[a_0+a_1+(a_2^1+a_2^2)\,\varphi_1(2x)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(a_{n+1}^{2k-1}+a_{n+1}^{2k})\,\varphi_n^k(2x)\Big].$$

В данном случае $0<2x<1$, следовательно

$$a_0-a_1-a_2^1+a_2^2=pr+q\,(a_0-a_1)+ps\,(a_0+a_1)$$

$$a_3^1-a_3^2-a_3^3+a_3^4=-q\,(a_2^1-a_2^2)+ps\,(a_2^1+a_2^2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{11}$$

$$a_{n+2}^{4k-3}-a_{n+2}^{4k-2}-a_{n+2}^{4k-1}+a_{n+2}^{4k}=(-1)^{k+1}q\,(a_{n+1}^{2k-1}-a_{n+1}^{2k})+ps\,(a_{n+1}^{2k-1}+a_{n+1}^{2k})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n\geqslant 2,\ 1\leqslant k\leqslant 2^{n-1}.$$

Заметив, что при $\frac{1}{2}<x<1$ (4) обращается в

$$F(x)=q+pr+psF(2x-1)$$

и воспользовавшись стандартным приемом, получим

$$a_0-a_1+a_2^1-a_2^2-(a_3^1-a_3^2+a_3^3-a_3^4)\,\varphi_1(2x-1)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(-1)^{k+1}(a_{n+2}^{4k-3}-a_{n+2}^{4k-2}+a_{n+2}^{4k-1}-a_{n+2}^{4k})\,\varphi_n^k(2x-1)=q+pr+$$

$$+ps\Big[a_0-a_1-(a_2^1-a_2^2)\,\varphi_1(2x-1)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(-1)^{k+1}(a_{n+1}^{2k-1}-a_{n+1}^{2k})\,\varphi_n^k(2x-1)\Big].$$

Отсюда, учитывая, что $0<2x-1<1$, находим

$$
\begin{gathered}
a_0 - a_1 + \overset{1}{a}_2 - \overset{2}{a}_2 = q + pr + ps\,(a_0 - a_1)\\
\overset{1}{a}_3 - \overset{2}{a}_3 + \overset{3}{a}_3 - \overset{4}{a}_3 = ps\,(\overset{1}{a}_2 - \overset{2}{a}_2)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\overset{4k-3}{a}_{n+2} - \overset{4k-2}{a}_{n+2} + \overset{4k-1}{a}_{n+2} - \overset{4k}{a}_{n+2} = ps\,(\overset{2k-1}{a}_{n+1} - \overset{2k}{a}_{n+1})\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
n > 2,\ 1 \leqslant k < 2^{n-1}.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

После несложных преобразований уравнения (9), (10), (11) и (12) можно привести к следующему виду, удобному для последовательного нахождения коэффициентов $\overset{k}{a}_n$:

$$
\begin{gathered}
a_0 = \frac{q + 2pr}{2}, \quad a_1 = \frac{2p\,(r - s)\,a_0 - q - 2pr}{2\,(1 + p)}, \quad \overset{1}{a}_2 = \frac{2p(r-s)a_1 - 2qa_0 + q}{4},\\
\overset{2}{a}_2 = \frac{2\,(p - q)\,a_1 - q}{4}, \quad \overset{1}{a}_3 = \frac{(p - q)\,\overset{1}{a}_2}{2}, \quad \overset{2}{a}_3 = \frac{p\,(r - s)\,\overset{1}{a}_2 - q\overset{2}{a}_2}{2},\\
\overset{3}{a}_3 = \frac{q\overset{1}{a}_2 + p\,(r - s)\,\overset{2}{a}_2}{2}, \quad \overset{4}{a}_3 = \frac{1}{2}\,\overset{2}{a}_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\overset{4k-3}{a}_{n+1} = \overset{2k-1}{a}_n\,\frac{p + (-1)^{k+1} q}{2}, \quad \overset{4k-2}{a}_{n+1} = \overset{2k-1}{a}_n\,\frac{p\,(r - s)}{2} + \overset{2k}{a}_n\,\frac{(-1)^{k+1} q}{2},\\
\overset{4k-1}{a}_{n+1} = \overset{2k-1}{a}_n\,\frac{(-1)^k q}{2} + \overset{2k}{a}_n\,\frac{p\,(r - s)}{2}, \quad \overset{4k}{a}_{n+1} = \overset{2k}{a}_n\,\frac{p + (-1)^k q}{2},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
n > 3,\ 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-2}.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Предположим сначала, что $rs \neq 0$, тогда из (13) получим

$$
|\overset{4k-3}{a}_{n+1}| < \frac{1}{2}\,|\overset{2k-1}{a}_n|, \quad |\overset{4k-2}{a}_{n+1}| < \frac{p\,|r - s|}{2}\,|\overset{2k-1}{a}_n| + \frac{q}{2}\,|\overset{2k}{a}_n|,
$$

$$|a_{n+1}^{4k-1}|\leqslant\frac{q}{2}\,|a_n^{2k-1}|+\frac{p\,|r-s|}{2}\,|a_n^{2k}|,\quad |a_{n+1}^{4k}|\leqslant\frac{1}{2}\,|a_n^{2k}|,$$

$$n\geqslant 3,\ 1\leqslant k\leqslant 2^{n-2}.$$

Отсюда следует, что

$$|a_{n+1}^{4k-3}|+|a_{n+1}^{4k-2}|+|a_{n+1}^{4k-1}|+|a_{n+1}^{4k}|\leqslant(|a_n^{2k-1}|+|a_n^{2k}|)\,\frac{1+q+p\,|r-s|}{2}.$$

Если $rs\neq 0$, то $|r-s|<1$, следовательно

$$0<\alpha=\frac{1+q+p\,|r-s|}{2}<1.$$

Поэтому, суммируя полученное неравенство по k от 1 до 2^{n-2}, получим

$$\sum_{k=1}^{2^n}|a_{n+1}^k|\leqslant\alpha\sum_{k=1}^{2^{n-1}}|a_n^k|\quad\text{или}\quad\sum_{k=1}^{2^n}|a_{n+1}^k|\leqslant\alpha^{n+1}\cdot c.$$

Последнее неравенство с учетом того, что $|\varphi_n^k(x)|\leqslant 1$, устанавливает равномерную сходимость (8). Кроме того отсюда следует, что (8) сходится абсолютно.

Из способа нахождения коэффициентов разложения (8) следует, что функция $F(x)$, которая равна сумме этого ряда в $(-1, 1)$ и обращается в 0 и 1 соответственно при $-\infty<x\leqslant-1$ и $1\leqslant x<+\infty$, удовлетворяет уравнению (4) при всех x, кроме, быть может, точек $-\frac{1}{2}$, 0 и $\frac{1}{2}$. Докажем, что эта функция удовлетворяет уравнению (4) и в этих точках. Положим

$$A_n=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}a_n^k,\ D_n=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(-1)^{k+1}a_n^k,\quad n\geqslant 2,$$

$$B_n=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(-1)^{k+1}(a_n^{2k-1}+a_n^{2k}),\ C_n=\sum_{k=1}^{2^{n-2}}(-1)^{k+1}(a_n^{2k-1}-a_n^{2k}),\quad n\geqslant 3,$$

$$E_n=\sum_{k=1}^{2^{n-3}}(-1)^{k+1}(a_n^{4k-3}+a_n^{4k-2}),\ R_n=\sum_{k=1}^{2^{n-3}}(-1)^{k+1}(a_n^{4k-3}-a_n^{4k-2}),\quad n\geqslant 4.$$

При помощи (9), (10), (11) и (12) можно установить, что

$$A_{n+1}=prA_n,\quad n\geqslant 2,$$

$$D_{n+1}=psD_n,\quad n\geqslant 2,$$

$$B_{n+1}=qB_n+prD_n,\quad n\geqslant 3,$$

$$C_{n+1}=qC_n+psA_n,\quad n\geqslant 3,$$

$$E_{n+1}=\frac{1}{2}\,pr\,(B_n+C_n)+\frac{1}{2}\,qA_n,\quad n\geqslant 3,$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{2} ps (B_n + C_n) + \frac{1}{2} qD_n, \quad n \geqslant 3,$$

причем

$$A_2 = \frac{pr (pr - 1)(q + 2pr)}{1 + p}, \quad D_2 = \frac{ps (ps - 1)(q + 2pr - 2)}{1 + p},$$

$$B_3 = prD_2 - qA_2, \quad C_3 = psA_2 - qD_2.$$

Решив систему разностных уравнений, получим

$$A_n = (pr)^{n-2} A_2, \quad D_n = (ps)^{n-2} D_2, \quad n \geqslant 3,$$

$$B_n = q^{n-3} B_3 + p^2 rs\, q^{n-4} D_2 \sum_{k=0}^{n-4} \left(\frac{ps}{q}\right)^k, \quad n \geqslant 4,$$

$$C_n = q^{n-3} C_3 + p^2 rs\, q^{n-4} A_2 \sum_{k=0}^{n-4} \left(\frac{pr}{q}\right)^k, \quad n \geqslant 4.$$

Воспользовавшись определением функций Уолша, найдем

$$F(0) = a_0 + a_1 \varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k \varphi_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = a_0 - a_2^1 + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} (B_n + C_n),$$

$$F\left(-\frac{1}{2}\right) = a_0 + a_1 \varphi_1\left(\frac{1}{4}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k \varphi_n^k\left(\frac{1}{4}\right) = a_0 + a_1 - \frac{A_3 + B_3}{2} + \sum_{n=4}^{\infty} E_n,$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = a_0 + a_1 \varphi_1\left(\frac{3}{4}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k \varphi_n^k\left(\frac{3}{4}\right) = a_0 - a_1 -$$

$$- \frac{C_3 + D_3}{2} + \sum_{n=4}^{\infty} R_n.$$

Отсюда после несложных упрощений имеем

$$F(0) = r, \quad F\left(-\frac{1}{2}\right) = pr^2, \quad F\left(\frac{1}{2}\right) = ps^2,$$

после чего справедливость доказываемого утверждения устанавливается непосредственной подстановкой в (4).

Для установления единственности найденного решения достаточно доказать, что $F(x)$ непрерывна. Непрерывность F в двоично-иррациональных точках промежутка $(-1, 1)$ следует из непрерывности функций Уолша в этих точках и из равномерной сходимости (8).

Рассмотрим точки $x = -1$ и $x = 1$. Легко заметить, что

$$F(-1+0) = a_0 + a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k = a_0 + a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n = a_0 + a_1 + \frac{A_2}{1 - pr} = 0.$$

Аналогично $-F(1-0) = a_0 - a_1 +$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (-1)^{k+1} a_n^k = a_0 - a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} D_n = a_0 - a_1 + \frac{D_2}{1 - ps} = 1.$$

Установив, таким образом, непрерывность F в точках -1 и 1, устремим в (4) x последовательно к $0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{5}{8}, \pm\frac{7}{8}, \cdots$ и обнаружим непрерывность F в любой двоично-рациональной точке.

Рассмотрим теперь случай $rs=0$. Из (1) заключаем, что законы распределений, соответствующие $r=0$ и $s=0$, являются сопряженными. Следовательно, можно ограничиться решением уравнения

$$F(x) = qF(2x) + pF(2x-1), \tag{14}$$

которое имеет такой же вид, что и (5). Заметив, что в рассматриваемом случае $F(x)=0$ при $x \leqslant 0$ и $F(x)=1$ при $x \geqslant 1$, будем искать решение (14) в виде

$$F(x) = b_0 + b_1\varphi_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} b_n^k \varphi_n^k(x), \quad 0 < x < 1. \tag{15}$$

Определим коэффициенты этого разложения. Для этого рассмотрим сначала уравнение (14) при $0 < x < \frac{1}{2}$. В этом случае имеем

$$F(x) = qF(2x).$$

Подставив сюда вместо F разложение (15), получим

$$b_0 + b_1\varphi_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} b_n^k \varphi_n^k(x) = q\left[b_0 + b_1\varphi_1(2x) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} b_n^k \varphi_n^k(2x)\right].$$

Учитывая рекуррентные соотношения между функциями Уолша (7), находим

$$b_0 + b_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-2}} (b_n^{2k-1} + b_n^{2k})\varphi_{n-1}^k(2x) = q\left[b_0 + b_1\varphi_1(2x) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} b_n^k \varphi_n^k(2x)\right].$$

Выделив из суммы в левой части член, соответствующий $n=2$, и заменив в оставшейся сумме n на $n+1$, получим

$$b_0 + b_1 + (b_2^1 + b_2^2)\varphi_1(2x) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} (b_{n+1}^{2k-1} + b_{n+1}^{2k})\varphi_n^k(2x) =$$

$$= q\left[b_0 + b_1\varphi_1(2x) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} b_n^k \varphi_n^k(2x)\right].$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях Уолша (так как $0 < 2x < 1$), получим

$$\begin{gathered} b_0 + b_1 = qb_0 \\ b_2^1 + b_2^2 = qb_1 \\ \cdots\cdots \end{gathered} \tag{16}$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$b_{n+1}^{2k-1} + b_{n+1}^{2k} = qb_n^k$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$n \geqslant 2, \; 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}.$$

Рассмотрим теперь уравнение (14) при $\frac{1}{2} < x < 1$. В этом случае

$$F(x) = pF(2x-1) + q.$$

Подставив сюда вместо F разложение (15) и произведя аналогичные преобразования, получим

$$b_0 - b_1 - (b_2^1 - b_2^2)\varphi_1(2x-1) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} (-1)^{k+1}(b_{n+1}^{2k-1} - b_{n+1}^{2k})\varphi_n^k(2x-1) =$$

$$= q + p\left[b_0 + b_1\varphi_1(2x-1) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} b_n^k\varphi_n^k(2x-1)\right].$$

Учитывая, что $0 < 2x - 1 < 1$, находим

$$
\begin{gathered}
b_0 - b_1 = pb_0 + q \\
b_2^1 - b_2^2 = -pb_1 \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
b_{n+1}^{2k-1} - b_{n+1}^{2k} = (-1)^{k+1}pb_n^k \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
n \geqslant 2, \; 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Уравнения (16) и (17) позволяют вычислить все коэффициенты b_n^k), именно

$$
\begin{gathered}
b_0 = q, \; b_1 = -pq, \\
b_2^1 = pq\frac{p-q}{2}, \; b_2^2 = -\frac{pq}{2}, \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .
\end{gathered}
\tag{18}
$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$b_{n+1}^{2k-1}=b_n^k\frac{q+(-1)^{k+1}p}{2},\quad b_{n+1}^{2k}=b_n^k\frac{q+(-1)^k p}{2},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$n\geqslant 2,\ 1\leqslant k\leqslant 2^{n-1}.$$

Из (18) имеем

$$|b_{n+1}^{2k-1}|=\frac{|q+(-1)^{k+1}p|}{2}|b_n^k|,\quad |b_{n+1}^{2k}|=\frac{|b+(-1)^k p|}{2}|b_n^k|.$$

Отсюда

$$|b_{n+1}^{2k-1}|+|b_{n+1}^{2k}|=|b_n^k|\frac{|q+(-1)^{k+1}p|+|q+(-1)^k p|}{2}=|b_n^k|\max(q,\ p)|.$$

Суммируя по k от 1 до 2^{n-1}, получим

$$\sum_{k=1}^{2^n}|b_{n+1}^k|=\max(q,\ p)\sum_{k=1}^{2^{n-1}}|b_n^k|=\beta\sum_{k=1}^{2^{n-1}}|b_n^k|,$$

или

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}}|b_n^k|\leqslant\beta^n c_1.$$

Так как $r=0$, то из условия теоремы вытекает, что $pq\neq 0$, поэтому $0<\beta=\max(q,\ p)<1$. Отсюда следует равномерная сходимость (15).

Единственность найденного решения устанавливается тем же способом, что и при $rs\neq 0$. Теорема доказана.

Заметим, что для получения решения уравнения (5) при $rs\neq 0$ достаточно в (15) заменить p и q на s и r, соответственно.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Г. А. Амбарцумян за постановку задачи и обсуждение результатов.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 11.XI.1968

Ֆ. Ն. ԳԱԼՍՏՅԱՆ. Մի ռանմանային բաշխման մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ստացված է ֆունկցիոնալ հավասարում $\sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k}$ *պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի համար, որտեղ* x_k ($k=1,\ 2,\cdots$)-- *1,0 և 1 հնարավոր արժեքներով և* pr, q *ու* ps *համապատասխան հավանականություններով անկախ պատահական մեծություններ են։ Այդ հավասարման լուծումը ներկայացված է հավասարաչափ զուգամետ Ռուլյի շարքի տեսքով։*

F. N. GALSTIAN. *On a limit distribution* (summary)

A functional equation is derived for the distribution function of random variable $\sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k}$, where x_k $(k=1, 2,\cdots)$ are identically distributed, and purely discontinuous random variables, with common distribution function with jumps pr at $x=-1$, q at $x=0$ and ps at $x=1$. The solution of this equation is presented as uniformly converging Walsh— Fourier series.

ЛИТЕРАТУРА

1. *C. G. Essen.* Fourier analysis of distribution functions, A mathematical study of the Laplace-Gaussian law., Acta Math., 77, 1945, 1—125.
2. *М. Лоэв.* Теория вероятностей. 1962, 251.
3. *I. L. Walsh.* A closed set of normal orthogonal functions, American Mathematical Society, 1922.
4. *В. Феллер.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, 1967, 178.