ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 4, 1969 Математика

Г. М. МУШЕГЯН, Р. И. ОВСЕПЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

По теореме Кантора (см. [1]) пустое множество является U-множеством для тригонометрической системы. В связи с этим возникает вопрос, сформулированный П. Л. Ульяновым в [2]: существует ли такая ограниченная в совокупности, ортонормированная, полная в $L_2[0,1]$ система непрерывных функций $\{\varphi_n(x)\}$, что пустое множество является для нее M-множеством?

Следует отметить, что Агнью показал (см. [3], [4]), что для любой последовательности $\{a_n\}$ с условием

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty \tag{1}$$

существует на отрезке [0,1] такая ортонормированная система непрерывных функций $\{\varphi_n(x)\}$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ сходится к нулю всюду на [0,1].

Однако методом Агнью нельзя получить полную и равномерно ограниченную систему функций с указанными свойствами*.

В настоящей работе дается положительный ответ на вопрос П. Л. Ульянова, более того, показывается, что справедлива

Теорема. *На отрезке* [0,1] *существует ортонормированная, полная (в* $L[0,1]$*) система* $\{\Psi_n(x)\}$ *непрерывных, ограниченных в совокупности функций такая, что существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Psi_n(x), \tag{2}$$

удовлетворяющий условиям

а) $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Psi_n(x) = 0 \qquad \text{всюду на } [0,1],$$

б) $$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \infty; \quad b_k = O\left(\frac{1}{\sqrt{k \ln k}}\right), \; k = 2, 3, \cdots.$$

---

* Разумеется, при дополнительном условии $a_n \to 0$.

§ 1. Доказательство вспомогательных утверждений

Лемма. *Для любой числовой последовательности $\{a_n\}$, удовлетворяющей условию* (1), *можно построить на отрезке* [0,1] *ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$ непрерывных функций с условием*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = 0 \quad \textit{всюду на } [0,1]. \tag{3}$$

Доказательство. Предположим сначала, что ни одно из чисел не равно нулю. Положим

$$B_n^2 = \frac{a_0^2}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2}, \quad n=0,1,\cdots, \tag{4}$$

$$A_n^2 = B_{n-1}^2 - B_n^2 = \frac{a_0^2 \cdot a_n^2}{\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k^2\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2\right)}. \tag{5}$$

Очевидны следующие соотношения:

$$B_0^2 = 1, \tag{6}$$

$$B_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = 1. \tag{7}$$

Пусть $\{\alpha_n\}$, $n=1, 2,\cdots$—последовательность действительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_k \downarrow 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A_k^2}{\pi\cdot\alpha_k^2} = 1. \tag{8}$$

Введем обозначение

$$\beta_k = \frac{2\cdot A_k^2}{\pi\cdot\alpha_k^2}. \tag{9}$$

В силу (8) имеем

$$\beta_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = 1. \tag{10}$$

Пусть $\{\Delta_k\}$, $k=1, 2,\cdots$ обозначают занумерованные слева направо непересекающиеся интервалы отрезка [0,1], удовлетворяющие условию

$$\operatorname{mes} \Delta_k = \beta_k. \tag{11}$$

Пусть далее $(x_{k-1}, x_k) \equiv \Delta_k$, $k=1, 2,\cdots$.
Введем в рассмотрение функцию

$$\psi_0(x) = \alpha_k \cdot \sin\left(\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\cdot\pi\right) \quad \text{при } x \in \bar{\Delta}_k,\ k=1, 2,\cdots. \tag{12}$$

Легко убедиться в том, что из соотношений (8)—(12) следует нормированность (в L_2) и непрерывность функции $\psi_0(x)$ на отрезке [0,1].

Введем в рассмотрение числа

$$P_n=\frac{B_n}{A_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\frac{B_n}{A_n\cdot B_{n-1}},\quad q_n=\frac{A_n}{B_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}=\frac{A_n}{B_n\cdot B_{n-1}} \tag{13}$$

и определим функции $\{\psi_n(x)\}$, $n\geqslant 1$

$$\psi_n(x)=\begin{cases}-p_n\psi_0(x) & \text{при} \quad x\in\overline{\Delta}_n\\ q_n\psi_0(x) & \text{при} \quad x\in[x_n,1]\\ 0 & \text{при} \quad x\in[0,x_{n-1}].\end{cases} \tag{14}$$

Очевидно, что все функции $\{\psi_n(x)\}$, $n\geqslant 0$ ограничены и непрерывны на отрезке [0,1].

Учитывая (9)—(12), получаем

$$\int\limits_{\Delta_n}\psi_0^2(x)\,dx=A_n^2,\qquad n=1,2,\cdots, \tag{15}$$

откуда, в силу условия (5), вытекает

$$\int\limits_{x_n}^{1}\psi_0^2(x)\,dx=B_n^2,\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{16}$$

Из условий (5)—(16) легко вывести ортонормированность системы $\{\psi_n(x)\}$, $n=0,1,\cdots$ на отрезке [0,1].

Учитывая (4)—(6), (13), легко показать справедливость соотношений

$$a_1=\frac{a_0}{p_1},\quad a_n=\frac{a_0}{p_n}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{q_k}{p_k}\right),\qquad n=2,3,\cdots, \tag{17}$$

откуда вытекает

$$S_n(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant x_n\\ a_0\left\{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{q_k}{p_k}\right) & \text{при } 1\geqslant x>x_n,\end{cases}$$

а это и означает выполнение условия (3).

Введем обозначение

$$\psi_m^{(k)}(x)\equiv\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{x_k-x_{k-1}}}\sin\left(m\,\dfrac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\,\pi\right), & x\in\overline{\Delta}_k\\ 0 & \text{при} \quad x\,\overline{\in}\,\Delta_k,\end{cases} \tag{18}$$

$$k=1,2,\cdots;\quad m=2,3,\cdots.$$

Очевидно, что система

$$\{\Phi_n(x)\} = \{\psi_n(x)\} + \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\psi_m^{(k)}(x);\ m\geq 2\} \tag{19}$$

состоит из ортонормированных и непрерывных на $[0,1]$ функций.

Если среди коэффициентов a_n есть равные нулю, то соотнесем им функции $\psi_m^{(1)}(x)$. Занумеровав подходящим образом через $\{\varphi_n(x)\}$ функции $\{\psi_n(x)\}$ и те из системы $\{\psi_m^{(1)}(x)\}$, которые соотнесены нулевым коэффициентам, получим искомую систему. Лемма доказана.

Замечание 1. Система $\{\Phi_n(x)\}$ полна в $L(0,1)$. В самом деле, конечными линейными комбинациями функций системы $\{\psi_n(x)\}$ мы можем получить любую из функций $\psi_1^{(k)}(x)$*, $k=1, 2,\cdots$. Но при любом фиксированном k система $\{\psi_m^{(k)}(x);\ m\geq 1\}$ полна в $L(\bar{\Delta}_k)$, ибо система $\{\sin nx;\ n\geq 1\}$ полна в $L(0, \pi)$. Отсюда немедленно следует утверждение.

Таким образом, система $\{\Phi_n(x)\}$ состоит из непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, ортонормирована и полна в $L(0,1)$.

Замечание 2. Система $\{\Phi_n(x)\}-\{\varphi_n(x)\}$ содержит равномерно ограниченную подсистему, например, систему $\{\psi_m^{(2)}(x);\ m\geq 2\}$.

Замечание 3. Для любой последовательности чисел $0=x_0< <x_1<x_2<\cdots$, $x_n\uparrow 1$ систему функций $\bigcup_{k=2}^{\infty}\{\psi_m^{(k)};\ m\geq 2\}$ можно занумеровать таким образом (пусть новой нумерации соответствует обозначение $\tilde{\psi}_1(x), \tilde{\psi}_2(x),\cdots$), что выполняется неравенство

$$|\tilde{\psi}_n(x)|\leq c_1 M_n \quad \text{всюду на } [0,1];\ n\geq 1, \tag{20}$$

где M_n — произвольная наперед заданная последовательность, стремящаяся к бесконечности; c_1 — константа, зависящая от последовательностей $\{x_k\}$ и $\{M_k\}$. Это сразу следует из того, что для фиксированного $k\geq 1$ справедливо неравенство

$$|\psi_m^{(k)}(x)|\leq \sqrt{\frac{2}{x_k-x_{k-1}}};\quad m\geq 2. \tag{21}$$

В доказательстве теоремы используются матрицы

$$A_k=\|a_{ij}^{(k)}\|\quad (1\leq i,\ j\leq 2^k;\ k=1, 2,\cdots),$$

введенные А. М. Олевским в работе [5].

Приведем их определение и нужные нам свойства (доказательства см. в [5]).

Положим

$$a_{1,j}^{(k)}=\frac{1}{\sqrt{2^k}}\quad (1\leq j\leq 2^k). \tag{22}$$

Пусть далее $1<i\leq 2^k$. Тогда

---

* Функции $\psi_1^{(k)}(x)$ определяются по формуле (18), если в ней положить $m=1$.

$$i = 2^s + \nu \quad (1 \leqslant \nu < 2^s,\ 0 \leqslant s \leqslant k-1). \tag{23}$$

Положим

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2^{k-s}}}, & \text{если } (\nu-1)\,2^{k-s}+1 \leqslant j \leqslant (2\nu-1)\cdot 2^{k-s-1} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2^{k-s}}}, & \text{если } (2\nu-1)\,2^{k-s-1}+1 \leqslant j \leqslant \nu\cdot 2^{k-s} \\ 0 & \text{— для остальных } j. \end{cases} \tag{24}$$

Свойства матриц A_k:

1°. Матрица A_k ортонормирована при каждом $k \geqslant 1$;

2°. $\sum\limits_{j=1}^{2^k} a_{rj}^{(k)} = 0 \quad (r > 1)$;

3°. Справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{2^k} |a_{ij}^{(k)}| < C_2; \sum_{j=1}^{2^k} |a_{ij}^{(k)}| \leqslant 2^{k/2},\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant 2^k;\ k \geqslant 1,$$

где C_2—абсолютная константа;

4°. $\sum\limits_{i=1}^{2^k} \left| \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}^{(k)} \right| < C_3 \cdot 2^{k/2}.$

§ 2. Доказательство теоремы

Сначала покажем, что для любой последовательности чисел $\{a_k;\ k \geqslant 0\}$, не равных нулю и удовлетворяющих (1) и условиям

$$a_k \to 0,\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2\right)^2 \leqslant C_4 \cdot a_n^2 \cdot 2^n,\ n = 1, 2, \cdots \tag{25}$$

(C_4— константа, зависящая от $\{a_k\}$) можно построить на отрезке $[0,1]$ ортонормированную, полную, равномерно ограниченную систему $\{\Psi_n(x)\};\ n \geqslant 0\}$ непрерывных функций так, что ряд

$$a_0\Psi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{2^k}} \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k} \Psi_i(x) \tag{26}$$

сходится к нулю всюду на $[0,1]$.

Пусть $\{\varphi_n(x);\ n \geqslant 0\}$ — система, которая получается, если к нашей последовательности $\{a_k\}$ применить лемму*, и пусть $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots,\ x_n \uparrow 1$ означает последовательность нулей, лежащих левее единицы функции $\varphi_0(x)$, занумерованную слева направо.

Определим функции $\psi_m^{(k)}(x),\ k \geqslant 1;\ m \geqslant 1$ по формуле (18).

---

* Следует учесть, что, поскольку среди a_n нет равных нулю, то система $\{\varphi_n(x)\}$ совпадает с системой $\{\psi_n(x)\},\ n \geqslant 0$ (см. (14)).

В силу замечаний 1, 2 система $\{\Phi_n(x)\}$ (см. 19) полна в $L\,[0,1]$ и содержит равномерно ограниченную подсистему $\{\psi_m^{(1)}(x);\ m\geqslant 2\}$.

Пусть $\{\tilde{\psi}_n(x);\ n\geqslant 1\}$ — функции $\psi_m^{(k)}(x)$, $m\geqslant 2$; $k\geqslant 2$, занумерованные согласно замечанию 3, где в качестве $\{M_n\}$ взята произвольная последовательность, удовлетворяющая условию

$$M_n=o\left(\frac{1}{a_n}\right). \tag{27}$$

Следовательно эти функции удовлетворяют соотношению (20).

Из соотношений (13), (4)—(6) легко вывести равенства

$$p_n^2=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k^2}{a_0^2\cdot a_n^2},\qquad q_n^2=\frac{a_n^2}{a_0^2}. \tag{28}$$

Из условий (25) следует, что

$$p_n^2\leqslant c_5\cdot 2^n;\ q_n^2\leqslant c_5\cdot 2^n,\ n\geqslant 1, \tag{29}$$

где c_5 — некоторая константа, зависящая от последовательности $\{a_k\}$.

Учитывая условия (8), (12), (14), (29), а также то обстоятельство, что в нашем случае

$$\varphi_n(x)\equiv\psi_n(x)\quad n=0,1,2,\cdots,$$

получаем неравенства

$$|\varphi_n(x)|\leqslant c_6\cdot\sqrt{2^n},\ n\geqslant 0. \tag{30}$$

Теперь определим искомую систему $\{\psi_n(x)\}$, $n\geqslant 0$. Пусть

$$\Psi_0(x)\equiv\varphi_0(x), \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi_1(x)&=a_{11}^{(1)}\varphi_1(x)+a_{21}^{(1)}\psi_2^{(1)}(x)\\ \Psi_2(x)&=a_{12}^{(1)}\varphi_1(x)+a_{22}^{(1)}\psi_2^{(1)}(x)\end{aligned}\right|. \tag{32}$$

Введем обозначение

$$\gamma_k=3+\sum_{l=1}^{k}(2^l-2),\ k\geqslant 1. \tag{33}$$

Для $m=2^k-2+i$, где $1\leqslant i\leqslant 2^k$, $k\geqslant 2$, функцию $\Psi_m(x)$ определим следующим образом:

$$\Psi_m(x)=a_{1i}^{(k)}\varphi_k(x)+a_{2i}^{(k)}\tilde{\psi}_{k-1}(x)+\sum_{r=3}^{2^k}a_{ri}^{(k)}\psi^{(1)}_{\gamma_{k-1}+r-2}(x). \tag{34}$$

Покажем, что ряд (26) сходится к нулю на [0,1].

В силу условия 2° и формул (22), (32), (34) получим

$$\frac{a_k}{\sqrt{2^k}}\cdot\sum_{l=2^k-1}^{2^k}\Psi_l(x)=a_k\varphi_k(x),\ k=1,2,\cdots;\ x\in[0,1], \tag{35}$$

и следовательно ряд

$$a_0\Psi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\sqrt{2^k}}\left\{\sum_{l=2^{k-1}}^{2^k}\Psi_l(x)\right\} \tag{36}$$

совпадает с рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,\varphi_n(x)$, который сходится всюду на $[0,1]$ к нулю.

Введем обозначение

$$\delta_k(x)=\max_{2^{k-1}<m<2^k}\left\{|a_k|\cdot 2^{-k/2}\cdot\left|\sum_{l=2^{k-1}}^{m}\Psi_l(x)\right|\right\}. \tag{37}$$

Имеем

$$\left|\sum_{l=2^{k-1}}^{m}\Psi_l(x)\right|=\left|\sum_{l=2^{k-1}}^{m}\left\{a_{1l}^{(k)}\varphi_k(x)+a_{2l}^{(k)}\tilde{\psi}_{k-1}(x)+\sum_{r=3}^{2^k}a_{rl}^{(k)}\psi^{(1)}_{2^{k-1}+r-2}(x)\right\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\varphi_k(x)|\cdot\sum_{l=2^{k-1}}^{m}|a_{1l}^{(k)}|+|\tilde{\psi}_{k-1}(x)|\sum_{l=2^{k-1}}^{m}|a_{2l}^{(k)}|+\left|\sum_{r=3}^{2^k}\psi^{(1)}_{2^{k-1}+r-2}(x)\cdot\sum_{l=1}^{m}a_{rl}^{(k)}\right|.$$

Вторая сумма в силу условия 3° и (20) не превосходит $c_1\cdot M_n\cdot 2^{n/2}$, а третья сумма, в силу условия 4° и (21), не больше, чем $c_3\sqrt{\frac{2}{x_1}}\cdot 2^{n/2}$. Первая сумма равна нулю для $x\leqslant x_{k-1}$ $(x_k\uparrow 1)$. Сравнивая полученные соотношения с (37), (27), (25), получаем, что $\delta_k(x)\to 0$ для всех $x\in[0,1]$, откуда следует сходимость ряда (26).

Взяв для $n=2^k-1+i$ $(1\leqslant i\leqslant 2^k;\ k\geqslant 1)$

$$b_n=\frac{a_k}{\sqrt{2^k}} \tag{38}$$

и положив в (38) $a_k=\frac{1}{\sqrt{k}}$*, получим для b_k требуемую оценку.

Замечание 4. Несложные вычисления показывают, что в оценке для b_k (см. условие 6) теоремы) под корнем можно написать любое итерированное число логарифмов; например, справедливо утверждение

$$b_m=O\left(\frac{1}{\sqrt{m\cdot\ln m\cdot\ln\ln m}}\right).$$

Для этого достаточно положить $a_k=\frac{1}{\sqrt{k\cdot\ln k}}$.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 23.I.1969

---

* Последовательность $a_k=\frac{1}{\sqrt{k}}$, $k=1, 2,\cdots$, очевидно, удовлетворяет условию (25).

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ, Ռ. Ի. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ. Օրթոգոնալ շարքերի միակության մասին *(ամփոփում)*

Պ. Լ. Ուլյանովի կողմից [2] աշխատանքում ձևակերպված էր հետևյալ խնդիրը «Գոյություն ունի՞ արդյոք իր համախմբության մեջ սահմանափակ, անընդհատ ֆունկցիաներից կազմված $\{\varphi_n(x)\}$ L_2-ում լրիվ օրթոնորմալ սիստեմ, որի համար դատարկ բազմությունը միակության բազմություն չէ»։

Ներկա աշխատանքում ցույց է տրվում, որ նշված խնդիրը ունի դրական լուծում։

G. M. MUSHEGHIAN and R. I. HOVSEPIAN. *On the uniqueness of orthogonal series* (summary)

The problem under consideration was proposed by Uljanov in [2],

Does a system of uniformly bounded orthonormal, complete in L_2 continious funtions exist, for which the emplty set is an M-set?

The present paper shows, that the answer is Yes.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари*. Тригонометрические ряды, Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961.
2. *П. Л. Ульянов*. Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, XIX, вып. 1, 1964.
3. *R. P. Agnew*. Gonvergence of orthogonal series, Duke Mathematical Journal, 27, № 2, 1960, 127—131.
4. *Р. П. Агнью*. Сходимость ортогональных рядов, Математика, сб, переводов, 6:1, 1962, 60—64.
5. *А. М. Олевский*. Об одной ортонормальной системе и ее применениях, Матем. сб., 71 (113): 3, 1966, 297—337.