

А. Г. РАММ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ В ОБЛАСТЯХ С БЕСКОНЕЧНОЙ ГРАНИЦЕЙ*

В в е д е н и е

В работах Е. Титчмарша [1] и Б. М. Левитана [2] изучены спектр и разложение по собственным функциям оператора Шредингера с растущим потенциалом, рассматриваемого во всем пространстве. В настоящей работе аналогичные вопросы изучаются в области с бесконечной границей.

Статья состоит из четырех параграфов. В § 1 с помощью метода, использованного в работах [1], [3], показано, что собственные числа и собственные функции оператора Шредингера в области могут быть получены с помощью предельного перехода из собственных чисел и собственных функций некоторой вспомогательной задачи во всем пространстве. В § 2 изучено поведение резольвентного ядра оператора Лапласа задачи Дирихле для области D при больших значениях спектрального параметра, и на этой основе изучена асимптотика при $\lambda \rightarrow +\infty$ функции $N(\lambda)$ числа собственных значений, не превосходящих λ . В § 3 сделаны замечания о сходимости разложения по собственным функциям. В § 4 результаты перенесены на случай других краевых задач.

Оказывается, что в то время как спектральный анализ оператора Шредингера с убывающим потенциалом в областях с бесконечной границей доставляет значительные трудности, преодоленные лишь в сравнительно узком классе областей [4], в случае растущего потенциала удастся провести такой анализ в широком классе областей с бесконечной границей.

§ 1. Построение собственных чисел и собственных функций

Всюду в этой статье мы рассматриваем случай, когда

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x) = +\infty, \quad q(x) > 1, \quad x = (x_1, x_2, x_3). \quad (1.1)$$

* Часть результатов этой работы анонсирована в работе [12].

Оказывается, что при предположении (1) можно провести спектральный анализ оператора Шредингера в гораздо более широком классе областей с бесконечными границами, чем это было сделано в [4].

Рассмотрим задачу

$$Lu - \lambda u = (-\Delta + q(x) - \lambda) u = 0 \quad \text{в } D, \quad (1.2)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (1.3)$$

где $D \subset E_3$ — бесконечная область с границей Γ .

Относительно области сделаем следующее предположение.

1. Поверхность Γ является ляпуновской в сфере Σ_R , где $R > 0$ — произвольное число.

Здесь не требуется равномерная ограниченность постоянных Ляпунова на всей поверхности, но в следующем параграфе она понадобится.

Предположение 1 используется, в основном, при интегрировании по частям.

Для поверхности Γ , удовлетворяющей сделанным ограничениям, потенциала, удовлетворяющего условию (1), верна

Лемма 1.1. *Оператор L_0 , определенный дифференциальным выражением (2) на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию (3) и финитных около бесконечности, является симметричным в $L_2(D)$ оператором, имеющим нулевые индексы дефекта. Его замыкание L есть самосопряженный оператор, совпадающий с расширением оператора L_0 по Фридрихсу.*

Доказательства требует лишь утверждение о нулевых индексах дефекта. Повторяя рассуждения леммы 1 из работы [10], мы приходим к заключению, что для любой функции такой, что $v(x) \in L_2(D)$, $Lv(x) \in L_2(D)$ выполнено включение $\forall v \in L_2(D)$. Требуемое утверждение будет доказано, если мы установим симметричность оператора L на $D(L^*)$, что эквивалентно соотношению

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|s|=r, s \in D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (1.4)$$

для любых двух функций u, v из $D(L^*)$. Но если $u \in D(L^*)$, то $u \in L_2(D)$, $Lu \in L_2(D)$, следовательно, в силу сказанного выше, $\forall u \in D(L^*)$ $Lu \in L_2(D)$. Отсюда вытекает соотношение (4). Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Спектр оператора L дискретен.*

Доказательство. В силу известной леммы Реллиха [5], стр. 622) достаточно проверить, что оператор вложения $W_{H_L \rightarrow L_2(D)}$ вполне непрерывен. Здесь H_L — пространство, получающееся пополнением множества $D(L)$ в метрике $\|u\|_{H_L}^2 = \int_D [|\nabla u|^2 + q(x)|u|^2] dx$. Рас-

смотрим единичную сферу в H_L . Это множество компактно в $L_2(K_R)$ при любом R . Через K_R обозначена часть шара $|x| \leq R$, лежащая в D . Выберем диагональным процессом последовательность $\{u_n\}$, сходящуюся в $L_2(K_R)$ при любом R . Покажем, что эта последовательность сходится в $L_2(D)$. Имеем

$$\|u_n - u_m\|_{L_2(D)} \leq \|u_n - u_m\|_{L_2(K_R)} + \|u_n\|_{L_2(D \setminus K_R)} + \|u_m\|_{L_2(D \setminus K_R)}. \quad (1.5)$$

Далее

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L_2(D \setminus K_R)}^2 &= \int_{|x| > R, x \in D} |u_n|^2 dx \leq \frac{1}{\min_{|x| > R} q(x)} \int_{|x| > R} q(x) |u_n|^2 dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\min_{|x| > R} q(x)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Выберем R достаточно большим и зафиксируем его.

После этого выберем n, m достаточно большими. Тогда, в силу сходимости последовательности $\{u_n\}$ в $L_2(K_R)$ и формулы (6), мы убедимся в том, что правая часть равенства (5) делается сколь угодно малой. Лемма доказана.

Обозначим через $\lambda_n, \psi_n(x)$ соответственно собственные значения и собственные функции оператора L . Покажем, что они могут быть получены с помощью предельного перехода из следующей вспомогательной задачи для всего пространства:

$$(L_a - \lambda) u = (-\Delta + p(x) + a(x) - \lambda) u = 0 \text{ в } E_3, \quad (1.7)$$

где

$$a(x) = \begin{cases} 0 & x \in D \\ a & x \in \Omega, \end{cases} \quad a = \text{const} > 0, \quad \Omega = E_3 \setminus D, \quad (1.8)$$

$$p(x) = \begin{cases} q(x) & x \in D \\ f(r) & x \in \Omega, \end{cases} \quad f(r) = \max_{|x|=r, x \in D} |q(x)|. \quad (1.9)$$

Определение функции $p(x)$ и условие (1) влечет за собой дискретность спектра оператора (7). Обозначим его собственные числа через $\lambda_n(a)$, а соответствующие собственные функции — через $\psi_{n,a}(x)$. Если устремить $a \rightarrow \infty$, то следует ожидать, что существуют

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \lambda_n(a) = \lambda_{n,\infty}, \quad (1.10)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \psi_{n,a}(x) = \begin{cases} \psi_{n,\infty}(x), & x \in D \\ 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (1.11)$$

и, кроме того,

$$\psi_{n,\infty}|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (1.12)$$

Мы покажем, что $\psi_{n,\infty}(x) = \psi_n(x)$, $\lambda_{n,\infty} = \lambda_n$.

Поскольку $D[L_a] \supset D[L]$, причем $(L_a u, u) = (L u, u)$, если $u \in D[L]$, то из вариационного принципа вытекает, что при возрастании a числа $\lambda_n(a)$ возрастают, причем

$$\lambda_n(a) \leq \lambda_n. \quad (1.13)$$

Поэтому существует предел (10). Покажем, что существует предел (11), и что числа $\lambda_{n,\infty}$, $\psi_{n,\infty}(x)$ являются собственными числами и собственными функциями задачи (2)–(3). Для функции $\psi_{n,a}(x)$ верна формула

$$\int_{E_2} |\nabla \psi_{n,a}(x)|^2 dx + \int_B q(x) |\psi_{n,a}(x)|^2 dx + \int_a^b f(r) |\psi_{n,a}(x)|^2 dx + \\ + a \int_a^b |\psi_{n,a}(x)|^2 dx = \lambda_n(a). \quad (1.14)$$

Из этой формулы, неравенства (13) и компактности оператора вложения $W(H_L \rightarrow L_2(E_2))$ следует, что существует предел в смысле сходимости в $L_2(E_2)$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \psi_{n,a}(x) = \psi_{n,\infty}(x), \quad (1.15)$$

где a пробегает некоторую последовательность значений. Возможно, что у последовательности $\{\psi_{n,a}(x)\}$ имеется несколько предельных точек. Любую из них мы обозначим через $\psi_{n,\infty}(x)$. Важно заметить, что этих предельных точек может быть лишь конечное число (ввиду компактности вложения $W_{H_L \rightarrow L_2(D)}$), и все они являются собственными функциями задачи (2)–(3). Докажем последнее. Из формул (13), (14) получаем

$$\int_a^b |\psi_{n,a}(x)|^2 dx < \frac{\lambda_n}{a}. \quad (1.16)$$

Отсюда следует, что

$$\int |\psi_{n,\infty}(x)|^2 dx = 0 \quad (1.17)$$

для любой предельной точки последовательности $\{\psi_{n,a}(x)\}$. Как обычно ([1], стр. 397) из соотношений (10), (15) и уравнения

$$(-\Delta + p(x) + a(x) - \lambda_{n,a}) \psi_{n,a} = 0 \text{ в } E_2 \quad (1.18)$$

следует, что

$$(-\Delta + q(x) - \lambda_{n,\infty}) \psi_{n,\infty} = 0 \text{ в } D. \quad (1.19)$$

В любой ограниченной подобласти $\bar{D}$ области D имеет место соотношение (15) в смысле сходимости в $W_2^2(\bar{D})$. Это следует из неравенства

$$\|u\|_{W_2^2(\bar{D})} < C(\bar{D}, \bar{D}_1) \|\Delta u\|_{L_2(\bar{D}_1)}, \quad \bar{D} \subset \bar{D}_1. \quad (1.20)$$

Осталось проверить, что функция $\psi_{n,\infty}(x)$ удовлетворяет условию (3). Из формулы (14) и сказанного выше следует неравенство

$$\int_{\tilde{\Gamma}_n} |\nabla \psi_n|^2 dx < \lambda_n. \quad (1.21)$$

Отсюда, из формулы (17) и теорем вложения вытекает граничное условие (3), понимаемое в смысле

$$\lim_{\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma} \int_{\tilde{\Gamma}} |\psi_{n,\infty}(s)|^2 ds = 0, \quad (1.22)$$

где $\tilde{\Gamma}$ — произвольный кусок гладкой поверхности $\tilde{\Gamma}$, приближающийся к поверхности Γ . Осталось немного добавить, чтобы доказать теорему.

Теорема 1.1. Пусть потенциал $q(x)$ и область D удовлетворяют наложенным в начале § 1 ограничениям. Тогда задача (2) — (3) определяет самосопряженный в $L_2(D)$ оператор L с дискретным спектром, имеющим точку сгущения лишь на бесконечности. Все собственные числа и собственные функции оператора L могут быть получены с помощью предельного перехода (10) — (11) из собственных чисел и собственных функций вспомогательной задачи (7) для всего пространства.

Доказательство. Выше было доказано, что числа $\lambda_{n,\infty}$ и функции $\psi_{n,\infty}(x)$ являются собственными числами и собственными функциями оператора L . Поэтому достаточно доказать, что все собственные числа и собственные функции оператора L могут быть получены из формул (10) — (11). Для этого достаточно установить полноту системы функций $\{\psi_{n,\infty}(x)\}$ в $L_2(D)$. Пусть $g(x)$ — произвольная гладкая финитная в области D функция.

В силу равенства Парсеваля

$$\|g\|_{L_2(D)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(g, \psi_{n,a})|^2. \quad (1.23)$$

Переходя к пределу при $a \rightarrow \infty$ в первых N слагаемых равенства (23) и используя оценку

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |(g, \psi_{n,a})|^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|(Lg, \psi_{n,a})|^2}{\lambda_{n,a}^2} \leq \frac{\|Lg\|_{L_2(D)}^2}{\lambda_{N,a}^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad (1.24)$$

равномерную по $a \gg 1$, мы получаем равенство

$$\|g\|_{L_2(D)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(g, \psi_{n,\infty})|^2 \quad (1.25)$$

для любой $g \in D(L)$. Поскольку множество $D(L)$ плотно в $L_2(D)$ равенство (25) имеет место для любого $g \in L_2(D)$. Приведенное рассуждение аналогично изложенному в [1] (стр. 129). Теорема 1 доказана.

§ 2. Асимптотика собственных чисел

Обозначим через $N(\lambda)$ число собственных значений задачи (1.2) — (1.3), не превосходящих λ . Поставим задачу о нахождении асимптотического поведения функции $N(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Эвристический метод получения результата заключается в следующем. Асимптотика функции $N_n(\lambda)$ для задачи (7) во всем пространстве известна [1], [2]:

$$N_n(\lambda) \sim \frac{1}{6\pi^2} \int_{a(x)+p(x) \leq \lambda} (\lambda - p(x) - a(x))^{3/2} dx, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

При $a = \infty$ формально получаем

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{6\pi^2} \int_{\{x; x \in D, q(x) \leq \lambda\}} [\lambda - q(x)]^{3/2} dx, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Строгое оправдание приведенных соображений, по-видимому, не представляется возможным. Поэтому мы используем схему рассуждений, развитую Е. Титчмаршем [1] и Б. М. Левитаном [2] для случая $D = E_3$. Близким вопросам для случая $D = E_3$ посвящены работы [6], [7].

Сделаем нужные для дальнейшего предположения относительно области D . Будем предполагать выполненными ограничение 1 из § 1 и следующие ограничения:

II. Поверхность Γ — ляпуновская. Постоянные Ляпунова равномерно ограничены, когда центр сферы Ляпунова пробегает всю поверхность Γ .

$$\text{III. } \sup_{s_0 \in \Gamma} \text{mes} \{s: s \subset \Gamma, \delta \leq R \leq |s - s_0| \leq R + 1\} < C e^{aR}, \quad (2.3)$$

где $a > 0$, $c > 0$, $R > 0$ — произвольные постоянные, $\delta > 0$ — радиус сферы Ляпунова для поверхности Γ .

$$\text{IV. } \text{mes} \{x: x \subset D, |x| = r, \rho(x, \Gamma) \leq \varepsilon\} \leq$$

$$\leq C \varepsilon \text{mes} \{x: x \subset D, |x| = r, \rho(x, \Gamma) > \varepsilon\} \text{ для почти всех } r, \quad (2.3')$$

где C — абсолютная постоянная, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ — достаточно мало, ε_0 — фиксированное число, $\rho(x, \Gamma)$ — расстояние от точки x до границы Γ .

Условия III, IV представляются мало стеснительными. Из приводимого ниже доказательства лемм 1—3 станет ясно каким образом они используются.

Предварительно следует изучить свойства функции Грина оператора Лапласа в области D

$$(-\Delta + \mu^2) G(x, y, \mu) = \delta(x - y), \quad \mu > 0, \quad (2.4)$$

$$G(x, y, \mu)|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (2.5)$$

Из принципа максимума вытекает оценка

$$0 \leq G(x, y, \mu) \leq \frac{e^{-\mu|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad x, y \in D + \Gamma. \quad (2.6)$$

Лемма 2.1. Пусть выполнены предположения I, II, III относительно области D . Тогда имеет место оценка

$$G(x, y, \mu) = \frac{e^{-\mu|x-y|}}{4\pi|x-y|} (1 + o(1)), \quad (\mu \rightarrow +\infty, \quad (2.7)$$

где оценка выполняется равномерно относительно x и y , меняющихся в любой строго внутренней подобласти области D , причем $|x-y| \leq \frac{1}{2} \max [\rho(y, \Gamma), \rho(x, \Gamma)]$, где $\rho(y, \Gamma)$ — расстояние от точки y до границы Γ .

Доказательство. Существование функции Грина доказывается точно так же, как это сделано в работах [1], [4].

Рассмотрим тождество

$$G(x, y, \mu) = \frac{e^{-\mu|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \int_{\Gamma} \frac{e^{-\mu|x-s|}}{4\pi|x-s|} \frac{\partial G(s, y, \mu)}{\partial n} ds. \quad (2.8)$$

Функция

$$b(s, y, \mu) \equiv \frac{\partial G(s, y, \mu)}{\partial n} \quad (2.9)$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{1}{2}I + T_{\mu}\right)b = \frac{b}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_{s_0}} \frac{e^{-\mu|s-s_0|}}{4\pi|s-s_0|} b(s) ds = \frac{\partial}{\partial n_{s_0}} \frac{e^{-\mu|s_0-y|}}{4\pi|s_0-y|}. \quad (2.10)$$

Будем рассматривать точку $y \in D$, $\rho(y, \Gamma) > 0$ как параметр, а уравнение (10) — как уравнение в пространстве $C(\Gamma)$ непрерывных на Γ функций. Проверим, что при $\mu \rightarrow \infty$ норма оператора T_{μ} в $C(\Gamma)$ стремится к нулю. Имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\|u\|_{C(\Gamma)}=1} \max_{s_0 \in \Gamma} |T_{\mu} u| &\leq \max_{s_0 \in \Gamma} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial n_{s_0}} \frac{e^{-\mu|s_0-s|}}{4\pi|s_0-s|} \right| ds \leq \max_{s_0 \in \Gamma} \int_{|s-s_0| \leq \delta} \left| \frac{\partial}{\partial n_{s_0}} \right| \times \\ &\times \frac{e^{-\mu|s_0-s|}}{4\pi|s_0-s|} ds + \max_{s_0 \in \Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\delta+n < |s-s_0| < \delta+n+1} \left| \frac{\partial}{\partial n_{s_0}} \frac{e^{-\mu|s_0-s|}}{4\pi|s_0-s|} \right| ds = J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Оценим J_2 с помощью условия III

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} C_{\delta} \int_{\delta+n < |s-s_0| < \delta+n+1} e^{-\mu(\delta+n)} ds \leq \\ &\leq C_{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu(\delta+n)} \text{mes} \{s: s \in \Gamma, \delta+n \leq |s-s_0| \leq \delta+n+1\} \leq \\ &\leq C_{\delta} e^{-\mu\delta+a\delta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\mu-a)n}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отсюда следует, что при $\mu \rightarrow \infty$

$$I_2 = O(e^{-\mu\delta}). \quad (2.13)$$

Оценим J_1

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \max_{s_0 \in \Gamma} \frac{1}{4\pi} \int_{|s-s_0| < \delta} \left| \mu \frac{e^{-\mu|s-s_0|}}{|s-s_0|} + \frac{e^{-\mu|s-s_0|}}{|s-s_0|^2} \right| |\cos(n_{s_0}, r_{ss_0})| ds \leq \\ &\leq \max_{s_0 \in \Gamma} C \int_0^\delta \left(\mu e^{-\mu r} + \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) r^2 dr \leq \frac{C}{\mu^2}, \quad \mu \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $0 < \alpha < 1$ — показатель Ляпунова, участвующий в оценке

$$|\cos(n_{s_0}, r_{ss_0})| \leq C r_{ss_0}^\alpha. \quad (2.15)$$

Таким образом доказано, что

$$\|T_\mu\| < \frac{C}{\mu^\alpha}, \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Следовательно, уравнение (10) однозначно разрешимо методом итераций при достаточно большом μ . Поэтому

$$\max_{s \in \Gamma} |b(s, y, \mu)| \leq C \max_{s \in \Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{e^{-\mu|s-y|}}{4\pi|s-y|} \right| \leq \frac{C\mu e^{-\mu\rho(y, \Gamma)}}{\min[\rho(y, \Gamma), \rho^2(y, \Gamma)]}. \quad (2.17)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\rho(y, \Gamma) \geq \rho(x, \Gamma)$.

Из соотношения (8) следует

$$4\pi G(x, y, \mu) e^{\mu|x-y|} \cdot |x-y| = 1 + \int_{\Gamma} \frac{|x-y|}{|x-s|} e^{\mu(|x-y|-|x-s|)} b(s, y, \mu) ds = 1 + J. \quad (2.18)$$

Используя оценки (16), (17), получаем

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{C\mu|x-y|}{\min[\rho(y, \Gamma), \rho^2(y, \Gamma)]} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\mu|x-s|+\mu|x-y|-\mu\rho(y, \Gamma)}}{|x-s|} ds \leq \\ &\leq \frac{C\mu e^{-\frac{\mu}{2}\rho(y, \Gamma)}}{\min[\rho^2(y, \Gamma), \rho^3(y, \Gamma)]} \int_{\Gamma} e^{-\mu|x-s|} ds. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь мы использовали неравенства

$$|x-y| \leq \frac{\rho(y, \Gamma)}{2}; \quad \frac{\rho(y, \Gamma)}{2} \leq \rho(x, \Gamma) \leq \rho(y, \Gamma). \quad (2.20)$$

Пусть точка $s_0 \in \Gamma$ такова, что $|x-s_0| = \rho(x, \Gamma)$. Тогда

$$\int_{\Gamma} e^{-\mu|x-s|} ds \leq \int_{|s-s_0| < \rho(y, \Gamma)} e^{-\mu|x-s|} ds + \int_{|s-s_0| > \rho(y, \Gamma)} e^{-\mu|x-s|} ds = J_1 + J_2. \quad (2.21)$$

Чтобы оценить J_1 примем во внимание неравенства

$$\frac{|x-s|}{|s-s_0|} > \frac{|x-s_0|}{|s-s_n|} > \frac{\rho(y, \Gamma)}{2\rho(y, \Gamma)} > \frac{1}{2} \text{ при } |s-s_0| \leq \rho(y, \Gamma). \quad (2.22)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \int_{|s-s_0| < \delta} e^{-\mu|x-s|} ds + \int_{\delta < |s-s_0| < \rho(y, \Gamma)} e^{-\mu|x-s| \cdot \frac{|x-s|}{|s-s_0|}} ds \leq C_\delta e^{-\mu\rho(y, \Gamma)} + \\ &+ \int_{\delta < |s-s_0| < \rho(y, \Gamma)} e^{-\frac{\mu}{2}|s-s_0|} ds \leq C_\delta e^{-\frac{\mu}{2}\rho(y, \Gamma)} + C_\delta e^{-\frac{\mu\delta}{2}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Так как $|x-s| > |s-s_0| - |x-s_0|$, то

$$J_2 \leq e^{\mu|x-s_0|} \int_{|s-s_0| > \rho(y, \Gamma)} e^{-\mu|s-s_0|} ds \leq C e^{\mu\rho(y, \Gamma) - \mu\rho(y, \Gamma)} \leq C. \quad (2.24)$$

Оценки (19), (23), (24) приводят к неравенству

$$J \leq \frac{C\mu e^{-\frac{\mu}{2}\rho(y, \Gamma)}}{\min[\rho(y, \Gamma), \rho^2(y, \Gamma)]}. \quad (2.25)$$

Лемма 1 доказана.

Обозначим через D_ε множество точек $y \in D$ таких, что

$$\rho(y, \Gamma) \geq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.26)$$

Через Δ_ε обозначим множество точек D/D_ε .

Лемма 2.2. В условиях леммы 1 равномерно относительно $y \in D_\varepsilon$ имеет место соотношение

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu \int_D G^2(x, y, x) dx = \frac{1}{8\pi}, \quad (2.27)$$

где

$$x \equiv \sqrt{\mu^2 + q(y)}, \quad (2.28)$$

а относительно $q(y)$ предполагается выполненным условие (1.1).

Доказательство. Если в оценке (25) заменить μ на x и воспользоваться условием (26), то получим

$$J \leq C \frac{x e^{-\frac{x^2}{2}}}{\min[\varepsilon, \varepsilon^2]} \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu \int_{|x-y| < \frac{\varepsilon}{2}} G^2(x, y, x) dx = \lim_{\mu \rightarrow \infty} x \int_{|x-y| < \frac{\varepsilon}{2}} \frac{e^{-2x|x-y|}}{16\pi^2|x-y|^2} (1+o(1)) dx =$$

$$= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{z}{16\pi^2} \int_{|z| < \frac{\mu}{2}} \frac{e^{-2\mu|z|}}{|z|^2} dz = \lim_{\mu \rightarrow \infty} z \frac{1 - e^{-\mu z}}{8\pi z} = \frac{1}{8\pi}. \quad (2.30)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} z \int_D G^2(x, y, z) dx &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} z \int_{|x-y| < \frac{\mu}{2}} G^2(x, y, z) dx + \\ &+ \lim_{\mu \rightarrow \infty} z \int_{|x-y| > \frac{\mu}{2}} G^2(x, y, z) dx = \frac{1}{8\pi} + 1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Используя оценку (6), получаем

$$0 \leq I \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} z \int_{|x-y| > \frac{\mu}{2}} \frac{e^{-2\mu|x-y|}}{16\pi^2|x-y|^2} dx \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} C e^{-\mu z} = 0. \quad (2.32)$$

Из формул (31), (32) вытекает утверждение (27) леммы 2.

Лемма 2.3. Пусть выполнены условия I, II, III, IV и, кроме того

$$\max_{|y|=r, y \in D} q(y) \leq \gamma \min_{|y|=r, y \in D} q(y) \equiv \gamma q(r), \quad (2.33)$$

где постоянная $\gamma > 1$ не зависит от r . Тогда при $\mu \rightarrow \infty$

$$\iint_D G^2(x, y, z) dx dy \sim \frac{1}{8\pi} \int_D \frac{dy}{z}. \quad (2.34)$$

Доказательство. Составим дробь

$$\frac{\iint_D G^2(x, y, z) dx dy}{\frac{1}{8\pi} \int_D \frac{dy}{z}} = \frac{\int_{D_1} dy \int_D G^2(x, y, z) dx + \int_{D_2} dy \int_D G^2(x, y, z) dx}{\frac{1}{8\pi} \int_{D_1} \frac{dy}{z} + \frac{1}{8\pi} \int_{D_2} \frac{dy}{z}}. \quad (2.35)$$

По силу леммы 2

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\int_{D_1} dy \int_D G^2(x, y, z) dx}{\int_{D_1} \frac{dy}{8\pi z}} = 1. \quad (2.36)$$

Поэтому для доказательства леммы 3 достаточно проверить, что по любому малому числу $\omega > 0$ можно найти $\varepsilon > 0$ сразу для всех μ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{\int_{\Delta_1} dy \int_D G^2(x, y, z) dx}{\int_{D_1} \frac{dy}{8\pi x}} < \omega, \quad (2.37)$$

$$\frac{\int_{\Delta_1} \frac{dy}{8\pi x}}{\int_{D_1} \frac{dy}{8\pi x}} < \omega, \quad (2.38)$$

Из оценки

$$\int_D G^2(x, y, z) dx \leq \int_D \frac{e^{-2x|x-y|}}{16\pi^2|x-y|^2} dx \leq \frac{c}{x} \quad (2.39)$$

вытекает, что из неравенства (38) следует соотношение (37). Докажем неравенство (38). Обозначим часть сферы Σ_r радиуса r , лежащую Δ_1 , через $\sigma_1(r)$, лежащую в D_1 — через $\Sigma_1(r)$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_1} \frac{dy}{x} &= \int_0^\infty dr \int_{\sigma_1(r)} \frac{d\sigma}{V\mu^2 + q(y)} \leq \int_0^\infty dr \frac{\text{mes } \sigma_1(r)}{V\mu^2 + q(r)} \leq \\ &\leq C_\varepsilon \int_0^\infty \frac{dr \text{mes } \Sigma_1(r)}{V\mu^2 + q(r)} \leq C_\varepsilon \int_0^\infty dr \int_{\Sigma_1(r)} \frac{d\Sigma}{V\mu^2 + \frac{q(y)}{\gamma}} \leq \\ &\leq C_\varepsilon V^{-\gamma} \int_{D_1} \frac{dy}{V\mu^2\gamma + q(y)} \leq C_\varepsilon V^{-\gamma} \int_{D_1} \frac{dy}{V\mu^2 + q(y)}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Здесь было использовано неравенство (33) и учтено, что $\gamma > 1$. Кроме того, было использовано неравенство

$$\text{mes } \sigma_1(r) \leq C_\varepsilon \text{mes } \Sigma_1(r), \quad (2.41)$$

которое непосредственно вытекает из условия (2.3).

Теперь получены все утверждения, нужные для изучения асимптотики функции $N(\lambda)$ методом. Т. Карлемана—Е. Титчмарша—Б. М. Левитана.

Сделаем помимо (1.1) следующие предположения о потенциале [1], [2]:

$$q(x) < Ce^{c|x|}, \quad C > 0, \quad c > 0, \quad (2.42)$$

$$|q(x) - q(y)| < C q^\alpha(x) |x - y|, \quad \text{при } |x - y| \leq 1; \quad 0 < \alpha \leq 1/2, \quad (2.43)$$

$$|q(y)| < C e^{\frac{1}{2}|x-y|\sqrt{q(x)}}, \quad \text{при } |x - y| > 1, \quad (2.44)$$

$$\int_D \frac{dx}{Vq(x)} < \infty. \quad (2.45)$$

Заметим, что в работе [2] показано как условие (45) можно ослабить, изменив условием

$$\int_D \frac{dx}{q^A(x)} < \infty, \quad A > 0. \quad (2.46)$$

Прежде всего установим формулу

$$\begin{aligned} \frac{\psi_n(y)}{\lambda_n + \mu^2} &= \int G(x, y, x) \psi_n(x) dx - \\ &- \frac{1}{\lambda_n + \mu^2} \int [q(y) - q(x)] G(x, y, x) \psi_n(x) dx \equiv a_n + b_n, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где x определено формулой (28), а интегралы без обозначения пределов интегрирования здесь и ниже берутся по D . Через $\psi_n(y)$, λ_n обозначены собственные функции и собственные числа оператора задачи (1.2)–(1.3). Поскольку $\psi_n(x) \in L_2(D)$ верна формула

$$\psi_n(y) = \int [x^2 + \lambda_n - q(x)] D(x, y, x) \psi_n(x) dx, \quad (2.48)$$

из которой непосредственно вытекает равенство (47). Теперь можно доказать теорему, следуя, в основном, схеме, развитой в работах [1], [2] для случая $D = E_3$. Ниже всюду предполагаются выполненными условия I–IV на область и условия (1.1), (33), (42)–(45) — на потенциал.

Теорема 2.1. При сделанных предположениях

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty. \quad (2.49)$$

Доказательство. Из равенства (47) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^2(y)}{(\lambda_n + \mu^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2). \quad (2.50)$$

Используя равенство Парсеваля и оценку (6) имеем

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 dy = \int dy \int G^2(x, y, x) dx \leq C \int dy \int_0^{\infty} \frac{e^{-2xr}}{r^2} r^2 dr \leq C \int \frac{dy}{x}. \quad (2.51)$$

Далее

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\lambda_n + \mu^2} \int_{x \in D, |x-y| < 1} [q(y) - q(x)] G(x, y, x) \psi_n(x) dx + \\ &+ \frac{q(y)}{\lambda_n + \mu^2} \int_{x \in D, |x-y| > 1} G(x, y, x) \psi_n(x) dx - \frac{1}{\lambda_n + \mu^2} \times \end{aligned}$$

$$\times \int_{x \in D, |x-y| > 1} q(x) G(x, y, z) \psi_n(x) dx = b_{n,1} + b_{n,2} + b_{n,3}. \quad (2.52)$$

Используя неравенство (43) и принимая во внимание элементарное неравенство

$$\max_{r>0} r^{3-\varepsilon} e^{-r} < \infty \quad \text{при } 0 < \varepsilon < 3, \quad (2.53)$$

получаем

$$\begin{aligned} \int b_{n,1}^2 dy &\leq \frac{C}{(\lambda_n + \mu^2)^2} \int dy q^{2\alpha}(y) \left\{ \int_{|x-y| < 1} e^{-\varepsilon|x-y|} |\psi_n(x)| dx \right\}^2 \leq \\ &\leq \frac{C}{(\lambda_n + \mu^2)^2} \int dy \frac{q^{2\alpha}(y)}{x^{3-2\alpha}} \left\{ \int_{|x-y| < 1} \frac{|\psi_n(x)| dx}{|x-y|^{3-\varepsilon}} \right\}^2 \leq \\ &\leq \frac{C}{(\lambda_n + \mu^2)^2} \int \frac{dy}{[\mu^2 + q(y)]^{3-\varepsilon-2\alpha}} \iint_{|z| < 1, |z'| < 1} dz dz' \frac{|\psi_n(z+y) \psi_n(z'+y)|}{|z|^{3-\varepsilon} |z'|^{3-\varepsilon}} \leq \\ &\leq \frac{C \mu^{2(\varepsilon-3+2\alpha)}}{(\lambda_n + \mu^2)^2} \int \int_{|z| < 1, |z'| < 1} \frac{d|z| d|z'|}{|z|^{1-\varepsilon} |z'|^{1-\varepsilon}} \int |\psi_n(z+y) \psi_n(z'+y)| dy \leq \\ &\leq C \frac{\mu^{2(\varepsilon-3+2\alpha)}}{(\lambda_n + \mu^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1}^2 dy \leq C \mu^{2(\varepsilon-3+2\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu^2)^2}. \quad (2.55)$$

Далее

$$\begin{aligned} \int b_{n,2}^2 dy &\leq \frac{1}{(\lambda_n + \mu^2)^2} \int dy q^2(y) \left\{ \int_{|x-y| > 1} \frac{e^{-\varepsilon|x-y|}}{4\pi|x-y|} |\psi_n(x)| dx \right\}^2 \leq \\ &\leq \frac{C}{(\lambda_n + \mu^2)^2} \int dy q^2(y) \int_{|x-y| > 1} \frac{e^{-2\varepsilon|x-y|}}{|x-y|^2} dx \leq \frac{C}{(\lambda_n + \mu^2)^2} \int dy q^2(y) \frac{e^{-2\varepsilon}}{x} \leq \\ &\leq \frac{C e^{-\sqrt{\mu^2}}}{(\lambda_n + \mu^2)^2} \int dy \frac{q^2(y) e^{-\sqrt{\mu^2 + q(y)}}}{\sqrt{\mu^2 + q(y)}} \leq \frac{C e^{-\mu}}{(\lambda_n + \mu^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Используя оценку (44), выводим

$$\begin{aligned} \int b_{n,3}^2 dy &\leq \frac{C}{(\lambda_n + \mu^2)^2} \int dy \left[\int_{|x-y| > 1} \frac{e^{-\varepsilon|x-y|}}{|x-y|} |\psi_n(x)| e^{\frac{1}{2} \varepsilon |x-y| \sqrt{q(y)}} dx \right]^2 \leq \\ &\leq \frac{C}{(\lambda_n + \mu^2)^2} \int dy \int_{|x-y| > 1} \frac{e^{-2 \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \sqrt{q(y)} \right) |x-y|}}{|x-y|^2} dx \leq \\ &\leq \frac{C}{(\lambda_n + \mu^2)^2} \int dy \frac{e^{-2 \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \sqrt{q(y)} \right)}}{x - \frac{1}{2} \sqrt{q(y)}} \leq \frac{C e^{-\mu}}{(\lambda_n + \mu^2)^2} \int \frac{dy}{\sqrt{q(y)}} \leq \frac{C e^{-\mu}}{(\lambda_n + \mu^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

оценок (55)–(57) и неравенства

$$(b_{n,1} + b_{n,2} + b_{n,3})^2 \leq C (b_{n,1}^2 + b_{n,2}^2 + b_{n,3}^2)$$

получаем

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 dy + o(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu^2)^2} \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty. \quad (2.58)$$

Из формул (50), (51), (58) вытекает неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \mu^2)^2} < \infty. \quad (2.59)$$

Отсюда непосредственно следует утверждение (49) теоремы 1.

Теорема 2.2. В условиях теоремы 1 имеет место формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n + \eta)^2} \sim \frac{1}{8\pi} \int \frac{dx}{V q(x) + \eta} \quad \eta \rightarrow +\infty. \quad (2.60)$$

Доказательство. При $\eta = \mu^2 \rightarrow \infty$, используя утверждение леммы 3, получаем вместо неравенства (51) равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 dy = \int dy \int G^2(x, y, z) dx \sim \frac{1}{8\pi} \int \frac{dy}{V q(y) + \eta}, \quad \eta \rightarrow +\infty. \quad (2.61)$$

Из оценок (51) и (58) следует, что

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n b_n + b_n^2) dy \leq o(1) \int \frac{dx}{V q(x) + \eta}, \quad \eta \rightarrow +\infty. \quad (2.62)$$

Отсюда и из формулы (61) следует утверждение (60) теоремы 2.

Чтобы получить из формулы (60) асимптотику функции $N(\lambda)$ воспользуемся теоремой.

Теорема 2.3. (М. В. Келдыш [8]). Пусть $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ — положительные возрастающие функции, определенные для положительных λ дифференцируема; $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi(\lambda) = \infty$ и для достаточно больших λ

$$\beta_1 \varphi(\lambda) < \lambda \varphi'(\lambda) < \beta_2 \varphi(\lambda), \quad (2.63)$$

где β_1, β_2 — положительные постоянные.

Пусть

$$f(\mu) = \int_0^{\infty} \frac{d\varphi(\lambda)}{(\lambda + \mu)^m}, \quad g(\mu) = \int_0^{\infty} \frac{d\psi(\lambda)}{(\lambda + \mu)^m}, \quad m > \beta_2 + 1. \quad (2.64)$$

Если $g(\mu) \sim f(\mu)$ при $\mu \rightarrow +\infty$, то $\psi(\lambda) \sim \varphi(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Положим

$$\sigma(\lambda) = \text{mes} \{x: x \in D, q(x) < \lambda\}, \quad (2.65)$$

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\lambda} (\lambda - t)^{\beta_2} d\sigma(t). \quad (2.66)$$

Допустим, что потенциал $q(x)$ таков, что условие (63) выполнено. Для этого достаточно, чтобы функция

$$\sigma(t) = \int_0^t d\sigma(s) = \int_{\{x: q(x) < t, x \in D\}} dx \quad (2.6)$$

для достаточно больших t удовлетворяла условию

$$\sigma(t) < C\sigma\left(\frac{t}{2}\right). \quad (2.6)$$

Действительно, в этом случае имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t (t-v)^{1/2} d\sigma(v) > \int_0^{t/2} (t-v)^{1/2} d\sigma(v) > t^{1/2} \int_0^{t/2} d\sigma(v) = \\ &= t^{1/2} \sigma\left(\frac{t}{2}\right) > Ct^{1/2} \sigma(t) > Ct \int_0^t (t-v)^{1/2} d\sigma(v) = Ct\varphi'(t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тем самым доказано правое неравенство (63). Левое неравенство (63) вытекает непосредственно из определения (66) функции $\varphi(\lambda)$.

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия теоремы 2 и условия (63), где $\varphi(\lambda)$ определена формулой (66). Тогда имеет место формула (2):

Доказательство. Мы имеем

$$\int_0^\infty \frac{dN(t)}{(t+\mu)^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(l_n+\mu)^2}. \quad (2.7)$$

Запишем формулу (60) в виде

$$\int_0^\infty \frac{dN(t)}{(t+\mu)^2} \sim \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{\sqrt{t+\mu}}, \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Преобразуем правую часть формулы (71) к виду, удобному для применения теоремы 3

$$\frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{\sqrt{t+\mu}} = \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\varphi(t)}{(t+\mu)^2}, \quad (2.7)$$

где

$$d\varphi(t) = d_t \int_0^t (t-s)^{1/2} d\sigma(s) = \frac{3}{2} dt \int_0^t (t-s)^{1/2} d\sigma(s). \quad (2.7)$$

Действительно

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi(t)}{(t+\mu)^2} = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{dt \int_0^t (t-s)^{1/2} d\sigma(s)}{(t+\mu)^2} = \frac{3}{2} \int_0^\infty d\sigma(s) \int_s^\infty \frac{(t-s)^{1/2} dt}{(t+\mu)^2} =$$

$$\frac{3}{2} \int_0^{\infty} ds(s) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{v} dv}{(v+s+1)^2} = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\sigma(s)}{\sqrt{s+1}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u} du}{(1+u)^2} = \frac{3\pi}{4} \int_0^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{\sqrt{t+1}}, \quad (2.74)$$

о совпадает с формулой (72).

Из формул (71), (72) и теоремы 3 вытекает утверждение теоремы 4 — формула (2).

Замечание 2.1. Если область D содержит конус K_0 сколь угодно малого, но фиксированного раствора, и если при достаточно больших r выполнено неравенство

$$ar^k < q(x) < Ar^k; \quad r = |x|, \quad k > 6, \quad A > 0, \quad a > 0, \quad (2.75)$$

условие (68) выполнено.

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma(t) = \text{mes} \{x: x \in D, q(x) < t\} &\leq \text{mes} \left\{ x: x \in E_3, r \leq \left(\frac{t}{a} \right)^{\frac{1}{k}} \right\} \leq \\ &\leq \frac{4}{3} \pi \left(\frac{t}{a} \right)^{\frac{3}{k}}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Кроме того

$$\sigma(t) \geq \text{mes} \left\{ x: x \in K_0, r \leq \left(\frac{t}{A} \right)^{\frac{1}{k}} \right\} \geq C \left(\frac{t}{A} \right)^{\frac{3}{k}}, \quad (2.77)$$

где постоянная C определяется раствором конуса K_0 .

Следовательно

$$C_1 t^{\frac{3}{k}} < \sigma(t) < C_2 t^{\frac{3}{k}}, \quad (2.78)$$

условие (68) выполнено.

Можно показать, что условие (68) будет выполнено, если имеет место оценка (75), а граница области D содержится между парабололами

$$z = a_1 (x^2 + y^2)^p; \quad z = a_2 (x^2 + y^2)^p, \quad 0 < a_1 < a_2, \quad p > \frac{1}{2}. \quad (2.79)$$

Используя методы работы [2] и результаты лемм 1—3, можно получить формулу

$$N_{\tau}(\lambda) \sim \frac{1}{6\pi^3} \int_{\{x: x \in D, q(x) < \lambda\}} q^{\tau}(x) [\lambda - q(x)]^{1/2} dx, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (2.80)$$

где

$$N_{\tau}(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} a_n^{(\tau)}; \quad a_n^{(\tau)} \equiv \int q^{\tau}(x) \psi_n^2(x) dx. \quad (2.81)$$

Формула (2) получается из формулы (80) при $\tau = 0$.

§ 3. Разложение по собственным функциям

Из результатов § 1 вытекает, что для любой функции $f(x) \in L_2(D)$ в смысле сходимости в среднем имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x), \quad (3.1)$$

где

$$C_n = \int f(x) \overline{\psi_n(x)} dx. \quad (3.2)$$

Формула (1) представляет собою другую форму записи соотношения

$$f = \int_0^{\infty} dE_t f, \quad (3.3)$$

где E_t — разложение единицы оператора L задачи (1.2) — (1.3). Для самосопряженного оператора L с точечным спектром ядро спектральной функции имеет вид

$$\theta(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \psi_n(x) \overline{\psi_n(y)}, \quad (3.4)$$

где $\lambda_n, \psi_n(x)$ — собственные числа и собственные функции оператора L . Дробную степень положительного оператора L определяют формулой

$$L^\alpha f = \int_0^{\infty} t^\alpha dE_t f. \quad (3.5)$$

Выберем число $\alpha > 0$ так, чтобы оператор вложения из пространства $W_2^\alpha(D)$ в $C(D)$ был бы ограничен. Например, можно взять $\alpha = 1$, если $D \subset E_3$. Если $f \in D(L)$, то

$$Lf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n C_n \psi_n(x), \quad (3.6)$$

причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |C_n|^2 < \infty. \quad (3.7)$$

Теорема 3.1. Пусть $f \in D(L)$. Тогда формула (1) имеет место в каждой точке $x \in D$. Ряд (1) сходится к $f(x)$ равномерно относительно x , меняющегося в любой ограниченной части области D .

Доказательство. Известно [9], что для любых ограниченных областей D_1 и $D_2 \subset D_1$ верно неравенство

$$\|u\|_{W_2(D_2)} \leq C(D_1, D_2) \|Lu\|_{L_2(D_1)}, \quad (3.8)$$

где L — положительно определенный эллиптический оператор второго порядка, который в нашем случае определен выражением (1.2). По

условию теоремы и согласно неравенству (8) ряд (1) сходится к функции $f(x)$ в смысле сходимости в $W_2^2(\bar{D})$, где $\bar{D}$ — любая ограниченная подобласть области D . В силу теоремы вложения С. Л. Соболева ряд (1) равномерно сходится в $\bar{D}$. Теорема доказана.

Можно было бы исследовать суммируемость ряда (1) к функции $f(x)$ методом (R, λ, α) нормальных средних М. Рисса, но мы не будем останавливаться на этом вопросе. В случае $D = E_2$ такое исследование проведено в работе [2].

§ 4. Оценки функции Грина и асимптотическое распределение собственных чисел для второй и третьей краевых задач

В этом параграфе результаты § 2 переносятся на случай краевых условий второго и третьего рода. Сделанные относительно области D предположения I—IV, а также предположения (1.1), (2.33), (2.42)–(2.45) о потенциале $q(x)$ считаем выполненными. Рассмотрим уравнение (1.2) с граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(s) u|_{\Gamma} = 0, \quad (4.1)$$

где n — внешняя нормаль к границе Γ , $\sigma(s) > 0$ — непрерывная на Γ функция. При $\sigma \equiv 0$ условие (1) называется вторым, в противном случае — третьим. В силу вариационного принципа собственные числа $\lambda_n^{(1)}$, $\lambda_n^{(2)}$, $\lambda_n^{(3)}$ соответственно первой, третьей и второй краевых задач связаны неравенством: $\lambda_n^{(1)} > \lambda_n^{(3)} > \lambda_n^{(2)}$.

Введем обозначение $N^{(i)}(\lambda) = \sum_{\lambda_n^{(i)} < \lambda} 1$. Тогда $N^{(1)}(\lambda) \leq N^{(3)}(\lambda) \leq N^{(2)}(\lambda)$. Если для функции $N^{(2)}(\lambda)$ будет доказана формула (2.2), то, ввиду того, что $N^{(1)}(\lambda) = N(\lambda)$, формула (2.2) будет доказана для всех функций $N^{(i)}(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$. В дальнейшем будем обозначать функции $N^{(1)}(\lambda)$ и $N^{(2)}(\lambda)$ через $N(\lambda)$ и $M(\lambda)$, собственные числа $\lambda_n^{(1)}$, $\lambda_n^{(2)}$ — через λ_n , μ_n . Чтобы доказать формулу (2.2) для функции $M(\lambda)$ понадобятся, как и в § 2, оценки функции Грина задачи

$$(-\Delta + \mu^2) G(x, y, \mu) = \delta(x - y) \text{ в } D, \quad \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (4.2)$$

Мы не предполагаем, что симметричный в $L_2(D)$ оператор, заданный дифференциальным выражением $-\Delta + q(x)$ на дважды дифференцируемых в области D функциях, удовлетворяющих граничному условию (2) и финитных около бесконечности, имеет нулевые индексы дефекта. Это значит, что не предполагается единственность функции Грина соответствующей краевой задачи ([1], стр. 73).

Изложенные ниже результаты верны для любого самосопряженного расширения определенного выше симметричного оператора. За-

метим, что предполагая область D принадлежащей классу, введенному в [4, а, б], повторяя рассуждения, приведенные в [10] (теорема 1) и пользуясь ограниченностью снизу потенциала $q(x)$, можно доказать единственность функции Грина оператора Шредингера второй краевой задачи. Нужные для дальнейшего оценки функции G собраны в теореме.

Теорема 4.1. *При сделанных относительно области и потенциала предположениях имеют место оценки:*

$$|G(x, y, \mu)| \leq C \frac{\exp\{-\beta\mu|x-y|\}}{|x-y|}, \quad x, y \in \overline{D}, \quad (4.3)$$

где $0 < \beta < 1$ можно взять сколь угодно близким к 1;

$$G(x, y, \mu) = \frac{\exp\{-\mu|x-y|\}}{4\pi|x-y|} \{1 + r(y, \mu)\}, \quad \mu \rightarrow +\infty, \quad (4.4)$$

где $|x-y| \leq \frac{1}{2} \max[\rho(y), \rho(x)]$, $\rho(y)$ — расстояние от точки y до границы Γ , через $r(y, \mu)$ здесь и ниже обозначена функция, допускающая оценку

$$r(y, \mu) = O(\mu\rho^{-2}(y) \exp\{-\mu\gamma(y)\}), \quad y \in D, \quad \mu \rightarrow +\infty.$$

Далее

$$\int_D G^3(x, y, \mu) dx = \frac{1}{8\pi\mu} (1 + r(y, \mu)), \quad \mu \rightarrow +\infty, \quad (4.5)$$

$$\int_D dy \int_D G^2(x, y, \mu) dx = \int_D \frac{dy}{8\pi\mu} \{1 + o(\mu^{-\gamma_1})\}, \quad \mu \rightarrow +\infty, \quad (4.6)$$

где $x^2 = \mu^2 + q(y)$, $\gamma_1 > 0$.

Для любого натурального $p > 0$ верно соотношение

$$\frac{\partial^p G(x, y, \mu)}{(\partial\mu^2)^p} = \frac{\partial^p}{(\partial\mu^2)^p} \frac{\exp\{-\mu|x-y|\}}{4\pi|x-y|} \{1 + r_1(y, \mu)\}, \quad \mu \rightarrow +\infty, \quad (4.7)$$

где

$$r_1(y, \mu) = O(\mu^{2p-1} \rho^{-p+1}(y) \exp\{-\delta\mu\rho(y)\}), \quad \delta > 0,$$

$$|x-y| \leq \frac{1}{2} \max[\rho(y), \rho(x)].$$

Доказательство. Для функции Грина первой краевой задачи оценка (2.6) вытекала из принципа максимума.

В условиях теоремы 1 нужно использовать интегральные уравнения, чтобы доказать оценку (3). Рассмотрим уравнение

$$G(x, y, \mu) = \frac{\exp(-\mu|x-y|)}{4\pi|x-y|} - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{\exp(-\mu|x-s|)}{4\pi|x-s|} v ds, \quad (4.8)$$

где функция

$$b \equiv G(s, y, \mu) \quad (4.9)$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{1}{2} I + T_{\mu} \right) b = b_0. \quad (4.10)$$

Здесь

$$T_{\mu} b = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{\exp(-\mu |s-s_0|)}{4\pi |s-s_0|} b(s) ds; \quad b_0 = \frac{\exp(-\mu |s-y|)}{4\pi |s-y|}. \quad (4.11)$$

Чтобы доказать оценку (3) достаточно проверить, что интеграл J в правой части равенства (8) удовлетворяет этой оценке. Допустим доказанной оценку

$$|b(s, y, \mu)| < C \frac{\exp(-\beta \mu |s-y|)}{|s-y|}, \quad 0 < \beta < 1. \quad (4.12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |x-y| \exp(\beta \mu |x-y|) J &\leq C \int_{\Gamma} \exp\{-\mu [|x-s| + \beta |s-y| - \beta |x-y|]\} \times \\ &< \frac{|x-y|}{|s-y|} |\cos(n_s, r_{xs})| \left(\frac{\mu}{|x-s|} + \frac{1}{|x-y|^2} \right) ds \leq C \int_{\Gamma} \exp\{-(1-\beta) \mu |x- \\ &\quad -s|\} \cdot \max \left(\frac{1}{|x-s|^2} + \frac{\mu}{|x-s|}; \right. \\ &\quad \left. \frac{\mu}{|s-y|} + \frac{1}{|s-y| \cdot |x-s|} \right) |\cos(n_s, r_{xs})| ds \leq C, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где α — показатель Ляпунова поверхности Γ .

Здесь было использовано неравенство

$$|x-y| \leq |x-s| + |s-y| \leq 2 \max\{|x-y|; |s-y|\} \quad (4.14)$$

и оценки, аналогичные оценкам (2.20)–(2.25).

Например

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \frac{\exp\{-\varepsilon \mu |x-s|\}}{|x-s|^2} |\cos(n_s, r_{xs})| ds \leq \frac{1}{\rho^2(x)} \int_{\Gamma} \exp(-\varepsilon \mu |x-s|) ds \leq \\ &\leq \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \varepsilon \mu \rho(x)\right\}}{\rho^2(x)} \int_{\Gamma} \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2} \mu |x-s|\right\} ds \leq C \rho^{-2}(x) \exp \times \\ &\quad \times \left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon \mu \rho(x) \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь $\varepsilon = 1 - \beta > 0$. Таким образом, оценка (13) доказана для $\rho(x) \geq \delta$. Пусть $\rho(x) < \delta$. Оценим интеграл

$$\int_{\Gamma} \exp(-\varepsilon\mu |x-s|) \frac{|x-y|}{|s-y|} \left(\frac{1}{|x-s|^2} + \frac{\mu}{|x-s|} \right) |\cos(n_s, r_{xs})| ds =$$

$$= \int_{|x-s| > \delta} + \int_{|x-s| < \delta} = J_1 + J_2.$$

Интеграл J_1 оценивается как интеграл в формуле (15). Оценим J_2 , пользуясь неравенством (14)

$$J_2 \leq \int_{|x-s| < \delta} ds |\cos(n_s, r_{xs})| \max \left(\frac{1}{|x-s|^2} + \frac{\mu}{|x-s|}; \frac{1}{|x-s| \cdot |s-y|} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{|s-y|} \right) \exp(-\varepsilon\mu |x-s|) \leq \int_{|x-s| < \delta} \exp(-\varepsilon\mu |x-s|) |\cos(n_s, r_{xs})| \times$$

$$\times \left(\frac{1}{|x-s|^2} + \frac{\mu}{|x-s|} + \frac{\mu}{|s-y|} + \frac{1}{|x-s| \cdot |s-y|} \right) ds = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Имеем

$$I_1 \leq \int_{|x-s| < \delta} \frac{|\cos(n_s, r_{xs})|}{|x-s|^2} ds \leq C.$$

Здесь C — вариация телесного угла, под которым из точки x видна часть поверхности Γ , характеризующаяся неравенством $|x-s| \leq \delta$. Так как поверхность удовлетворяет условию II из § 2, то C не зависит от x .

Обозначим через s_0 ближайшую к x точку поверхности Γ , $\rho(s_0, x) = \rho(x)$. При достаточно малом δ и при $|x-s| < \delta$ для поверхности Ляпунова верно неравенство: $0 < C_1 \leq \frac{|x-s|^2}{|x-s_0|^2 + |s-s_0|^2} \leq C_2$, где C_1 и C_2 — положительные постоянные, зависящие от констант Ляпунова для поверхности Γ и от числа δ , причем $C_1, C_2 \rightarrow 1$.

Поэтому

$$I_2 \leq C\mu \int_0^\delta \exp\{-\varepsilon\mu C_1 \sqrt{\rho^2 - \rho^2(x)}\} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho^2(x)}} \leq C\mu \times$$

$$\times \int_0^\delta \exp(-\varepsilon\mu C_1 \rho) d\rho \leq C.$$

В силу свойства II из § 7.2 оценочные постоянные не зависят от x . Аналогично оцениваются интегралы I_3, I_4 . Собирая оценки, приходим к неравенству $J_1 + J_2 \leq C$. Отсюда и из (15) вытекает оценка (13).

Докажем теперь неравенство (12). Для этого исследуем уравнение (10) в пространстве C , непрерывных функций с нормой

$$\|b\| = \sup_{s \in \Gamma} |s-y| \exp(\beta\mu |s-y|) |b(s)|. \quad (4.16)$$

свободный член в уравнении (10) имеет конечную норму в C_γ . Проверим, что оператор T_μ в этом уравнении есть оператор с малым ядром когда $\mu \rightarrow +\infty$. Пусть $b \in C_\gamma$. Имеем

$$\begin{aligned} \|T_\mu b\| &\leq C \|b\| \cdot \max_{s \in \Gamma} |s-y| \exp(\beta \mu |s-y|) \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial n_t} \frac{\exp(-\mu |s-t|)}{4\pi |s-t|} \right| \times \\ &\times \frac{\exp(-\beta \mu |t-y|)}{|t-y|} dt \leq C \|b\| \max_{s \in \Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|s-y|}{|t-y|} \exp\{-(1-\beta)\mu |s-t|\} \times \\ &\times \left(\frac{1}{|s-t|^{2-\alpha}} + \frac{\mu}{|s-t|^{1-\alpha}} \right) ds \leq C \|b\| O(\mu^{-\alpha}), \quad \mu \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Последнее неравенство аналогично (13)*. Из сказанного вытекает справедливость оценки (12).

Неравенство (3) полностью доказано. Чтобы доказать соотношение (4) будем исходить из равенства

$$\begin{aligned} 4\pi |x-y| \exp(\mu |x-y|) G(x, y, \mu) &= 1 + \int_{\Gamma} |x-y| \exp(\mu [|x-y| - |x-s|]) \times \\ &\times \left(\frac{\mu}{|x-s|} + \frac{1}{|x-s|^2} \right) \cos(n_s, r_{xs}) b(s, y, \mu) ds = 1 + J. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Без ограничения общности положим, что $\rho(x) \leq \rho(y)$.

Используя оценки

$$|x-y| \leq \frac{1}{2} \max[\rho(x), \rho(y)] \leq \frac{\rho(y)}{2}; \quad \frac{\rho(y)}{2} \leq \rho(x) \leq \rho(y), \quad (4.19)$$

получаем

$$\begin{aligned} J &\leq C \int_{\Gamma} \frac{|x-y|}{|s-y|} \exp\{\mu [|x-y| - |x-s| - \beta |s-y|]\} \cdot \left(\frac{1}{|x-s|^2} + \frac{\mu}{|x-s|} \right) \times \\ &\times |\cos(n_s, r_{xs})| ds \leq C \exp\left\{\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\mu \rho(y)\right\} \int_{\Gamma} \exp(-\mu |x-s|) \left(\frac{1}{|x-s|^2} + \right. \\ &\left. + \frac{\mu}{|x-s|} \right) |\cos(n_s, r_{xs})| ds \leq C \mu \exp\left\{\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\mu \rho(y)\right\} \rho^{-2}(x) = \\ &= r(y, \mu), \quad \gamma = \beta - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Так как β можно взять сколь угодно близким к 1, то $\gamma < \frac{1}{2}$ можно

* Если $\inf_{s \in \Gamma, x, y \in D} [|x-s| + |s-y| - |x-y|] > 0$, $\text{mes } \Gamma < \infty$, то в приведенных рассуждениях можно считать $\beta=1$. Это, например, случай выпуклой области с конечной границей.

считать сколь угодно близким к $\frac{1}{2}$. Оценка (4) доказана. Заметим, что она равномерна относительно x , удовлетворяющего неравенствам (19).

Далее имеем

$$\begin{aligned} \int_D G^2(x, y, \mu) dx &= \left\{ \int_{|x-y| < \frac{\rho(y)}{2}} + \int_{|x-y| > \frac{\rho(y)}{2}} \right\} G^2(x, y, \mu) dx = \\ &= \int_{|x-y| < \frac{\rho(y)}{2}} dx \frac{\exp(-2\mu|x-y|)}{16\pi^2|x-y|^2} (1+r(y, \mu)) + O(\exp\{-2\beta\mu\rho(y)\} \cdot \rho^{-2}(y)) = \\ &= \frac{1}{8\pi\mu} \{1+r(y, \mu)\}, \quad \mu \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Докажем оценку (6).

Имеем

$$\int_U dy \int_D G^2(x, y, \mu) dx = \left(\int_{\Delta_1} + \int_{D_1} \right) dy \int_D G^2(x, y, \mu) dx = J_1 + J_2. \quad (4.22)$$

Здесь Δ_1 и D_1 имеют тот же смысл, что и в § 2.

В силу оценки (5) верно равенство

$$J_2 = \int_{D_1} \frac{dy}{8\pi\mu} (1+r(y, \mu)), \quad \mu \rightarrow +\infty. \quad (4.23)$$

Положим $\varepsilon = \mu^{-\sigma}$, $0 < \sigma < 1$. Тогда, повторяя оценку (2.40), получим

$$J_1 \leq \int_{\Delta_1} dy \int_D \frac{\exp(-2\mu|x-y|)}{16\pi^2|x-y|^2} dx \leq C \int_{\Delta_1} \frac{dy}{x} \leq \frac{C}{\mu^\sigma} \int_{D_1} \frac{dy}{x}. \quad (4.24)$$

Из двух последних оценок следует равенство (6). Достаточно заметить, что при $y \in D_1$, $\rho(y) > \mu^{-\sigma}$, поэтому остаточный член $r(y, \mu)$ в формуле (23) допускает оценку

$$r(y, \mu) = O\left(\mu \frac{\exp(-\mu \cdot \mu^{-\sigma})}{\mu^{-2\sigma}}\right) = O\left(\frac{1}{\mu^\sigma}\right), \quad \mu \rightarrow +\infty. \quad (4.25)$$

Чтобы доказать формулу (7) продифференцируем равенство (8) p раз по μ^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p G}{(\partial \mu^2)^p} &= \frac{\partial^p}{(\partial \mu^2)^p} \frac{\exp(-\mu|x-y|)}{4\pi|x-y|} + \sum_{k=0}^p C_{kp} \int ds \frac{\partial^{p-k} b(s, y, \mu)}{(\partial \mu^2)^{p-k}} \times \\ &\times \frac{\partial^k}{(\partial \mu^2)^k} \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{e^{-\mu|x-s|}}{|x-s|}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где C_{kp} — постоянные, точное значение которых нас не интересует. Оценим интеграл

$$J_{k0} = \left[\frac{\partial^p}{(\partial \mu^2)^p} \frac{\exp(-\mu |x-y|)}{|x-y|} \right]^{-1} \int_r \frac{\partial^k}{(\partial \mu^2)^k} \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{\exp(-\mu |x-s|)}{|x-s|} \times \\ \times \frac{\partial^{p-k} b(s, y, \mu)}{(\partial \mu^2)^{p-k}} ds. \quad (4.27)$$

функция

$$\frac{\partial^p}{(\partial \mu^2)^p} \frac{\exp(-\mu |x-y|)}{|x-y|} = \sum_{l=0}^{p-1} C_l \frac{|x-y|^{p-l-1}}{\mu^{p-l}} \exp(-\mu |x-y|).$$

Поэтому

$$\mu^p \leq C \frac{\exp(\mu |x-y|) \mu^{2p-1}}{|x-y|^{p-1}} \int_r \exp(-\mu |x-s|) \max[1, |x-s|^{k-2}] \times \\ \times \exp(-\beta \mu^p(y)) ds = O\left(\exp\{-\beta \mu^p(y) + \frac{1}{2} \mu^p(y) - (1-\varepsilon) \mu^p(x)\} \cdot \mu^{2p-1} \times \right. \\ \times \left. \frac{\max[\mu^{k-2}(x), 1]}{|x-y|^{p-1}} \int_r \exp\{-\varepsilon \mu |x-s|\} ds\right) = \\ = O\left(\frac{\mu^{2p-1}}{|x-y|^{p-1}} \exp\{-\gamma \mu^p(y)\}\right), \quad \mu \rightarrow +\infty, \quad (4.28)$$

где $\gamma = \beta - \frac{1}{2} > 0$, $\varepsilon > 0$. Здесь были использованы неравенства (19)

и следующая оценка:

$$\left| \frac{\partial^k}{(\partial \mu^2)^k} b(s, y, \mu) \right| = O(\exp\{-\beta \mu |s-y|\}),$$

которая получается из рассмотрения уравнения (10) аналогично тому, как была получена выше оценка (12).

Так же как и в § 2 на основе результатов теоремы 1 доказывается

Теорема 4.2. В условиях теоремы 2.4 справедливы утверждения теорем 2.1–2.4, в которых следует заменить $N(\lambda)$ на $M(\lambda)$, μ на μ_n .

Замечание 4.1. В работе [11] получена равномерная по α асимптотика функции $N(\lambda)$ для задачи (1.2)–(1.3) в случае, когда потенциал зависит от параметра $\{q(x) = q(x; \alpha)$, где α —параметр, меняющийся на некотором возможно некомпактном множестве, которое для простоты письма предположим совпадающим с полуосью $[\alpha_0, \infty)$, а область D есть конечная область с ляпуновской границей Γ . Предполагалось, что $q(x; \alpha)$ —вещественная функция, $q(x; \alpha) > 1$ и равномерно относительно $x \in \bar{D}$ выполнено неравенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} q(x; \alpha) = +\infty. \quad (4.29)$$

Схема получения результата работы [11] без существенных изменений проходит для случая области с бесконечной границей, удов-

летворяющей ограничениям I—IV, указанным в §§ 1—2. Необходимые оценки функции Грина даны в теореме 4.1.

Ленинградский институт точной
механики и оптики

Поступило 4.II.1969

Ա. Գ. ՌԱՄՄ Անվերջ եզրով տիրույթներում անող պոտենցիալ ունեցող Շրեդինգերի օպերատորի սեփական ֆունկցիաներով վերլուծության և սեփական արժեքների ափսոսադաշտական վարքը
(ամփոփում)

$D \subset E_3$ տիրույթում գիտարկվում է հետևյալ խնդիրը՝

$$Lu = (-\Delta + q(x) - \lambda)u = 0 \quad D\text{-ում} \quad (1)$$

$$u|_{\partial D} = 0 \text{ կամ } \frac{\partial u}{\partial n} \sigma(s)u|_{\partial D} = 0, \quad \sigma(s) \geq 0: \quad (2)$$

$q(x)$ ֆունկցիան իրական է և $q(x) > 1$, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty$. Տիրույթի ∂D եզրը ենթադրվում է Լյապունովյան, Լյապունովի հաստատունները համապատասխան սահմանափակ են, $q(x)$ -ի և ∂D -ի մասին որոշ լրացուցիչ ենթադրությունների դեպքում ապացուցվում է հետևյալ բանաձևը՝

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{1}{6\pi^2} \int_{\{x: x \subset D, q(x) < \lambda\}} [\lambda - q(x)]^{3/2} dx, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

որտեղ λ_n -երը (1)-(2) խնդրի սեփական քվերն են, L օպերատորի սեփական քվերը և սեփական ֆունկցիաները սառցված են ամբողջ տարածության մեջ մի ոճանդակ խնդրի սեփական քվերից և սեփական ֆունկցիաներից:

A. G. RAMM. Asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenfunction decomposition of Shredinger operator with increasing potential in the domains with infinite boundary (summary)

For $D \subset E_3$ the following problem is considered:

$$Lu = (-\Delta + q(x) - \lambda)u = 0 \text{ in } D \quad (1)$$

and

$$u|_{\partial D} = 0 \text{ or } \frac{\partial u}{\partial n} \sigma(s)u|_{\partial D} = 0, \quad \sigma(s) \geq 0. \quad (2)$$

$q(x)$ is assumed to be real, $q(x) > 0$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x) = +\infty$. The boundary ∂D is assumed to be of Ljapunof's type, the constants of Ljapunof being uniformly bounded. Under some additional restrictions on q and ∂D the formula

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{1}{6\pi^2} \int_{\{x: x \subset D, q(x) < \lambda\}} [\lambda - q(x)]^{3/2} dx, \quad \lambda \rightarrow +\infty \quad (3)$$

is established, where λ_n are the eigenfunctions of (1)–(2) problem.

The eigenvalues and eigenfunctions of L are obtained from those for certain auxillary problem in the whole space.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Е. Титчмарш*. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. II, И.И.Л., М., 1961.
2. *Б. М. Левитан*. Об асимптотическом поведении функции Грина и разложения по собственным функциям уравнения Шредингера, Мат. сб., 41, 1957, 439—458.
3. *А. Г. Рамм*. Об одном методе решения задачи Дирихле в бесконечных областях, Известия ВУЗ-ов, серия матем., № 5, 1965, 124—127.
4. *А. Г. Рамм*. а) Спектральные свойства оператора Шредингера в областях с бесконечной границей, ДАН СССР, 152, № 2, 1963, 282—285.
б) Спектральные свойства оператора Шредингера в областях с бесконечной границей, Мат. сб., 66, № 3, (108), 1965, 321—343.
5. *В. И. Смирнов*. Курс высшей математики, т. 5, Физматгиз, М., 1959.
6. *D. Ray*. On spectra of second-order differential operators, Trans. Amer. Math. Soc., 77, 1954, 299—321.
7. *А. Г. Костюченко*. Асимптотическое распределение собственных значений эллиптических операторов, ДАН СССР, 158, 1, 1964, 41—44.
8. *М. В. Келдыш*. Об одной тауберовой теореме, Труды МИАН, 38, 1951, 77—86.
9. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов*. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
10. *А. Г. Рамм*. Об отсутствии положительного дискретного спектра у оператора Лапласа задачи Дирихле в некоторых бесконечных областях, Вестник ЛГУ, № 13, 1964, 153—156; поправка в 1. 1, 1966, 176.
11. *Б. М. Левитан, А. Г. Рамм*. Асимптотическое поведение собственных значений в случае, когда потенциал зависит от параметра, Матем. заметки, 1, 5, 1967, 595—604.
12. *А. Г. Рамм*. Асимптотическое распределение собственных значений оператора Шредингера с растущим потенциалом в областях с бесконечной границей, ДАН СССР, 183, № 4, 1968, 780—783.