ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 4, 1969 Математика

М. А. ХАЧАТРЯН

ПРИМЕР КОНСТРУКТИВНОЙ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ МОНОТОННОЙ ФУНКЦИИ

Используемые понятия конструктивного анализа определяются так же как в [1]—[6]. Мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Существует конструктивно всюду определенная конструктивно нигде не дифференцируемая монотонная функция.*

Доказательство. Пользуясь теоремами 2.1, 2.4, 2.6 из [4] построим шпекеровский ряд $\Sigma \varepsilon A3$ и FR-число α такие, что

$$\forall m\left(\sum_{i=0}^{m} A(i) < \alpha\right),$$

и последовательность A конструктивно не стремится к нулю.

Построим конструктивную последовательность f конструктивных функций такую, что для любого FR-числа x и для любого натурального n

$$f_n(x) = \frac{A(n)}{4^n \cdot 2\pi} \arccos(\cos 4^n \cdot 2\pi x).$$

Ясно, что для любого натурального числа n и для любого числа x

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{A(n) \cdot \pi}{4^n \cdot 2\pi} < A(n) \cdot 4^{-n},$$

причем для любого натурального n функция f_n есть периодическая функция с периодом $T = 4^{-n}$ и, кроме того

$$f_n(0) = f_n(4^{-n}) = 0, \; f_n(2^{-2n-1}) = A(n) \cdot 2^{-2n-1},$$

а на отрезках $0 \Delta 2^{-2n-1}$ и $2^{-2n-1} \Delta 4^{-n}$ функция f_n линейна.

Построим конструктивную последовательность F конструктивных функций такую, что для любого FR-числа x и для любого натурального n

$$F_m(x) = \sum_{n=0}^{m} f_n(x).$$

Так как для любых натуральных чисел m и k $(m > k)$ и для любого FR-числа x

$$F_m(x) - F_k(x) = \sum_{n=k+1}^{m} f_n(x) <$$

$$< \sum_{n=k+1}^{m} A(n)\, 4^{-n} < \alpha \cdot \sum_{n=k+1}^{m} 4^{-n} < \alpha \cdot 4^{-k}$$

и, кроме того, $\sum\limits_{n=k+1}^{m} f_n(x) \geqslant 0$, то

$$0 \leqslant F_m(x) - F_k(x) < \alpha \cdot 4^{-k}.$$

Значит существует всюду определенная функция G такая, что для любого FR-числа x

$$G(x) = \lim_{m \to \infty} F_m(x).$$

Докажем, что функция G нигде не дифференцируема.

Пусть функция G дифференцируема в некоторой точке x. Тогда существует общерекурсивная функция φ такая, что

$$\forall n \forall z_1 \forall z_2 (0 < |z_1 - x| < 2^{-\varphi(n)} \& 0 < |z_2 - x| < 2^{-\varphi(n)} \supset$$
$$\supset \left| \frac{G(z_2) - G(x)}{z_2 - x} - \frac{G(z_1) - G(x)}{z_1 - x} \right| < 2^{-n}). \tag{1}$$

Пусть n — фиксированное натуральное число и $k > \varphi(n)$. Если бы z_1^0 и z_2^0 были бы выбраны таким образом, что

$$z_1^0 = \begin{cases} x + 4^{-k}, & \text{если } l \cdot 4^{-k} \leqslant x < (l+1) \cdot 4^{-k}, \ l \text{ — четное целое число} \\ x - 4^{-k}, & \text{если } l \cdot 4^{-k} \leqslant x < (l+1) \cdot 4^{-k}, \ l \text{ — нечетное целое число,} \end{cases}$$

$$z_2^0 = \begin{cases} x + 4^{-k-1}, & \text{если } l \cdot 4^{-k-1} \leqslant x < (l+1) \cdot 4^{-k-1}, \ l \text{ — четное целое число} \\ x - 4^{-k-1}, & \text{если } l \cdot 4^{-k-1} \leqslant x < (l+1) \cdot 4^{-k-1}, \ l \text{ — нечетное целое число,} \end{cases}$$

то мы имели бы

$$\left| \frac{G(z_2^0) - G(x)}{z_2^0 - x} - \frac{G(z_1^0) - G(x)}{z_1^0 - x} \right| = A(k). \tag{2}$$

Действительно, квазиосуществимы такие целые числа $l_0, l_1, \cdots, l_k$, что

$$l_m \cdot 2^{-2m-1} \leqslant x < (l_m + 1) \cdot 2^{-2m-1}.$$

Легко видеть, что при $i = 1, 2$ и при любом m, если $m < k$, то

$$f_m(z_i^0) - f_m(x) = (-1)^{l_m} \cdot A(m)(z_i^0 - x),$$

если же $m > k$, то в силу периодичности функции f_m

$$f_m(z_i^0) = f_m(x),$$

а если $m = k$, то

$$f_m(z_1^0) = f_m(x),$$

$$f_m(z_2^0) - f_m(x) = (-1)^{l_m} \cdot A(m)(z_2^0 - x).$$

Поэтому

$$\frac{G(z_1^0) - G(x)}{z_1^0 - x} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{k-1} (f_m(z_1^0) - f_m(x))}{z_1^0 - x} = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{l_m} A(m),$$

$$\frac{G(z_2^0)-G(x)}{z_2^0-x}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{k}(f_m(z_2^0)-f_m(x))}{z_2^0-x}=\sum_{m=0}^{k}(-1)^{l_m}A(m),$$

откуда имеем

$$\urcorner\urcorner\left(\left|\frac{G(z_2^0)-G(x)}{z_2^0-x}-\frac{G(z_1^0)-G(x)}{z_1^0-x}\right|=A(k)\right),$$

и тем самым справедливо (2).

Обозначим через z_1^1, z_1^2, z_2^1, z_2^2, a_{ij} FR-числа, определяемые следующим образом:

$$z_1^1=x+4^{-k},\ z_1^2=x-4^{-k},\ z_2^1=x+4^{-k-1},\ z_2^2=x-4^{-k-1},$$

$$a_{ij}=\left|\frac{G(z_2^i)-G(x)}{z_2^i-x}-\frac{G(z_1^j)-G(x)}{z_1^j-x}\right|\ (i,\ j=1,\ 2).$$

Так как $|z_i^j-x|\leqslant 4^{-k}$, и $k>\varphi(n)$, то из (1) получаем

$$a_{ij}<2^{-n}\ \ (i,\ j=1,\ 2).$$

Легко видеть, что квазиосуществимы такие i и j, каждое из которых есть 1 и 2, что z_1^i и z_2^j удовлетворяют условиям, указанным выше для z_1^0 и z_2^0. При этих i и j согласно (2) имеем $a_{ij}=A(k)$, а потому $A(k)|<2^{-n}$. Таким образом, получаем

$$\forall n\forall k\,(k>\varphi(n)\supset|A(k)|<2^{-n}),$$

вопреки предположению, что последовательность A не стремится к нулю. Значит функция G в точке x не дифференцируема. Так как x—произвольное FR-число, то функция G нигде не дифференцируема.

Построим функцию H такую, что для любого FR-числа x

$$H(x)=G(x)+\alpha\cdot x.$$

Функция H так же, как и функция G всюду определена и нигде не дифференцируема. Теорема будет установлена, если докажем, что функция H монотонна.

Пусть x и y—любые FR-числа такие, что $x>y$. Тогда для любого натурального числа n

$$f_n(x)-f_n(y)\geqslant -A(n)\cdot(x-y),$$

поэтому для любого натурального m

$$F_m(x)-F_m(y)>-\alpha\cdot(x-y),$$

откуда имеем

$$G(x)-G(y)\geqslant-\alpha\cdot(x-y)$$

что и доказывает монотонность функции H. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность И. Д. Заславскому за внимание и помощь.

Вычислительный центр АН АрмССР
и Ереванского государственного
университета

Поступило 15.VI.1969

Մ. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Ածանցյալ չունեցող կոնստրուկտիվ մոնոտոն ֆունկցիայի օրինակ
(ամփոփում)

Ապացուցված է, որ գոյություն ունի կոնստրուկտիվ մոնոտոն ֆունկցիա, որը ոչ մի կետում կոնստրուկտիվորեն ածանցելի չէ։

M. A. KHACHATRIAN. *An example of constructive non-differentiable monotone function* (summary)

The existence of a constructive monotone function, which has no constructive derivative in any point is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. А. Шанин.* Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XVII, 1962.
2. *Г. С. Цейтин.* Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XVII, 1962.
3. *Г. С. Цейтин.* Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XVII, 1962.
4. *И. Д. Заславский* и *Г. С. Цейтин.* О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1962.
5. *И. Д. Заславский* и *С. Н. Манукян.* О разбиениях плоскости конструктивными кривыми, Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, Труды ВЦ АН АрмССР и ЕрГУ, V, 1968.
6. *М. А. Хачатрян.* О конструктивных числовых рядах, Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, Труды ВЦ АН АрмССР и ЕрГУ, V, 1968.