

Г. Б. МАРАНДЖЯН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье устанавливаются некоторые свойства асимптотически оптимальных рекурсивных функций и сложностей натуральных чисел относительно них, введенных А. Н. Колмогоровым в работе [1].

Будут рассматриваться некоторые операции над частично-рекурсивными функциями и будет исследоваться вопрос о том, какие из этих операций сохраняют свойство асимптотической оптимальности. Так, в теоремах 1, 2, 4 рассматриваются вопросы, связанные с преобразованиями асимптотически оптимальных функций при помощи операции суперпозиции. А именно, изучается вопрос о том, для каких функций можно гарантировать асимптотическую оптимальность функций, получаемых при подстановке их в асимптотически оптимальные функции и при подстановке асимптотически оптимальных функций в них. В связи с этим будут введены понятия подстановочных и надстановочных функций и изучены их свойства. Другие типы преобразований частично-рекурсивных функций, сохраняющих свойство асимптотической оптимальности, рассмотрены в теоремах 11 и 12.

Будут рассматриваться также вопросы, связанные с мажорированием и минорированием асимптотически оптимальных функций, а также сложностей натуральных чисел относительно них, при помощи вычислимых функций тех или иных типов при различных вариантах мажорирования и минорирования (теоремы 6—9).

Остальная часть работы посвящена исследованию свойств функций, асимптотически оптимальных для множества одностенных примитивно-рекурсивных и множества одностенных обще-рекурсивных функций (теоремы 13—17).

В дальнейшем все термины и утверждения понимаются конструктивно [3].

1. Введем некоторые обозначения и определения. Буквами a, c, d, q, t, x, y, z будут обозначаться переменные, принимающие значения из натурального ряда чисел $0, 1, 2, 3, \dots$.

Строчными греческими буквами $\delta, \varphi, \psi, \zeta, \rho, \omega$ (иногда с индексами) будут обозначаться частично-рекурсивные функции.

Через $\sigma, \iota, \times$ обозначена тройка примитивно-рекурсивных функций таких, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma(1(x), x(x)) &= x; \\ 1(\sigma(x, y)) &= x; \\ x(\sigma(x, y)) &= y \end{aligned} \right\}.$$

Через ε будет обозначаться примитивно-рекурсивная функция такая, что $\varepsilon(x) \equiv x$.

Прописными греческими буквами Φ, Ψ, Ξ (иногда с индексами) будут обозначаться одноместные асимптотически оптимальные функции, или такие функции, для которых в той или иной связи ставится вопрос об их асимптотической оптимальности.

Множество всех одноместных примитивно-рекурсивных функций обозначим через Π^1 .

Множество всех одноместных частично-рекурсивных функций обозначим через $\mathcal{C}^1$.

Будем использовать обозначения $\mu, \nu, sg, \overline{sg}, [\]$, $\max$, $+$, $\simeq$ в том же смысле, в каком они использованы в работе [4], а символы $!$ и $\rightleftharpoons$ в том смысле, в каком они используются в работе [3].

Если φ и ψ являются одноместными частично-рекурсивными функциями, то через $\varphi \circ \psi$ будет обозначаться одноместная частично-рекурсивная функция ζ , задаваемая посредством следующего условного равенства: $\zeta(x) \simeq \varphi(\psi(x))$.

Остальные определения и обозначения будут вводиться по мере их появления в тексте.

2. В этом пункте мы введем определения длины и сложности натурального числа, а также асимптотически оптимальной функции, следуя работе [1], но в иной форме.

Через l будем обозначать примитивно-рекурсивную функцию такую, что

$$l(x) = [\log_2(x+1)]; \quad (1)$$

$l(x)$ называется длиной натурального числа x .

Введем 3-местный предикат P следующим образом:

$$P(y, \varphi, x) \rightleftharpoons ((\varphi(x) = y) \ \& \ \forall z (l(z) < l(x) \supset \neg (\varphi(z) = \varphi(x)))) \quad (2)$$

где x, y, z — переменные, допустимыми значениями которых являются натуральные числа, а φ — переменная, допустимыми значениями которой являются одноместные частично-рекурсивные функции.

Определение 1. Будем говорить, что натуральное число x является минимальным φ -прообразом натурального числа y , если для данных x, y, φ имеет место $P(y, \varphi, x)$.

Введем трехместный предикат K следующим образом:

$$K(y, \varphi, x) \rightleftharpoons \exists z (P(y, \varphi, z) \ \& \ l(z) = x), \quad (3)$$

где x, y, z — переменные, допустимыми значениями которых являются натуральные числа, а φ — переменная, допустимыми значениями которой являются одноместные частично-рекурсивные функции.

Определение 2. Будем говорить, что натуральное число x есть сложность натурального числа y относительно одноместной частично-рекурсивной функции φ , если $K(y, \varphi, x)$.

Отметим следующую связь принятой здесь символики с символикой, введенной в работе [1]. Условие, записываемое в [1] в виде $K_\varphi(y) = x$, здесь записывается в виде $K(y, \varphi, x)$.

Отход от обозначений, введенных в работе [1], связан со спецификой принятого в конструктивной математике истолкования выражений, имеющих вид $K_\varphi(y)$ (см. [2]. Приложение). Для того чтобы сохранить обозначение $K_\varphi(y)$, было бы необходимо показать, что осуществим алгоритм, который по функции φ и натуральному числу y строит объект $K_\varphi(y)$. Однако мы не располагаем алгоритмом, который мог бы по каждой одноместной частично-рекурсивной функции φ и натуральному числу y строить $K_\varphi(y)$; более того, можно доказать, что такой алгоритм (в смысле имеющихся ныне уточнений этого понятия) невозможен.

Отметим, что не существует и алгоритма, который был бы применим к тройке объектов x, y, φ тогда и только тогда, когда имеет место $P(y, \varphi, x)$ (или $K(y, \varphi, x)$), но тем не менее использование предикатов P и K допустимо, поскольку в рассматриваемом случае P и K можно было бы записать в виде формулы в логико-математическом языке (см. [3]) определенного типа.

Можно доказать, что разрешимы двуместные предикаты, которые получаются при фиксировании в предикатах P и K на месте второго аргумента одноместных частично-рекурсивных функций, имеющих разрешимый график. Если функция φ обще-рекурсивна, то можно построить одноместную частично-рекурсивную функцию ψ , которая по каждому натуральному числу x , принадлежащему области значений функции φ , дает минимальный φ -прообраз (или сложность относительно φ) числа x и функция ψ не определена, если x не принадлежит области значений функции φ . Если, кроме того, функция φ принимает все натуральные значения, то существует обще-рекурсивная функция ψ , которая по каждому x вычисляет минимальный φ -прообраз (или сложность относительно φ) числа x .

Для сложностей натуральных чисел относительно функции φ из $\mathcal{C}^1$ имеет место следующее свойство „однозначности“:

$$\forall \varphi \forall x \forall y ((K(x, \varphi, x) \& K(x, \varphi, y)) \supset x = y). \quad (4)$$

Введем в рассмотрение трехместный предикат M

$$M(\varphi, \psi, c) \equiv \forall x \forall y (\psi(x) = y \supset \exists z (\varphi(z) = y \& l(z) \leq l(x) + c)), \quad (5)$$

где φ и ψ — переменные, допустимыми значениями которых являются одноместные частично-рекурсивные функции, а x, y, z, c — переменные, допустимыми значениями которых являются натуральные числа.

Нетрудно проверить, что

$$\forall \varphi M(\varphi, \varphi, 0); \quad (6)$$

$$\forall \varphi \psi \forall c d (M(\varphi, \psi, c) \supset M(\varphi, \psi, c + d)); \quad (7)$$

$$\forall \varphi \psi \zeta \forall c d ((M(\varphi, \psi, c) \& M(\psi, \zeta, d)) \supset M(\varphi, \zeta, c + d)); \quad (8)$$

$$\forall \varphi \psi c (M(\varphi, \psi, c) \supset \forall x y z ((K(y, \varphi, x) \& K(y, \psi, z)) \supset x \leq z + c)). \quad (9)$$

Если области значений функций φ и ψ совпадают, то

$$\forall c ((\forall x y z ((K(y, \varphi, x) \& K(y, \psi, z)) \supset x \leq z + c)) \equiv M(\varphi, \psi, c)). \quad (10)$$

Определение 3. (ср. [1]). *Одноместная частично рекурсивная функция Φ называется асимптотически оптимальной функцией (сокращенно а.о.ф.) для некоторого конструктивного множества L^1 одноместных частично-рекурсивных функций, если выполнено следующее условие:*

$$\forall \varphi (\varphi \in L^1 \supset \exists c M(\Phi, \varphi, c)). \quad (11)$$

Множество функций, асимптотически оптимальных для L^1 (обозначим его через AL^1), задается следующим образом:

$$\Phi \in AL^1 \Leftrightarrow \forall \varphi (\varphi \in L^1 \supset \exists c M(\Phi, \varphi, c)). \quad (12)$$

В работе [1] доказано, что существует а.о.ф. для множества двуместных частично-рекурсивных функций. Аналогичное утверждение можно доказать, аналогичным же образом, и для класса $\mathcal{C}^1$.

Нетрудно доказать, что

$$\forall \Phi (\Phi \in \mathcal{A}\mathcal{C}^1 \supset \forall y \forall \tau \exists x K(y, \Phi, x)); \quad (13)$$

$$\forall \Phi (\Phi \in \mathcal{A}\mathcal{C}^1 \supset \forall y \forall \tau \exists x P(y, \Phi, \tau)). \quad (14)$$

Рассматривая тождественную функцию ϵ , можно показать, что если $\Phi \in \mathcal{A}\mathcal{C}^1$, то

$$\exists c \forall x y (K(y, \Phi, x) \supset x \leq l(y) + c). \quad (15)$$

В дальнейшем мы будем часто пользоваться этим свойством а.о.ф. Легко видеть из (13), что если $\Phi \in \mathcal{A}\mathcal{C}^1$, то Φ принимает все натуральные значения.

Замечание 1. В дальнейшем мы часто будем использовать следующее свойство а.о.ф., обнаруживающееся при совместном рассмотрении (8) и (12):

$$\forall \Phi \Psi c ((\Phi \in AL^1 \& M(\Psi, \Phi, c)) \supset \Psi \in AL^1). \quad (16)$$

Для функций, принадлежащих $\mathcal{A}\mathcal{C}^1$, кроме того, имеет место следующее свойство „эквивалентности“ (ср. [1], соотношение

$$|K_{A_1}(y|x) - K_{A_2}(y|x)| \leq C_{A_1, A_2};$$

$$\forall \Phi \Psi (((\Phi \in \mathcal{A}\mathcal{C}^1) \& (\Psi \in \mathcal{A}\mathcal{C}^1)) \supset \exists c (M(\Phi, \Psi, c) \& M(\Psi, \Phi, c))). \quad (17)$$

3. В этом пункте будут рассмотрены некоторые преобразования частично-рекурсивных функций, сохраняющие свойство асимптотической оптимальности.

Введем понятия подстановочных и надстановочных функций и изучим их свойства.

Определение 4. Будем говорить, что *одноместная частично-рекурсивная функция φ сильно подстановочна относительно L^1 , если существует константа c такая, что*

$$\forall \psi (\psi \in L^1 \supset M(\psi \circ \varphi, \psi, c)). \quad (18)$$

В тех случаях, когда это не вызывает недоразумений, будем говорить, что функция φ „сильно подстановочна“, не указывая относительно какого именно класса функций она является таковой.

При совместном рассмотрении (16) и (18) нетрудно обнаружить, что в результате подстановки сильно подстановочной функции в а.о.ф. для некоторого класса функций получим функцию, являющуюся а.о.ф. для того же класса функций.

Лемма 1. *Каковы бы ни были одноместная частично-рекурсивная функция φ и натуральное число a , если функция ψ_a задана посредством условного равенства*

$$\psi_a(x) \equiv \varphi(x \div a), \quad (19)$$

то имеет место

$$\forall a M(\psi_a, \varphi, l(a) + 2). \quad (20)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что имеет место следующее соотношение:

$$\forall xy (l(x + y) < l(x) + l(y) + 2). \quad (21)$$

Пусть φ есть одноместная частично-рекурсивная функция, а x и y — натуральные числа такие, что $y = \varphi(x)$. Тогда для любого натурального числа a имеем $\varphi((x + a) \div a) = y$, следовательно, если ψ_a и φ связаны соотношением (19), то $\forall a (\psi_a(x + a) = y)$, а так как имеет место (21), то, следовательно, существует натуральное число z (в частности, можно взять $z = x + a$) такое, что $\forall a ((\psi_a(z) = y \& l(z) \leq l(x) + l(a) + 2))$. В силу того, что единственным условием, наложенным на x и y является условие $y = \varphi(x)$, получаем

$$\forall axy (y = \varphi(x) \supset \exists z ((\psi_a(z) = y \& l(z) \leq l(x) + l(a) + 2)),$$

следовательно (см. (5)), имеем

$$\forall a M(\psi_a, \varphi, l(a) + 2).$$

Приняв во внимание произвольность выбора функции φ , завершаем доказательство. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для того чтобы одноместная частично-рекурсивная функция φ была сильно подстановочной относительно AC^1 необходимо и достаточно, чтобы существовала константа a такая, что*

$$\forall x \exists y (\varphi(y) = x \& l(y) \leq l(x) + a). \quad (22)$$

Доказательство. Докажем сначала достаточность. Пусть одноместная частично-рекурсивная функция φ и натуральное число a таковы, что имеет место (22). Нужно доказать, что функция φ сильно подстановочна, то есть нужно построить константу d такую, что

$$\forall \Phi (\Phi \in AC^1 \supset M(\Phi \circ \varphi, \Phi, d)).$$

Сейчас мы убедимся, что можно взять $d = a$. Зафиксируем а.о.ф. Φ . Пусть $\Phi(x) = y$. Поскольку функция φ , согласно предположению, удовлетворяет условию (22), то $\exists z (\varphi(z) = x \& l(z) \leq l(x) + a)$. Следовательно

$$\Phi(x) = y \supset \exists z (\Phi(\varphi(z)) = y \& l(z) \leq l(x) + a),$$

откуда получаем

$$\forall xy (\Phi(x) = y \supset \exists z (\Phi(\varphi(z)) = y \& l(z) \leq l(x) + a),$$

значит, $M(\Phi \circ \varphi, \Phi, a)$. Поскольку не было сделано никаких предположений относительно функции Φ кроме того, что $\Phi \in A\mathcal{C}^1$, то имеем

$$\forall \Phi (\Phi \in A\mathcal{C}^1 \supset M(\Phi \circ \varphi, \Phi, a)),$$

то есть имеет место (18) при $c = a$. Следовательно, функция φ сильно подстановочна. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть функция φ сильно подстановочна. Нам нужно доказать, что в этом случае можно построить константу p такую, что будет иметь место (22). По определению сильно подстановочной функции для функции φ существует константа c такая, что имеет место (18). Пусть а.о.ф. Φ такова, что

$$\Phi(1) = 0 \& \forall x (x \neq 1 \supset \neg (\Phi(x) = 0)). \quad (23)$$

(Очевидно, что такую а.о.ф. можно построить). Согласно предположению о функции φ имеем $M(\Phi \circ \varphi, \Phi, c)$. Пусть q есть натуральное число. Построим частично-рекурсивную функцию Ψ_q следующим образом:

$$\Psi_q(x) \simeq \Phi(x + q). \quad (24)$$

По лемме 1 имеем

$$\forall q M(\Psi_q, \Phi, l(q) + 2), \quad (25)$$

откуда, согласно замечанию 1, можно утверждать, что при любом q функция Ψ_q есть а.о.ф. для $\mathcal{C}^1$. Следовательно

$$\forall q M(\Psi_q \circ \varphi, \Psi_q, c), \quad (26)$$

где c — константа, упомянутая выше и не зависящая от Ψ_q . Из (25) и (26), используя свойство (8), получим

$$\forall q M(\Psi_q \circ \varphi, \Phi, c + l(q) + 2),$$

или, что то же самое

$$\forall qxy (\Phi(x) = y \supset \exists z (\Psi_q(\varphi(z)) = y \& l(z) \leq l(x) + l(q) + c + 2)).$$

Поскольку $\Phi(1) = 0$, то

$$\forall q \exists z (\Psi_q(\varphi(z)) = 0 \& l(z) \leq l(q) + c + 3).$$

Но функция Ψ_q принимает значение 0 только при значении аргумента, равном $q + 1$, следовательно

$$\forall q \exists z (\varphi(z) = q + 1 \& l(z) \leq l(q) + c + 3). \quad (27)$$

Пусть а.о.ф. Ξ такова, что

$$\Xi(0) = 0 \& \forall x ((x \neq 0) \supset \neg (\Xi(x) = 0)). \quad (28)$$

Очевидно, что такая а.о.ф. существует. В силу предположения о сильной подстановочности функции φ имеем $M(\Xi \circ \varphi, \Xi, c)$ (фигурирующая здесь константа c та же, что и выше), откуда, исходя из того, что $\Xi(0) = 0$, получаем, используя (5)

$$\exists z (\varphi(z) = 0 \& l(z) \leq c). \quad (29)$$

Из (27) и (29), как легко видеть, следует, что

$$\forall q \exists z (\varphi(z) = q \& l(z) \leq l(q) + c + 3). \quad (30)$$

Выбрав $a = c + 3$, получим (22). Теорема доказана.

Из теоремы, в частности, следует, что какова бы ни была функция $\Phi \in A\mathcal{C}^1$, функции

$$\Psi(x) \simeq \Phi(x + a),$$

$$\Xi(x) \simeq \Phi\left(\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor\right), \text{ где } a > 0,$$

всегда принадлежат множеству $A\mathcal{C}^1$, в то время как функции

$$\psi_1(x) \simeq \Phi(x^2),$$

$$\psi_2(x) \simeq \Phi(x + a),$$

$$\psi_3(x) \simeq \Phi(l(x)),$$

вообще говоря, могут не входить в $A\mathcal{C}^1$ (хотя можно подобрать функцию $\Phi \in A\mathcal{C}^1$ так, что ψ_1 и ψ_2 будут входить в $A\mathcal{C}^1$, что же касается функции ψ_3 то ни при какой Φ функция ψ_3 не будет принадлежать множеству $A\mathcal{C}^1$).

Заметим, что тем же методом, каким доказана теорема, можно доказать, что имеет место большее, чем утверждается в теореме, а именно, функция φ сильно подстановочна относительно множества $\mathcal{C}^1$ (а не только $A\mathcal{C}^1$) функций тогда и только тогда, когда функция φ при некотором a удовлетворяет условию (22). По этой причине естественно говорить о функции, сильно подстановочной относительно $A\mathcal{C}^1$ просто „сильно подстановочная функция“, опуская указание на то, относительно какого именно класса функций это справедливо. Заметим лишь, что для некоторых классов функций можно построить сильно подстановочные функции, не являющиеся сильно подстановочными, скажем для $\mathcal{C}^1$. Например, функция $\varphi(x) \equiv 2x$ сильно подстановочна для конструктивного множества частично-рекурсивных функций, область определения которых состоит лишь из четных чисел, но φ не будет сильно подстановочной относительно $\mathcal{C}^1$.

Следствие 1. *Функция φ сильно подстановочна для конструктивного множества $\mathcal{C}^1$ одноместных частично-рекурсивных функций тогда и только тогда, когда*

$$\exists aM(\varphi, \varepsilon, a). \quad (31)$$

Доказательство очевидно.

Следствие 2. *Если $\Phi \in A\mathcal{C}^1$, то Φ — сильно подстановочная функция для любого конструктивного множества L^1 частично-рекурсивных функций.*

Доказательство. В силу того, что $\Phi \in A\mathcal{C}^1$, имеем

$$\exists aM(\Phi, \varepsilon, a), \quad (32)$$

а затем, используя следствие 1, завершаем доказательство.

Следствие 3. Если $\Phi \in A\mathcal{C}^1$ и $\Psi \in A\mathcal{C}^1$, то $\Phi \circ \Psi \in A\mathcal{C}^1$, то есть множество $A\mathcal{C}^1$ замкнуто относительно операции суперпозиции функций.

Доказательство. В силу следствия 2 имеем

$$\exists a M(\Phi \circ \Psi, \Phi, a),$$

откуда, используя замечание 1, заключаем, что $\Phi \circ \Psi \in A\mathcal{C}^1$.

Следствие 4. Класс функций, сильно подстановочных для $A\mathcal{C}^1$, замкнут относительно операции суперпозиции.

Доказательство этого утверждения, очевидно, можно провести и без использования теоремы 1, на основании только определения сильной подстановочности.

Из предыдущих рассмотрений вытекает естественный вопрос о характеристизации класса функций φ , определенных аналогично сильно подстановочным функциям (см. определение 4), но не подставляемым в а. о. ф., а „навешиваемым“ на а. о. ф., то есть удовлетворяющим условию

$$\exists c \forall \Phi (\Phi \in AL^1 \supset M(\varphi \circ \Phi, \Phi, c)). \quad (33)$$

Такую функцию φ будем называть **сильно надстановочной** относительно AL^1 . Ответ для $A\mathcal{C}^1$ дается следующей теоремой.

Теорема 2. Для того чтобы одноместная частично-рекурсивная функция φ была сильно надстановочной относительно $A\mathcal{C}^1$, необходимо и достаточно, чтобы имело место $\varphi(x) \equiv x$.

Доказательство. Достаточность условия $\varphi(x) \equiv x$ для того, чтобы функция φ была сильно надстановочной, очевидна. Докажем необходимость. Допустим, что функция φ является сильно надстановочной и константа c такова, что имеет место

$$\forall \Phi (\Phi \in A\mathcal{C}^1 \supset M(\varphi \circ \Phi, \Phi, c)).$$

Выберем а.о.ф. Φ таким образом, чтобы функция Φ не была определена при значении аргумента, равном 0. Рассмотрим конструктивную последовательность $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$ частично-рекурсивных функций, задаваемых следующим образом:

$$\Phi_a(x) \simeq \begin{cases} a & \text{при } x = a \\ \Phi(x - (a+1) \cdot 2^{c+1}) & \text{при } x \neq a, \end{cases} \quad (34)$$

где a принимает натуральные значения $0, 1, 2, 3, \dots$, а c — константа, упомянутая в начале доказательства. Нетрудно видеть, что функция Φ_a на отрезке натуральных чисел от 0 до $(a+1) \cdot 2^{c+1}$ включительно не определена для значений аргумента, отличных от a . Согласно лемме 1 при любом a функция Φ_a есть а.о.ф. и, следовательно, в силу предположения о том, что φ сильно надстановочна, имеем

$$\forall a M(\varphi \circ \Phi_a, \Phi_a, c), \quad (35)$$

где c — все та же константа.

Обозначим через G_y конструктивное множество, определяемое следующим образом:

$$x \in G_y \Leftrightarrow \varphi(x) = y. \quad (36)$$

Для каждого y множество G_y непусто (так как функция φ принимает все натуральные значения—в противном случае функция $\varphi \circ \Phi$ не могла бы быть асимптотически оптимальной) и рекурсивно перечислимо.

Рассматривая совместно (35) и (36), получим

$$\forall xy (\Phi_a(x) = y \supset \exists z (\Phi_a(z) \in G_y \& l(z) \leq l(x) + c)). \quad (37)$$

Положив в (37) $y = a$, получим

$$\forall ax (\Phi_a(x) = a \supset \exists z (\Phi_a(z) \in G_a \& l(z) \leq l(x) + c)). \quad (38)$$

Но по (34) имеем $\Phi_a(a) = a$, следовательно, из (38), взяв $x = a$, получаем

$$\forall a \exists z (\Phi_a(z) \in G_a \& l(z) \leq l(a) + c). \quad (39)$$

По определению функции Φ_a , единственным значением аргумента таким, что $l(\Phi_a(z))$ и $l(z) \leq l(a) + c$, является значение $z = a$, причем $\Phi_a(a) = a$. Следовательно

$$\forall a (a \in G_a),$$

откуда, учитывая (36), получаем $\forall a (\varphi(a) = a)$. Теорема доказана. Таким образом, существует лишь одна, тривиальная, сильно надстановочная относительно $A\mathcal{C}^1$ функция.

Рассмотрим теперь еще один класс одноместных частично-рекурсивных функций таких, что в результате подстановки в функцию из этого класса функции из $A\mathcal{C}^1$, получается функция, принадлежащая $A\mathcal{C}^1$.

Определение 5. Будем говорить, что одноместная частично-рекурсивная функция φ слабо надстановочна относительно класса L^1 , если выполнено следующее условие:

$$\forall \psi (\psi \in L^1 \supset \varphi \circ \psi \in L^1). \quad (40)$$

Прежде чем доказать основную теорему, относящуюся к слабо надстановочным функциям, докажем следующую теорему.

Теорема 3. Каковы бы ни были функции $\Phi \in A\mathcal{C}^1$ и $\varphi \in \mathcal{C}^1$ существует константа c такая, что

$$\forall xyz (l\varphi(y) \supset ((K(y, \Phi, z) \& K(\varphi(y), \Phi, x)) \supset x \leq z + c)). \quad (41)$$

Отметим, что (41) в терминах работы [1] запишется следующим образом:

$$\forall y (l\varphi(y) \supset K_\Phi(\varphi(y)) \leq K_\Phi(y) + c). \quad (41')$$

Доказательство. Пусть $\Phi \in A\mathcal{C}^1$ и $\varphi \in \mathcal{C}^1$. Тогда существует константа c такая, что $M(\Phi, \varphi \circ \Phi, c)$. Следовательно

$$\forall xy (l\varphi(y) \supset (\varphi(\Phi(x)) = \varphi(y) \supset \exists t (\Phi(t) = \varphi(y) \& l(t) \leq l(x) + c))). \quad (42)$$

Кроме того, очевидно, что

$$\forall xy (l\varphi(y) \supset (\Phi(x) = y \supset \varphi(\Phi(x)) = \varphi(y))). \quad (43)$$

Из (42) и (43) получаем

$$\forall xy (\neg \varphi(y) \supset (\Phi(x) = y \supset \exists t (\Phi(t) = \varphi(y) \& l(t) \leq l(x) + c))), \quad (44)$$

а отсюда, как нетрудно видеть, следует, что

$$\forall xyz (\neg \varphi(y) \supset ((K(y, \Phi, z) \& K(\varphi(y), \Phi, x)) \supset x \leq z + c)). \quad (45)$$

Теорема доказана.

Таким образом, никакой алгоритм по числам, имеющим „малую“ сложность, не может строить числа, имеющие существенно большую сложность относительно а.о.ф. для $\mathcal{C}^1$.

Теорема 4. *Для того чтобы одноместная частично-рекурсивная функция φ была слабо надстановочной относительно $\mathcal{A}\mathcal{C}^1$, необходимо и достаточно, чтобы φ принимала все натуральные значения.*

Доказательство. Необходимость того, чтобы функция φ , слабо надстановочная для $\mathcal{A}\mathcal{C}^1$, принимала все натуральные значения, очевидна: если функция φ принимает не все натуральные значения, то функция $\varphi \circ \Phi$ ни при какой Φ не может оказаться асимптотически оптимальной. Докажем достаточность указанного условия. Пусть одноместная частично-рекурсивная функция φ принимает все натуральные значения. Тогда, коль скоро зафиксирована схема вычисления функции φ , можно ввести функцию ζ следующим образом:

$$\zeta(x) \simeq \forall y (\varphi(y) = x),$$

где символ $\simeq$ используется в том же смысле, в каком он введен в работе [4] (теорема XXV).

В силу предположения о том, что функция φ принимает все натуральные значения, функция ζ оказывается общерекурсивной, то есть $\forall x \exists \zeta(x)$. Далее, в силу того, что, очевидно, $\varphi(\zeta(x)) \equiv x$, получаем, что если для некоторых натуральных x и y имеем $\Phi(x) = \zeta(y)$, то $\varphi(\Phi(x)) = y$, следовательно

$$\forall xy (\Phi(x) = \zeta(y) \supset \exists z (\varphi(\Phi(z)) = y \& l(z) \leq l(x))). \quad (46)$$

Но по предыдущей теореме (см. (46)) имеем при некотором c , зависящем только от Φ и ζ

$$\forall xy (\Phi(x) = y \supset \exists z (\Phi(z) = \zeta(y) \& l(z) \leq l(x) + c)). \quad (47)$$

Рассматривая совместно (46) и (47), получаем

$$\forall xy (\Phi(x) = y \supset \exists z (\varphi(\Phi(z)) = y \& l(z) \leq l(x) + c))$$

или, короче, $M(\varphi \circ \Phi, \Phi, c)$. Следовательно, функция $\varphi \circ \Phi$, при сделанных в начале доказательства предположениях, является а.о.ф. для $\mathcal{C}^1$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть A и B являются конструктивными рекурсивно изоморфными множествами натуральных чисел и рекурсивная функция φ представляет рекурсивный изоморфизм множества A на множество B . Тогда какова бы ни была функция $\Phi \in \mathcal{A}\mathcal{C}^1$, существует константа c такая, что каковы бы ни были $x \in A$ и*

$y \in B$, соответствующие друг другу в указанном изоморфизме, всегда имеет место

$$\forall zt ((K(x, \Phi, z) \& K(y, \Phi, t)) \supset |z - t| \leq c).$$

Доказательство вытекает очевидным образом из теоремы 3.

4. Рассмотрим теперь вопросы, связанные с мажорированием и минорированием а.о.ф., а также сложностей натуральных чисел относительно них при помощи вычислимых функций тех или иных типов при различных вариантах мажорирования и минорирования.

Теорема 6. *Какова бы ни была функция $\Phi \in A\mathcal{C}^1$ не существует одноместной обще-рекурсивной функции φ такой, что*

$$\forall x (!\Phi(x) \supset \Phi(x) \leq \varphi(x)). \quad (48)$$

Доказательство. Доказательство проводим методом приведения к нелепости. Допустим, что одноместная обще-рекурсивная функция φ и $\Phi \in A\mathcal{C}^1$ таковы, что выполнено условие (48). Построим функцию ψ следующим образом:

$$\psi(x) = \max \{ \varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(2^x) \} + 1.$$

Очевидно, что функция ψ обще-рекурсивна. Нетрудно видеть, что

$$\forall xy (\Phi(x) = \psi(y) \supset l(x) > y). \quad (49)$$

В силу того, что $\Phi \in A\mathcal{C}^1$, существует константа c такая, что $M(\Phi, \psi, c)$ или, что то же самое

$$\forall xy (\psi(x) = y \supset \exists z (\Phi(z) = y \& l(z) \leq l(x) + c)). \quad (50)$$

Из (49) и (50) получаем

$$\forall xy (\psi(x) = y \supset \exists z (\Phi(z) = y \& l(z) \leq l(x) + c \& x \leq l(z))),$$

а затем

$$\forall xy (\psi(x) = y \supset \exists z (\Phi(z) = y \& x \leq l(x) + c)). \quad (51)$$

Поскольку функция ψ обще-рекурсивна, то из (51) получаем

$$\forall x \exists z (\Phi(z) = \psi(x) \& x \leq l(x) + c), \quad (52)$$

откуда имеем $\forall x (x \leq l(x) + c)$. Полученное противоречие завершает доказательство. Теорема доказана.

Следствие 1. *Никакая функция, асимптотически оптимальная для $\mathcal{C}^1$, не продолжима до обще-рекурсивной функции.*

Следствие 2. *Не существует одноместной обще-рекурсивной функции, асимптотически оптимальной для $\mathcal{C}^1$.*

Следствие 3. *Область определения функции, асимптотически оптимальной для $\mathcal{C}^1$, не рекурсивна.*

Рассмотрим теперь вопрос о существовании нижних и верхних вычислимых оценок для сложностей натуральных чисел относительно функций, асимптотически оптимальных для $\mathcal{C}^1$.

В теореме 7 отрицательно решается вопрос о существовании рекурсивной нижней оценки для сложностей натуральных чисел относительно функций, асимптотически оптимальных для $\mathcal{C}^1$.

Теорема 7. Какова бы ни была функция $\Phi \in A\mathcal{C}^1$ не существует одноместной обще-рекурсивной функции τ , принимающей сколь угодно большие значения и такой, что

$$\forall xy (K(y, \Phi, x) \supset \tau(y) \leq x). \quad (53)$$

Доказательство. Доказываем методом приведения к нелепости. Допустим, что одноместная обще-рекурсивная функция τ и $\Phi \in A\mathcal{C}^1$ таковы, что для них имеет место (53).

Введем функцию ψ посредством следующей схемы:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0, \\ \psi(x+1) &= \sigma(\tau(\psi(x)) + 1, \kappa(\psi(x)) + 1) \cdot sg((\tau(\psi(x)) + 1) - \tau(x+1)) + \\ &\quad + \sigma(0, \iota(\psi(x))) \cdot sg((\tau(\psi(x)) + 1) - \tau(x+1)), \end{aligned}$$

где σ, ι, κ — функции, введенные в начале статьи.

Легко проверить, что ψ является обще-рекурсивной функцией.

Введем далее функцию ζ следующим образом:

$$\zeta(x) = \iota(\psi(x)).$$

Нетрудно показать, что функция τ общерекурсивна, принимает все натуральные значения, отличные от 0, в точности по одному разу (значение 0 функция ζ может принимать более чем один раз) и минорирует функцию τ , а следовательно, справедливо следующее:

$$\forall xy (\Phi(x) = y \supset \tau(y) \leq l(x)). \quad (54)$$

Введем функцию ω следующим образом:

$$\omega(x) \simeq \mu y (\zeta(y) = x). \quad (55)$$

Нетрудно видеть, что функция ω обще-рекурсивна и принимает сколь угодно большие значения. Кроме того из (55) следует, что

$$\forall xy (\omega(x) = y \supset x = \zeta(y)). \quad (56)$$

Поскольку $\Phi \in A\mathcal{C}^1$ и $\omega \in \mathcal{C}^1$, то существует константа c такая, что

$$\forall xy (\omega(x) = y \supset \exists z (\Phi(z) = y \& l(z) \leq l(x) + c)). \quad (57)$$

Рассмотрев совместно (56) и (57), получим

$$\forall xy (\omega(x) = y \supset \exists z (\Phi(z) = y \& l(z) \leq l(\zeta(y)) + c)). \quad (58)$$

Затем из (54) и (58) имеем

$$\forall xy (\omega(x) = y \supset \exists z (\Phi(z) = y \& \tau(y) \leq l(\zeta(y)) + c)),$$

откуда следует, что

$$\forall xy (\omega(x) = y \supset \tau(y) \leq l(\zeta(y)) + c).$$

Но функция ω не ограничена, следовательно, бесконечное число раз будет иметь место

$$\zeta(\omega(x)) \leq l(\zeta(\omega(x))).$$

Функция $\zeta \circ \omega$ неповторяющаяся, значит последнее соотношение абсурдно. Полученное противоречие завершает доказательство. Теорема доказана.

Следующая теорема является усилением теоремы 7.

Теорема 8. *Какова бы ни была функция $\Phi \in A\mathcal{C}^1$ не может существовать одноместной частично-рекурсивной функции φ , принимающей сколь угодно большие значения и такой, что*

$$\forall xy (I\varphi(y) \supset (K(y, \Phi, x) \supset x > \varphi(y))). \quad (59)$$

Доказательство. Доказываем методом приведения к противоречию. Допустим, что неограниченная одноместная частично-рекурсивная функция φ и функция $\Phi \in A\mathcal{C}^1$ таковы, что для них имеет место (59).

Построим функцию ρ следующим образом:

$$\rho(0) \simeq \forall y (I\varphi(y) \& y > 0),$$

$$\rho(x+1) \simeq \forall y (\varphi(y) > \varphi(\rho(x)) \& y > x),$$

где символ $\simeq$ понимается в том же смысле, что и в [4] (мы полагаем, конечно, что уже зафиксирована конкретная схема вычисления функции φ).

Поскольку функция φ неограниченная, то и функция ρ оказывается неограниченной и обще-рекурсивной. Пусть функция θ задана посредством следующей схемы:

$$\theta(x) \simeq \varphi(\rho(x)).$$

Очевидно, что функция θ также обще-рекурсивна и неограничена.

Построим теперь функцию ψ посредством следующей схемы:

$$\psi(0) = 0; \psi(x+1) = \sigma(\theta(x(\psi(x))), \theta(x(\psi(x)))) \cdot \overline{sg}(|(x+1) - \rho(x(\psi(x)))|) + \\ + \sigma(0, x(\psi(x))) \cdot sg(|(x+1) - \rho(x(\psi(x)))|).$$

Нетрудно показать, что функция ψ при сделанных в начале доказательства предположениях обще-рекурсивна.

Введем, наконец, функцию ζ следующим образом:

$$\zeta(x) = 1(\psi(x)).$$

Можно доказать, что функция ζ обще-рекурсивна, принимает сколь угодно большие значения и удовлетворяет условию

$$\forall x (\zeta(x) \neq 0 \supset (I\Phi(x) \& \varphi(x) > \zeta(x))).$$

Следовательно, имеем

$$\forall xy (\zeta(x) \neq 0 \supset (\Phi(y) = x \supset I(y) > \zeta(x))).$$

Очевидно, что $\zeta(x) = 0 \supset (\Phi(y) = x \supset I(y) \geq \zeta(x))$, следовательно

$$\forall xy (\Phi(y) = x \supset I(y) > \zeta(x)).$$

Таким образом, мы получили, что неограниченная обще-рекурсивная функция ζ оценивает снизу сложность натуральных чисел относительно функции, асимптотически оптимальной для $\mathcal{C}^1$, что невозможно в силу теоремы 7. Полученное противоречие завершает доказательство. Теорема доказана.

Итак, для сложностей натуральных чисел относительно функций, асимптотически оптимальных для $\mathcal{C}^1$, не существует нетривиальных, частично-рекурсивных оценок снизу. Из этого также, в частности, можно заключить, что ни для какой функции из $\mathcal{A}\mathcal{C}^1$ не может существовать алгоритма для вычисления сложности натуральных чисел относительно выбранной функции.

Сейчас мы покажем, что всякую оценку сверху для сложностей натуральных чисел относительно функции, асимптотически оптимальной для $\mathcal{C}^1$, можно существенно понизить так, что новая оценка будет лучше старой в бесконечном рекурсивном множестве точек.

Теорема 9. Пусть одноместная частично-рекурсивная функция φ и $\Phi \in \mathcal{A}\mathcal{C}^1$ таковы, что

$$\forall xy ((\exists \tau(x) \& K(y, \Phi, x)) \supset x \leq \tau(y)), \quad (60)$$

и область определения функции τ бесконечна. Тогда существует одноместная частично-рекурсивная функция ψ с областью определения, совпадающей с областью определения функции τ , такая, что

$$\forall xy ((\exists \tau(y) \& K(y, \Phi, x)) \supset (x \leq \psi(y) \& \psi(y) \leq \tau(y))), \quad (61)$$

причем для бесконечного рекурсивного множества значений аргумента y справедливо строгое неравенство: $\psi(y) < \tau(y)$.

Доказательство. Пусть одноместная частично-рекурсивная функция φ с бесконечной областью определения и функция $\Phi \in \mathcal{A}\mathcal{C}^1$ таковы, что для них имеет место (60). Рассмотрим функцию ζ , заданную следующим образом:

$$\zeta(x) \simeq \varphi(x) - 1.$$

Очевидно, что φ принимает сколь угодно большие значения, следовательно, и функция ζ не является ограниченной. Тогда, в силу теоремы 8, для бесконечного числа значений аргумента y нарушается условие

$$(\exists \tau(y) \& K(y, \Phi, x) \& x > \tau(y)), \quad (62)$$

так как если бы это условие нарушалось лишь конечное число раз, то существовала бы неограниченная частично-рекурсивная функция, оценивающая сложность натуральных чисел относительно а.о.ф. для $\mathcal{C}^1$, что невозможно.

Построим частично-рекурсивную функцию ω следующим образом:

$$\omega(x) \simeq \forall y (l\Phi(y) \& \Phi(y) = x \& l\zeta(x) \& l(y) < \zeta(x)).$$

Используя утверждение, относящееся к (62), можно показать, что функция ω перечисляет без повторений бесконечное рекурсивно-перечислимое множество, и, кроме того, область определения функции ω содержится в области определения функции ζ . Выделим в области определения функции ω бесконечное рекурсивное множество и обозначим через χ характеристическую функцию последнего. Будем считать, что χ принимает значение 0 при значениях аргумента, принадлежащих вы-

деленному рекурсивному множеству. Тогда частично-рекурсивная функция ψ , задаваемая посредством схемы

$$\psi(x) = \varphi(x) \cdot \chi(x) + \zeta(x) \cdot \overline{sg}(\chi(x)),$$

будет, как нетрудно убедиться, искомой. Теорема доказана.

Следствие 1. *Какова бы ни была функция $\Phi \in A\mathcal{C}^1$ существует бесконечная конструктивная последовательность $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ одноместных обще-рекурсивных функций таких, что*

1) *для каждой пары функций φ_t, φ_q при $t \neq q$ функция с большим индексом минорирует функцию с меньшим индексом, причем для бесконечного числа значений аргумента — строго минорирует;*

2) *выполняется условие*

$$\forall t \forall x (K(y, \varphi, x) \supset x \leq \varphi_t(y)). \quad (63)$$

Доказательство. По данной а.о.ф. Φ можно найти такую константу c , что имеет место $M(\Phi, \varepsilon, c)$. Следовательно, можно взять

$$\varphi_0(x) = l(x) + c.$$

Применяя далее теорему 9 к функции φ_0 , порождаем функцию φ_1 , затем, применяя теорему 9 к функции φ_1 , порождаем функцию φ_2 , затем — φ_3 и так далее. Теорема доказана.

Таким образом, из теоремы 9 вытекает, что не существует окончательной верхней вычислимой оценки для сложностей натуральных чисел относительно функций, асимптотически оптимальных для $\mathcal{C}^1$.

5. Сложность натурального числа x относительно частично-рекурсивной функции φ определяется длиной наименьшего значения аргумента, при котором функция φ принимает значение x . Таким образом, представляет определенный интерес исследование свойств множества тех значений аргумента, при которых функция φ „впервые“ принимает то или иное значение. В теореме 10 выясняется одно из таких свойств указанных множеств в случае асимптотически оптимальных для $\mathcal{C}^1$ функций.

Определение 6. *Будем говорить, что конструктивное множество S натуральных чисел есть стержень функции φ , если*

$$x \in S \Leftrightarrow (!\varphi(x) \& \forall y (y < x \supset \neg (\varphi(y) = \varphi(x)))).$$

Теорема 10. *Пусть функция Φ принадлежит $A\mathcal{C}^1$. Тогда стержень S функции Φ есть иммунное, но не гипериммунное множество.*

Доказательство. Иммунность множества S вытекает из теоремы 8: если бы S не было бы иммунным, то оно содержало бы бесконечное рекурсивно-перечислимое множество и можно было бы построить неограниченную одноместную частично-рекурсивную функцию, оценивающую снизу сложность натуральных чисел относительно функции Φ , что невозможно. Докажем, что множество S не гипериммунно.

Поскольку $\Phi \in A\mathcal{C}^1$, то найдется константа c такая, что

$$\forall x \exists y (\Phi(y) = x \& l(y) \leq l(x) + c). \quad (64)$$

Введем функцию δ посредством следующей схемы примитивной рекурсии:

$$\begin{aligned} \delta(0) &= 0, \\ \delta(x+1) &= (\delta(x) + 1) \cdot 2^{c+1}, \end{aligned}$$

где c — константа, фигурирующая в (64).

Рассмотрим конструктивную последовательность $A_0, A_1, A_2, \dots$ множеств натуральных чисел такую, что множество A_t ($t = 0, 1, 2, \dots$) содержит все числа x такие, что $\delta(t) \leq x < \delta(t+1)$. Таким образом, множества A_t и A_q при $t \neq q$ не пересекаются. Докажем, что каждое из этих множеств содержит, по меньшей мере, один элемент из множества S . Рассмотрим множество A_0 . Ясно, что A_0 содержит, по меньшей мере, то натуральное число, которое является прообразом числа 0 относительно функции Φ . Следовательно, множество S пересекается с множеством A_0 . Рассмотрим теперь множество A_{t+1} . На отрезке натуральных чисел от 0 до $\delta(t+2) - 1$ функция Φ принимает не менее чем $\delta(t+1) + 1$ различных значений, следовательно, на этом отрезке натуральных чисел по меньшей мере $\delta(t+1) + 1$ чисел принадлежат множеству S . Но множества $A_0, A_1, \dots, A_t$, вместе взятые, покрывают лишь отрезок натуральных чисел от 0 до $\delta(t+1) - 1$, а вместе с множеством A_{t+1} содержат не менее чем $\delta(t+1) + 1$ элементов множества S . Следовательно, множество A_{t+1} содержит по меньшей мере один элемент из множества S . Таким образом, множество S не гипериммунно. Теорема доказана.

Теорема 11. Какова бы ни была функция $\Phi \in \mathcal{A}^1$ существует функция $\Psi \in \mathcal{A}^1$ такая, что функция Φ есть продолжение функции Ψ , причем разность между областью определения функции Φ и областью определения функции Ψ есть бесконечное рекурсивное множество натуральных чисел и, кроме того, имеет место

$$M(\Phi, \Psi, 0) \& M(\Psi, \Phi, 0).$$

Доказательство. Пусть $\Phi \in \mathcal{A}^1$. Рассмотрим множество R , определяемое следующим образом:

$$x \in R \Leftrightarrow (!\Phi(x) \& \exists y (y < x \& \Phi(y) = \Phi(x))).$$

Очевидно, что множество R рекурсивно-перечислимо. В силу предыдущей теоремы оно бесконечно, так как если бы оно было бы конечным, то область определения функции Φ оказалась бы иммунной. Выделим в множестве R бесконечное рекурсивное подмножество и обозначим через W .

Зададим функцию Ψ следующим образом:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \text{не определена, если } x \in W; \\ \Phi(x) - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция Ψ и есть искомая.

Теорема 12. Какова бы ни была функция $\Phi \in \mathcal{A}^1$ суще-

ствуют функции $\Psi \in A\mathcal{C}^1$ и $\varphi \in \Pi^1$ такие, что Φ является продолжением функции Ψ , имеет место

$$M(\Psi, \Phi, 0) \& M(\Phi, \Psi, 0)$$

и функция Ψ принимает каждое значение x не более чем $\varphi(x)$ раз.

Доказательство. Для $\Phi \in A\mathcal{C}^1$ существует константа c такая, что $M(\Phi, \varepsilon, c)$, где ε — тождественная функция.

Зададим функцию Ψ следующим образом:

$$\Psi(x) \approx \begin{cases} \Phi(x), & \text{если } !\Phi(x) \& l(x) \leq l(\Phi(x)) + c \\ \text{не определена в противном случае,} \end{cases}$$

а функцию φ выберем следующим образом: $\varphi(x) = 2^{l(x)} + c + 1$. Нетрудно видеть, что функции Ψ и Φ и есть искомые. Теорема доказана.

6. Рассмотрим теперь свойства функций, асимптотически оптимальных для Π^1 .

Очевидно, что всякая функция, асимптотически оптимальная для $\mathcal{C}^1$, будет а.о.ф. и для Π^1 . Пользуясь методом, примененным в работе [1], можно доказать, что существует одностепенная обще-рекурсивная функция, асимптотически оптимальная для Π^1 .

Теорема 13. Если $\Phi \in A\Pi^1$ и Φ — обще-рекурсивная функция, то существуют обще-рекурсивные функции φ и ψ , примитивно-рекурсивные относительно* Φ такие, что

$$\forall x, P(x, \Phi, \varphi(x)),$$

$$\forall x K(x, \Phi, \psi(x)).$$

Доказательство. Пусть $\Phi \in A\Pi^1$ и Φ обще-рекурсивна. Тогда, как нетрудно показать, существует константа c такая, что $M(\Phi, \varepsilon, c)$. Введем функцию φ следующим образом:

$$\varphi(x) = \mu y_{y < (x+1) \cdot 2^{c+1}} (\Phi(y) = x).$$

Нетрудно видеть, что функция φ примитивно-рекурсивна относительно функции Φ и удовлетворяет условию $\forall x P(x, \Phi, \varphi(x))$. Функцию ψ введем следующим образом: $\psi(x) = l(\varphi(x))$. Функция ψ примитивно-рекурсивна относительно функции Φ и, как легко убедиться, удовлетворяет условию

$$\forall x K(x, \Phi, \psi(x)).$$

Теорема доказана.

Теорема 14. Для того чтобы обще-рекурсивная функция φ была сильно подстановочной относительно $A\Pi^1$, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа c такая, что $M(\varphi, \varepsilon, c)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие 1. Суперпозиция обще-рекурсивных функций из $A\Pi^1$ принадлежит $A\Pi^1$.

Теорема 15. Если функция φ сильно надстановочна относительно $A\Pi^1$, то $\varphi(x) \equiv x$.

* Определение относительной примитивной рекурсивности см. в работе [4], § 47.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 с той разницей, что вместо того, чтобы в точке 0 считать функцию неопределенной, принимаем $\Phi(0) = p$, где p — некоторое натуральное число; остальная перестройка доказательства связана только с указанной особенностью и легко может быть проведена.

Теорема 16. Если функция $\Phi \in \text{АП}^1$, то не существует одноместной примитивно-рекурсивной функции φ такой, что

$$\forall x (1 \leq \Phi(x) \Rightarrow \Phi(x) \leq \varphi(x)).$$

Доказательство. См. доказательство теоремы 6.

Следствие 1. Не существует примитивно-рекурсивной функции, асимптотически оптимальной для Π^1 .

Теорема 17. Какова бы ни была одноместная обще-рекурсивная функция $\Phi \in \text{АП}^1$ существует одноместная неповторяющаяся обще-рекурсивная функция $\Psi \in \text{АП}^1$ такая, что

$$M(\Psi, \Phi, 0).$$

Доказательство. Пусть Φ является обще-рекурсивной функцией такой, что $\Phi \in \text{АП}^1$. Построим функцию Ψ посредством следующей схемы:

$$\Psi(0) = 0; \Psi(x+1) = \Phi(\mu y (\forall t \leq x (\Phi(y) \neq \Psi(t)))).$$

Нетрудно показать, что функция Ψ и есть искомая.

Следствие 1. Существует рекурсивная перестановка, асимптотически оптимальная для Π^1 .

Пользуясь теоремой 17, нетрудно показать, что утверждение теоремы 4 перестает быть справедливым, если в формулировке теоремы 4 заменить АЧ^1 на АП^1 . Действительно, пусть Φ является неповторяющейся одноместной обще-рекурсивной функцией, асимптотически оптимальной для Π^1 (такая функция Φ существует в силу теоремы 17). Зададим функцию φ посредством следующей схемы:

$$\varphi(x) = \mu y (\Phi(y) = x).$$

Очевидно, что функция φ обще-рекурсивна и принимает все натуральные значения. Но функция $\varphi \circ \Phi$, как легко видеть, не является асимптотически оптимальной для Π^1 .

7. Обратимся к свойствам функций, асимптотически оптимальных для множества O^1 одноместных обще-рекурсивных функций. Поскольку методы доказательств остаются в основном теми же, что и выше, то приведем лишь краткую сводку результатов, касающихся свойств функций, асимптотически оптимальных для множества O^1 .

Теоремы 1, 2, 6—12 и все следствия из них остаются справедливыми при замене в их формулировках всех вхождений АЧ^1 на АО^1 . Следствие 1 теоремы 16 остается справедливым при следующей переформулировке: не существует обще-рекурсивной функции, асимптотически оптимальной для O^1 . Очевидно, однако, что существует частично-рекурсивная функция, асимптотически оптимальная для O^1 . Возникает следующая проблема: существует ли частично-рекурсивная функ-

ция, асимптотически оптимальная для O^1 , но не являющаяся асимптотически оптимальной для C^1 ?

В заключение автор приносит глубокую благодарность И. Д. Заславскому, под руководством которого выполнена настоящая работа. Автор глубоко признателен А. Н. Колмогорову и А. А. Маркову за ряд ценных замечаний и советов, способствовавших улучшению этой работы.

Вычислительный центр АН АрмССР
и Ереванского государственного
университета

Поступило 2.XII.1967

2. Բ. ՄԱՌԱՆՋՅԱՆ. Ասիմպտոտիկաբար օպտիմալ ռեկուրսիվ ֆունկցիաների հատկությունների մասին (ամփոփում)

Հոդվածում ուսումնասիրվում են Ա. Ն. Կուլմոգորովի [1] աշխատության մեջ սահմանված ասիմպտոտիկաբար օպտիմալ ռեկուրսիվ ֆունկցիաների (ԱՕՖ) հատկությունները: Մասնավորապես ուսումնասիրվում են մասնակի ռեկուրսիվ ֆունկցիաների (ՄՌՖ) որոշ ձևափոխությունները, որոնք պահպանում են ԱՕՖ լինելու հատկությունը: Այդ նպատակով սահմանվում են խիստ տեղադրվող և թույլ վերադրվող ֆունկցիաներ և նրանց համար տրվում են հայտանշաններ: Ապացուցվում են նաև հետևյալ թեորեմները ՄՌՖ-ների (և ընդհանուր ռեկուրսիվ՝ ԼՌՖ-ների) համար ԱՕՖ հանդիսացող և վերլիններին հարաբերականությամբ բնական թվերի բարդությունների վերին և ներքին գնահատականների վերաբերյալ:

1. Եթե Φ -ը հանդիսանում է ԱՕՖ բոլոր միատեղանի ՄՌՖ-ների (կամ ԼՌՖ-ների) համար, ապա գոյություն չունի ԼՌՖ, որը վերին գնահատական է հանդիսանում Φ -ի համար:

2. ՄՌՖ-ների (կամ ԼՌՖ-ների) համար ԱՕՖ հանդիսացող ֆունկցիայի հարաբերականությամբ բնական թվերի բարդությունը չունի անսահմանափակ ներքին մասնակի ռեկուրսիվ գնահատական:

3. ՄՌՖ-ների (կամ ԼՌՖ-ների) համար ԱՕՖ հանդիսացող ֆունկցիայի հարաբերականությամբ բնական թվերի բարդության ամեն մի վերին մասնակի ռեկուրսիվ գնահատականը կարելի է լավացնել անվերջ ռեկուրսիվ բազմություն կազմող կետերում:

Համանման հաստատումներ ապացուցվում են ԼՌՖ-ների համար, որոնք ԱՕՖ են հանդիսանում պրիմիտիվ ռեկուրսիվ ֆունկցիաների համար:

10-րդ թեորեմում ապացուցվում է, որ եթե Φ -ը ԱՕՖ է հանդիսանում միատեղանի ՄՌՖ-ների (կամ ԼՌՖ-ների) համար, ապա այնպիսի Π բնական թվերի բազմությունը, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին՝

$$! \Phi(n) \& \forall m (m < n \supset \neg (\Phi(m) = \Phi(n)))$$

իմունային է, բայց հիպերիմունային չէ:

Н. В. MARANDJIAN. On some properties of asymptotically optimal recursive functions (summary)

The paper deals with the properties of asymptotically optimal recursive functions (AOF) defined by A. N. Kolmogorov [1]. Particularly, the transformations of partial recursive functions (PRF) which preserve the property of asymptotical optimality are investigated. To this end the notions of strongly substitutional, strongly and weakly superimposed functions are introduced criteria provided. The following theorems are proved on the majorization and minorization of AOFs and the complexity of natural numbers with respect to them.

1. If Φ is an AOF for the class of all one-place PRFs (or GRFs), then no general recursive majorizing Φ function exists.

2. No unlimited PRF exists which could minorize the complexity of natural numbers with respect to a function which is an AOF for the class of all one-place PRFs (or GRFs).

3. Any recursive majorant of the complexity of natural numbers with respect to a function which is an AOF for the class of one-place PRFs (or GRFs) can be improved in an infinite recursive set of points.

Similar statements are proved for general recursive functions which are AOFs for the class of all one-place primitive recursive functions.

The theorem 10 states that if Φ is an AOF for the class of all one-place PRFs (or GRFs) then the set of natural numbers n such that

$$! \Phi(n) \ \& \ \forall m (m < n \supset \neg (\Phi(m) = \Phi(n))),$$

is holds, is immune but not hyperimmune.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Н. Колмогоров. Три подхода к определению понятия „количество информации“, Проблемы передачи информации, т. I, вып. 1. 1965, 3—11.
2. Н. А. Шанин. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 15—294.
3. Н. А. Шанин. О конструктивном понимании математических суждений, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, LII, 1958, 226—311.
4. S. C. Kleene. Introduction to metamathematics, New York and Toronto (Van Nostrand), 1952, X+550 pp. Русский перевод: С. К. Клини. Введение в метаматерику, ИИЛ, М., 1957, 526.