ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 5, 1967 Математика

Г. Г. ДЖЕБЕЯН

ОБ ОПЕРАТОРЕ МАКСВЕЛЛА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

В настоящей работе изучается оператор Максвелла T [1] в ограниченной области для широкого класса краевых условий (самосопряженных и несамосопряженных). Доказывается, что при этих краевых условиях обратный оператор T^{-1} вполне непрерывен.

Оператор Максвелла T при несамосопряженных краевых условиях более частного вида рассматривался в статье Э. Р. Цекановского и автора [1]. В этой статье при изучении „задачи отражения" принималось, что затухающими видами колебаний можно пренебречь. Используя результаты настоящей работы, можно провести полный анализ „задачи отражения" без каких-либо дополнительных физических допущений.

Автор благодарен М. С. Лившицу за постановку задачи и внимание к ней, а также В. М. Адамяну и Э. Р. Цекановскому за критические замечания при выполнении настоящей работы.

1°. Пусть Ω — ограниченная область трехмерного пространства E_3 с кусочно-гладкой границей $\Gamma = S + \Sigma$, где S—гладкая выпуклая часть Γ, а Σ—плоская часть Γ, охватываемая контуром l. Введем прямоугольную систему координат (X_1, X_2, X_3) таким образом, чтобы плоская часть поверхности Γ—Σ совпадала с плоскостью $X_1 O X_2$, а ось OX_3 была направлена во внутрь Ω.

Пространством $L_2(\Sigma)$ назовем гильбертово пространство вектор-функций $u^0 = (\overset{0}{u_1}(x_1, x_2), \overset{0}{u_2}(x_1, x_2))$, определенных на Σ, компоненты которых квадратично суммируемы на Σ; метрика в $L_2(\Sigma)$ определяется по формуле

$$(u^0, v^0)_\Sigma = \int\limits_\Sigma (\overset{0}{u_1}\overset{0^*}{v_1} + \overset{0}{u_2}\overset{0^*}{v_2})\, d\sigma.$$

Рассмотрим в $L_2(\Sigma)$ следующие подпространства:

M — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{M}$ градиентов гладких функций;

M_0 — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{M}_0$ векторов grad φ^0, где φ^0—гладкие функции и $\varphi^0|_l = 0$;

N — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{N}$ гладких векторов u^0, у которых div $u^0 = 0$;

N_0 — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{N}_0$ гладких векторов $\mathbf{v}^0$, у которых div $\mathbf{v}^0 = 0$ и $(\mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{n}^0)|_l = 0$, где $\mathbf{n}_0$ — нормаль к l;

U — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{U}$ гладких градиентов гармонических функций.

Теорема 1. *Всякий гладкий вектор f^0 можно представить как ортогональную сумму*

$$\mathbf{f}^0 = \mathbf{u}^0 \oplus \mathbf{v}^0 \oplus \mathbf{w}^0, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}^0 \in \widetilde{M}_0$, $\mathbf{v}^0 \in \widetilde{N}_0$, $\mathbf{w}^0 \in \widetilde{U}$; $\mathbf{u}^0 \oplus \mathbf{w}^0 \in \widetilde{M}$, $\mathbf{v}^0 \oplus \mathbf{w}^0 \subseteq \widetilde{N}$.

Теорема доказывается с помощью логарифмического потенциала и решения граничных задач для двумерного оператора Лапласа аналогично тому, как это сделано в статье Э. Б. Быховского и Н. В. Смирнова [2].

Следствие.

$$L_2(\Sigma) = M_0 \oplus N_0 \oplus U = M \oplus N_0 = M_0 \oplus N. \tag{2}$$

Пусть $\mathbf{u}^0$ — гладкий вектор из N. Как известно [3], его можно представить в виде

$$\mathbf{u}^0 = \operatorname{grad} \varphi^0 \times \mathbf{n}, \tag{3}$$

где φ_0 — гладкая на Σ функция, а $\mathbf{n}$ — нормаль к Σ. Если теперь на контуре l функция φ^0 обращается в нуль, то в нуль на l обращается $(\mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{n}_0)$; верно и обратное. Следовательно, вектор-функции $\mathbf{u}^0 \in N_0$, $\mathbf{v}^0 \in N$ допускают представления:

$$\mathbf{u}^0 = \operatorname{grad} \varphi_1^0 \times \mathbf{n}, \quad \operatorname{grad} \varphi_1^0 \in M_0, \tag{4}$$

$$\mathbf{v}^0 = \operatorname{grad} \varphi_2^0 \times \mathbf{n}, \quad \operatorname{grad} \varphi_2^0 \in M. \tag{5}$$

Из этих представлений следует, что

$$N = M \times \mathbf{n}, \ N_0 = M_0 \times \mathbf{n}, \ M = \mathbf{n} \times N, \ M_0 = \mathbf{n} \times N_0. \tag{6}$$

2°. Рассмотрим на Σ совокупности функций (γ_m^0) и (ζ_m^0), которые являются системами собственных функций мембранных задач

$$\Delta \gamma_m^0 + \mu_m^2 \gamma_m^0 = 0, \quad \gamma_m^0|_l = 0,$$

$$\Delta \zeta_m^0 + \nu_m^2 \zeta_m^0 = 0, \quad \frac{\partial \zeta_m^0}{\partial n_0}\Big|_l = 0.$$

Системы (γ_m^0) и (ζ_m^0) полны и ортогональны

$$\int\limits_\Sigma \gamma_m^0 \gamma_n^{0*} d\sigma = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{1}{\mu_m^2}, & m = n, \end{cases} \quad \int\limits_\Sigma \zeta_m^0 \zeta_n^{0*} d\sigma = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{1}{\nu_m^2}, & m = n. \end{cases} \tag{7}$$

Введем вектор-функции

$$\mathbf{F}_m^{(e)} = \operatorname{grad} \gamma_m^0, \quad \mathbf{F}_m^{(h)} = \operatorname{grad} \zeta_m^0 \times \mathbf{n} \qquad (m \geqslant 1), \tag{8}$$

$$\mathbf{G}_m^{(e)} = \mathbf{n} \times \operatorname{grad} \gamma_m^0, \quad \mathbf{G}_m^{(h)} = \operatorname{grad} \zeta_m^0 \quad (m \geqslant 1). \tag{9}$$

Очевидно, что $\mathbf{F}_m^{(e)} \in M_0$, $\mathbf{F}_m^{(h)} \in N$, $\mathbf{G}_m^{(h)} \in M$, $\mathbf{G}_m^{(e)} \in N_0$. Нетрудно проверить, что

$$(\mathbf{F}_m^{(e)}, \mathbf{F}_n^{(e)})_\Sigma = (\mathbf{F}_m^{(h)}, \mathbf{F}_n^{(h)})_\Sigma = (\mathbf{G}_m^{(e)}, \mathbf{G}_n^{(e)})_\Sigma = (\mathbf{G}_m^{(h)}, \mathbf{G}_n^{(h)})_\Sigma = \delta_{mn} \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}. \tag{10}$$

Лемма 1. *Системы вектор-функций* $(\mathbf{F}_m^{(e)})$, $(\mathbf{F}_m^{(h)})$, $(\mathbf{G}_m^{(e)})$, $(\mathbf{G}_m^{(h)})$, *образуют ортонормированные базисы в соответствующих подпространствах:* M_0, N, N_0, M.

Утверждение леммы следует из теоремы Грина и полноты систем (γ_m^0), (ζ_m^0).

3°. Рассмотрим в области Ω следующие краевые задачи:

$$\Delta\gamma_m = 0,\ \gamma_{m|S} = 0,\ \gamma_{m|\Sigma} = \gamma_m^0\ (m \geqslant 1), \tag{11}$$

$$\Delta\zeta_m = 0, \frac{\partial\zeta_m}{\partial n}_{|S} = 0,\ \zeta_m{}_{|\Sigma} = \zeta_m^0\ (m \geqslant 1), \tag{12}$$

где γ_m^0, ζ_m^0 $(m>1)$ — функции, рассмотренные в п. 2°. Введем вектор-функции

$$\mathbf{w}_m^{(e)} = \operatorname{grad}\gamma_m,\ \mathbf{w}_m^{(h)} = \operatorname{grad}\zeta_m\ (m>1). \tag{13}$$

Легко видеть, что $\mathbf{w}_m^{(e)}$, $\mathbf{w}_m^{(h)}$ гармоничны в Ω и на поверхности Γ выполняются условия

$$\mathbf{w}_{mt|S}^{(e)} = 0,\quad \mathbf{w}_{mt|\Sigma}^{(e)} = \mathbf{F}_m^{(e)},$$

$$(\mathbf{w}_m^{(h)}\cdot n)_{|S} = 0,\quad \mathbf{w}_{mt|\Sigma}^{(h)} = \mathbf{G}_m^{(h)}, \tag{14}$$

где $\mathbf{F}_m^{(e)}$, $\mathbf{G}_m^{(h)}$ — вектор-функции, определенные равенствами (8) и (9).

Лемма 2. Системы вектор-функций $(\mathbf{w}_m^{(e)})$, $(\mathbf{w}_m^{(h)})$ *линейно независимы и полны в* U_1, U_2* *соответственно.*

Доказательство. Покажем, что система $(\mathbf{w}_m^{(e)})$ линейно независима и полна в U_1. Пусть для $m = M$ выполняется условие

$$a_1\mathbf{w}_1^{(e)} + a_2\mathbf{w}_2^{(e)} + \cdots + a_M\mathbf{w}_M^{(e)} = 0,$$

тогда на Σ справедливо равенство

$$a_1\mathbf{w}_{1t}^{(e)} + a_2\mathbf{w}_{2t}^{(e)} + \cdots + a_M\mathbf{w}_{Mt}^{(e)} = a_1\mathbf{F}_1^{(e)} + a_2\mathbf{F}_2^{(e)} + \cdots + a_M\mathbf{F}_M^{(e)} = 0.$$

Система $(\mathbf{F}_m^{(e)})$ линейно независима, значит $a_1 = a_2 = \cdots = a_M = 0$, а, следовательно, линейно независимой является система $(\mathbf{w}_m^{(e)})$. Пусть $\operatorname{grad}\varphi_1 \in \widetilde{U}_1$ и выполняется условие

$$\int\limits_\Omega \operatorname{grad}\varphi_1\,\mathbf{w}_m^{(e)}\,d\Omega = 0\ (m>1), \tag{15}$$

которое эквивалентно следующему

$$\int\limits_\Sigma \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\cdot\gamma_m^0\,d\sigma = 0 \qquad (m \geqslant 1). \tag{15a}$$

---

* U_1 — замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\widetilde{U}_1$ гладких $\operatorname{grad}\varphi$, где φ — гармонические в Ω функции] и $\varphi_{|S} = 0$; U_2—замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\widetilde{U}_2$ гладких $\operatorname{grad}\psi$, где ψ — гармонические в Ω функции и $\frac{\partial\psi}{\partial n}_{|S} = 0$ [1].

В силу полноты (φ_m^0) из (15а) следует, что $\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right|_\Sigma = 0$, а поскольку $\varphi_{1|S} = 0$ и гармонична в области Ω, то $\varphi_1 = 0$. Значит не существует ненулевого вектора из $\widetilde{U}_1$, удовлетворяющего условию (15). Система $(\mathbf{w}_m^{(e)})$ полна в U_1. Аналогично доказывается утверждение леммы относительно системы $(\mathbf{w}_m^{(h)})$.

4°. Пусть $\operatorname{grad} \Phi^0 \in M_0$, его разложение в ряд Фурье имеет вид

$$\operatorname{grad} \Phi^0 = \sum_{m=1}^{\infty} (\operatorname{grad} \Phi^0, \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma \mathbf{F}_m^{(e)} .$$

Рассмотрим усеченную сумму этого ряда

$$(\operatorname{grad} \Phi_0)_N = \sum_{m=1}^{N} (\operatorname{grad} \Phi^0, \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma \mathbf{F}_m^{(e)}, \tag{16}$$

и поставим ему в соответствие вектор $(\operatorname{grad} \Phi)_N \in \widetilde{U}_1$, определенный рядом

$$(\operatorname{grad} \Phi)_N = \sum_{m=1}^{N} (\operatorname{grad} \Phi^0, \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma \mathbf{w}_m^{(e)}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует, что $(\operatorname{grad} \Phi)_{Nt|\Sigma} = (\operatorname{grad} \Phi^0)_N$. Оператор, реализующий соответствие $(\operatorname{grad} \Phi^0)_N \to (\operatorname{grad} \Phi)_N$, обозначим через $\Gamma_0^{(e)}$. На основании неравенства для градиентов гармонических функций [1]

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, d\Omega \leqslant C \int_\Sigma (\operatorname{grad} \varphi^0)^2 \, d\sigma$$

можно заключить, что $\|\Gamma_0^{(e)}\| \leqslant C$. Поскольку оператор $\Gamma_0^{(e)}$ определен на плотном множестве вектор-функций и является ограниченным, то его можно расширить на все M_0 с сохранением нормы. Таким образом, оператор $\Gamma_0^{(e)}$, переводящий векторы из M^0 в U_1, имеет вид

$$\Gamma_0^{(e)} = \sum_{(m)} (\cdot, \ \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma \mathbf{w}_m^{(e)}, \ \|\Gamma_0^{(e)}\| \leqslant C . \tag{18}$$

Легко видеть, что оператор $\Gamma_0^{(e)*}$, действующий из U_1 в M_0, представим в виде

$$\Gamma_0^{(e)*} = \sum_{(m)} (\cdot, \ \mathbf{w}_m^{(e)})_\Omega \mathbf{F}_m^{(e)} . \tag{19}$$

Аналогично можно ввести операторы $\Gamma_0^{(h)}$ и $\Gamma_0^{(h)*}$:

$$\Gamma_0^{(h)} = \sum_{(m)} (\cdot, \ G_m^{(h)})_\Sigma \mathbf{w}_m^{(h)}, \ \|\Gamma_0^{(h)}\| \leqslant C, \tag{20}$$

$$\Gamma_0^{(h)*} = \sum_{(m)} (\cdot, \ \mathbf{w}_m^{(h)})_\Omega G_m^{(h)}. \tag{21}$$

5°. Рассмотрим оператор $Q=\begin{pmatrix} 0 & -i\,\mathrm{rot} \\ i\,\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix}$, определенный на гладких соленоидальных в области Ω шестимерных векторах $\mathbf{f}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}$. Действие оператора Q на вектор-функции определяется формулой

$$Q\mathbf{f}=\begin{pmatrix} -i\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \\ i\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Пусть вектор-функции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на поверхности S удовлетворяют условиям

$$\mathbf{E}_{t\,|S}=0,\ \ (\mathbf{H}\cdot\mathbf{n})_{|S}=0, \tag{23}$$

а на Σ — тангенциальные компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ есть гладкие функции*.

Скалярное произведение векторов $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ определим формулой

$$(\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2)_\Omega=\int_\Omega(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2^*+\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{H}_2^*)\,d\Omega. \tag{24}$$

Составляя разность билинейных форм и используя известное равенство $\mathrm{div}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}-\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$, будем иметь

$$(Q\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2)_\Omega-(\mathbf{f}_1,\ Q\mathbf{f}_2)_\Omega=-i\int_\Sigma\mathbf{n}\,(\mathbf{E}_{1t}^0\times\mathbf{H}_{2t}^{0*}+\mathbf{E}_{2t}^{0*}\times\mathbf{H}_{1t}^0)\,d\sigma \tag{25}$$

(верхний индекс „0“ здесь и в дальнейшем означает, что векторы определены на Σ).

На основании теоремы 1 вектор-функции $\mathbf{E}_{it}^0$, $\mathbf{H}_{it}^0$ $(i=1,2)$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{E}_{it}^0=\mathbf{E}_{it}^{0'}+\mathbf{E}_{it}^{0''},\ \ \mathbf{E}_{it}^{0'}\in M_0,\ \ \mathbf{E}_{it}^{0''}\in N\ \ (i=1,2),$$
$$\mathbf{H}_{it}^0=\mathbf{H}_{it}^{0'}+\mathbf{H}_{it}^{0''},\ \ \mathbf{H}_{it}^{0'}\in M,\ \ \mathbf{H}_{it}^{0''}\in N_0\ \ (i=1,2). \tag{26}$$

Тогда (25) можно переписать так

$$(Q\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2)_\Omega-(\mathbf{f}_1,\ Q\mathbf{f}_2)_\Omega=$$
$$=-i\int_\Sigma[\mathbf{E}_{1t}^{0'}\,(\mathbf{H}_{2t}^{0''*}\times\mathbf{n})+\mathbf{E}_{1t}^{0''}(\mathbf{H}_{2t}^{0'*}\times\mathbf{n})+\mathbf{E}_{2t}^{0'*}(\mathbf{H}_{1t}^{0''}\times\mathbf{n})+\mathbf{E}_{2t}^{0''*}\,(\mathbf{H}_{1t}^{0'}\times\mathbf{n})]\,d\sigma.$$

Нетрудно проверить, что при соотношениях вида

$$\mathbf{E}_t^{0'}=i\varkappa_1\,(\mathbf{H}_t^{0''}\times\mathbf{n}),$$
$$\mathbf{H}_t^{0'}=i\varkappa_2\,(\mathbf{E}_t^{0''}\times\mathbf{n}) \tag{26'}$$

* Гладкие векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, соленоидальные в Ω и удовлетворяющие условиям (23), принадлежат линеалам $\widetilde{J}$ и $\widetilde{J}_2$, где $\widetilde{J}$—линеал гладких соленоидальных в Ω вектор-функций, у которых $\mathbf{E}_{t|S}=0$, а $\widetilde{J}_2$— линеал гладких соленоидальных в Ω вектор-функций, у которых $(\mathbf{H}\cdot n)_{|S}=0$. Замыкание $\widetilde{J}$ и $\widetilde{J}_2$ в норме $L_2(\Omega)$ есть J и J_2, [1], [2].

разность (25) обращается в нуль. Числа $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ могут принимать значения по модулю от 0 до ∞. Если $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, то из (26) следует

$$\mathbf{E}_t^{0'} = \mathbf{H}^{0'} = 0. \tag{27}$$

Условия (26) и (27) можно переписать в базисах $(\mathbf{F}_m^{(e)})$ и $(\mathbf{G}_m^{(h)})$, полагая каждому „m“ свое значение $\varkappa_{1m}$ и $\varkappa_{2m}$, т. е.

$$(\mathbf{E}_t^0, \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma = i\varkappa_{1m} (\mathbf{H}_t^0, \mathbf{G}_m^{(e)})_\Sigma,$$

$$(\mathbf{H}_t^0, \mathbf{G}_m^{(h)})_\Sigma = i\varkappa_{2m} (\mathbf{E}_t^0, \mathbf{F}_m^{(h)})_\Sigma, \qquad (m > 1) \tag{26a}$$

$$(\mathbf{E}_t^0, \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma = (\mathbf{H}_t^0, \mathbf{G}_m^{(h)})_\Sigma = 0 \quad (m \geqslant 1). \tag{27a}$$

6°. Пусть $\mathrm{H}(\Omega) = \begin{pmatrix} J \\ J_2 \end{pmatrix}^*$ — гильбертово пространство вектор-функций $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$ с метрикой (24). Обозначим через A оператор Q (22), определенный на гладком линеале $D(A)$

$$D(A) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{t|S} = 0; \quad (\mathbf{E}_t^0, \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma = 0; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (m > 1) \\ (\mathbf{H}\cdot\mathbf{n})_{|S} = 0; \ (\mathbf{H}_t^0, \mathbf{G}_m^{(h)})_\Sigma = 0; \end{pmatrix}, \tag{28}$$

где $(\mathbf{F}_m^{(e)})$ и $(\mathbf{G}_m^{(h)})$ — ортонормированные базисы в M_0 и M. Область определения оператора A плотна в $\mathbf{H}(\Omega)$. $\overline{D(A)} = \mathrm{H}(\Omega)$.

Теорема 2. *В гильбертовом пространстве* $\mathrm{H}(\Omega)$ *замыкание оператора* A *является самосопряженным и имеет вполне непрерывный обратный* A^{-1}.

Доказательство. Покажем, что A имеет обратный A^{-1}. Пусть $\mathbf{f} \in D(A)$ и $A\mathbf{f} = 0$, тогда $\mathbf{E} = \operatorname{grad}\varphi$, $\mathbf{H} = \operatorname{grad}\psi$, где φ и ψ — гармонические в Ω функции, удовлетворяющие на Γ условиям

$$\varphi_{|S} = \mathrm{const}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}_{|S} = 0,$$

$$(\operatorname{grad}_t\varphi, \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma = (\operatorname{grad}_t\psi, \mathbf{G}_m^{(h)})_\Sigma = 0 \quad (m > 1).$$

Поскольку $(\operatorname{grad}_t\varphi)_{|\Sigma} \in M_0$ и $(\operatorname{grad}_t\psi)_{|\Sigma} \in M$, то $\varphi^0 = \mathrm{const}$ и $\psi^0 = \mathrm{const}$, а, следовательно, $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$ в Ω, т. е. A^{-1} существует.

Пусть теперь $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}' \\ \mathrm{H}' \end{pmatrix}$ — гладкий вектор из $\mathrm{H}(\Omega)$. Рассмотрим уравнение

$$A\mathbf{f} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \in D(A)$$

или

$$-i \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathrm{E}',$$

$$i \operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathrm{H}'. \tag{29}$$

---

* См. сноску на стр. 7.

Векторы E' и H' единственным образом допускают представления [1], [2]

$$E' = -i\,\mathrm{rot}\,H_0,$$
$$H' = i\,\mathrm{rot}\,E_0 \tag{30}$$

или в операторном виде

$$\mathbf{g} = A\mathbf{f}_0,\quad \mathbf{f}_0 \in \begin{pmatrix} \tilde{J}_1 \\ \tilde{J}_n \end{pmatrix}^{*}.$$

Оператор A^{-1} имеет вид [2]

$$\mathbf{f}_0 = A^{-1}\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -\dfrac{i}{4\pi}\,\mathrm{rot}\left\{\displaystyle\int_{\Omega}\frac{H'}{r}\,d\Omega + \int_{\Omega_1-\Omega}\frac{\nabla\eta}{r}\,d\Omega\right\} + \nabla\varphi \\ \dfrac{i}{4\pi}\,\mathrm{rot}\left\{\displaystyle\int_{\Omega}\frac{E'}{r}\,d\Omega + \int_{\Omega_1-\Omega}\frac{\nabla\xi}{r}\,d\Omega\right\} + \nabla\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{01} + \nabla\varphi \\ H_{01} + \nabla\psi \end{pmatrix}, \tag{31}$$

где η и ξ — гармонические в $\Omega_1 - \Omega$ $(\Omega_1 \supset \Omega)$ функции, удовлетворяющие на $\Gamma_1 + \Gamma$ условиям $\dfrac{\partial\eta}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 0$, $\dfrac{\partial\eta}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = -(H'\cdot\mathbf{n})_{|\Gamma}$, $\dfrac{\partial\xi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 0$, $\dfrac{\partial\xi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = -(E'\cdot\mathbf{n})_{|\Gamma}$, а ψ и φ — гармонические в Ω функции и на Γ принимают значения: $\varphi_{|S} = -\varphi_0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = -(E_{01}\cdot\mathbf{n})_{|\Sigma}$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{S+\Sigma} = -(H_{01}\cdot\mathbf{n})_{|S+\Sigma}$ (функция φ_0 восстанавливается по $E_{01t|S}$ [2]).

Для векторов E_0 и H_0 справедливы оценки [1], [2]:

$$\|E_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_1\|\mathrm{rot}\,E_0\|_{L_2(\Omega)},\quad \|H_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_1\|\mathrm{rot}\,H_0\|_{L_2(\Omega)}\ ^{**},$$

значит для оператора A^{-1} имеет место оценка

$$\|A^{-1}\mathbf{g}\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_1\|\mathbf{g}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из данной оценки и теорем вложения Соболева следует полная непрерывность оператора A^{-1}.

---

* $\tilde{J}$ — линеал гладких соленоидальных векторов, у которых $(E\cdot n)_{|\Sigma} = 0$, $\tilde{J}_n$ — линеал гладких соленоидальных векторов, у которых $(H\cdot n)_{|S+\Sigma} = 0$. Замыкание $\tilde{J}_1$ и $\tilde{J}_n$ в $L_2(\Omega)$ есть J_1 и J_n [1], [2].

** $W_2^1(\Omega)$ — гильбертово пространство вектор-функций, компоненты которых квадратично суммируемы в Ω и имеют квадратично суммируемые обобщенные производные первого порядка; метрика определяется формулой

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{W_2^1(\Omega)} = \int_{\Omega}\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2^{*}\,d\Omega + \int_{\Omega}\sum_{l,k=1}^{3}\frac{\partial f_{1l}}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f_{2l}^{*}}{\partial x_k}\,d\Omega.$$

Введем оператор $\widetilde{\Gamma}$, который осуществляет соответствие: $\mathbf{f} \to \mathbf{f}_t^0$, где $\mathbf{f} \in W_2^1(\Omega)$, $\mathbf{f}_t^0 \in L_2(\Sigma)$. В силу известного неравенства [4]: $\|\mathbf{f}_t^0\|_{L_2(\Sigma)} \leqslant C_2 \|\mathbf{f}\|_{W_2^1(\Omega)}$, оператор Γ ограничен. Построим оператор

$$\widetilde{A}\mathbf{g} = A^{-1}\mathbf{g} + \Gamma_0 \Gamma A^{-1}\mathbf{g}, \tag{32}$$

где $\Gamma_0 = \begin{pmatrix} -\Gamma_0^{(e)} & 0 \\ 0 & -\Gamma_0^{(h)} \end{pmatrix}$. Нетрудно проверить, что оператор $\widetilde{A}$ (32) переводит гладкие векторы $\mathbf{g}$ из $H(\Omega)$ в линеал $D(A)$, причем $A\widetilde{A}\mathbf{g} = \mathbf{g}$, следовательно $\widetilde{A} = A^{-1}$. Таким образом

$$A^{-1}\mathbf{g} = A^{-1}\mathbf{g} + \Gamma_0\Gamma A^{-1}\mathbf{g}. \tag{32a}$$

Расширяя по непрерывности на все $H(\Omega)$ и обозначая это расширение вновь через A^{-1}, получим утверждение теоремы.

7°. Обозначим через B оператор Q (22), определенный на гладких векторах $\mathbf{f}$ таких, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют (23) и (26a), а числа $\varkappa_{1m}$ и $\varkappa_{2m}$ определены следующим образом:

$$\varkappa_{1m} = -\frac{1}{\rho_m^{(e)}}, \quad \varkappa_{2m} = -\rho_m^{(h)},$$

где $\rho_m^{(e)} = \dfrac{\sqrt{\mu_m^2 - \omega^2}}{\omega}$, $\rho_m^{(h)} = \dfrac{\omega}{\sqrt{\nu_m^2 - \omega^2}}$, а ω — вещественный параметр ($\omega^2 < \min(\mu_1^2, \nu_1^2)$). Значит область определения оператора B есть

$$D(B) = \left(\begin{array}{l} \mathbf{E}_t|_s = 0; \ (\mathbf{E}_t^0, \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma = -\dfrac{i}{\rho_m^{(e)}} (\mathbf{H}_t^0, \mathbf{G}_m^{(e)})_\Sigma \\ \hfill (m \geqslant 1) \\ (\mathbf{H}\cdot\mathbf{n})|_s = 0; \ (\mathbf{H}_t^0, \mathbf{G}_m^{(h)})_\Sigma = -i\rho_m^{(h)} (\mathbf{E}_t^0, \mathbf{F}_m^{(h)})_\Sigma \end{array} \right) \tag{33}$$

$$\overline{D(B)} = H(\Omega).$$

Теорема 3. *В гильбертовом пространстве* $H(\Omega)$ *замыкание оператора* B *является самосопряженным и имеет вполне непрерывный обратный* B^{-1}.

Доказательство. Существование оператора B^{-1} доказывается как и в предыдущей теореме. Рассмотрим на Σ самосопряженные вполне непрерывные операторы $R^{(e)}$ и $R^{(h)}$, спектральные представления которых имеют вид

$$R^{(e)} = \sum_{(m)} \frac{1}{\rho_m^{(e)}} (\cdot, \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma \mathbf{F}_m^{(e)},$$

$$R^{(h)} = \sum_{(m)} \rho_m^{(h)} (\cdot, \mathbf{G}_m^{(h)})_\Sigma \mathbf{G}_m^{(h)}. \tag{34}$$

С помощью операторов $\Gamma_0^{(e)}$, $\Gamma_0^{(h)}$, $\Gamma_0^{(e)*}$ и $\Gamma_0^{(h)*}$, рассмотренных в п. 4°, построим операторы

$$\mathrm{K}_0^{(e)} = \Gamma_0^{(e)} R^{(e)} \Gamma_0^{(e)} = \sum_{(m)} \frac{1}{\rho_m^{(e)}} (\cdot,\ \mathbf{w}_m^{(e)})_\Omega \mathbf{w}_m^{(e)},$$

$$\mathrm{K}_0^{(h)} = \Gamma_0^{(h)} R^{(h)} \Gamma_0^{(h)} = \sum_{(m)} \rho_m^{(h)} (\cdot,\ \mathbf{w}_m^{(h)})_\Omega \mathbf{w}_m^{(h)}. \qquad (35)$$

Очевидно, что $\mathrm{K}_0^{(e)}$ действует в U_1, а $\mathrm{K}_0^{(h)}$ — в U_2 и являются самосопряженными вполне непрерывными операторами.

Рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{f} = A^{-1}\mathbf{g} + \mathrm{K}_0 \mathbf{g}, \qquad (36)$$

где $\mathbf{g}$ — гладкий вектор из $\mathrm{H}(\Omega)$, $\mathrm{K}_0 = \begin{pmatrix} -\mathrm{K}_0^{(e)} & 0 \\ 0 & -\mathrm{K}_0^{(h)} \end{pmatrix}$. Легко проверяется, что вектор-функция, определяемая (36), принадлежит линеалу $D(B)$, а также

$$B\mathbf{f} = B(A^{-1} + \mathrm{K}_0)\mathbf{g} = \mathbf{g}.$$

Таким образом

$$B^{-1}\mathbf{g} = A^{-1}\mathbf{g} + \mathrm{K}_0\mathbf{g}. \qquad (37)$$

Выполняя операцию продолжения оператора B^{-1} по непрерывности на все $\mathrm{H}(\Omega)$, получим окончательное утверждение теоремы.

Введем вектор-функции:

$$\mathbf{v}_m^{(e)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{1}{2\rho_m^{(e)}}}\ \mathbf{w}_m^{(e)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_m^{(h)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\dfrac{\rho_m^{(h)}}{2}}\ \mathbf{w}_m^{(h)} \end{pmatrix}, \qquad (38)$$

тогда оператор B^{-1} примет вид

$$B^{-1} = A^{-1} + \frac{1}{2}\sum_{(m)} (\cdot,\ \mathbf{v}_m^{(e)})_\Omega J_m \mathbf{v}_m^{(e)} + \frac{1}{2}\sum_{(m)} (\cdot,\ \mathbf{v}_m^{(h)})_\Omega J_m \mathbf{v}_m^{(h)}, \qquad (39)$$

где $J_m = -1$ $(m > 1)$.

8°. Рассмотрим теперь случай, когда $\nu_1^2 < \omega^2 < \mu_1^2$ $(\nu_1^2 < \mu_1^2)$. В этом случае $\rho_1^{(h)} = \dfrac{-i\omega}{\sqrt{\nu_1^2 - \omega^2}}$, все остальные $\rho_m^{(h)}$ и $\rho_m^{(e)}$ по-прежнему будут действительными числами. Обозначим оператор Максвелла Q (22), определенный на гладком линеале (33) с учетом того, что $\vartheta_1^2 < \omega^2 < \mu_1^2$ $(\upsilon_1^2 < \mu_1^2)$, через T_1.

$$D(T_1) = \left(\begin{array}{l} \mathbf{E}_t|_s = 0;\ (\mathbf{E}_t^0,\ \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma = -\dfrac{i}{\rho_m^{(e)}} (\mathbf{H}_t^0,\ \mathbf{G}_m^{(e)})_\Sigma\ (m \geqslant 1) \\ \qquad\qquad (\mathbf{H}_t^0,\ \mathbf{G}_m^{(h)})_\Sigma = -i\rho_m^{(h)} (\mathbf{E}_t^0, \mathbf{F}_m^{(h)})_\Sigma\ (m > 1) \\ (\mathbf{H}\cdot\mathbf{n})_{|s} = 0;\quad (\mathbf{H}_t^0,\ \mathbf{G}_1^{(h)})_\Sigma = -\rho_1^{(h)} (\mathbf{E}_t^0, \mathbf{F}_1^{(h)})_\Sigma \end{array} \right). \qquad (40)$$

Оператор T_1 в рассматриваемом случае является несамосопряженным. Область определения $D(T_1)$ плотна в $\mathrm{H}(\Omega)$. Повторяя рассуждения п. 7°, получим следующую теорему.

Теорема 4. *Несамосопряженный оператор T_1 имеет вполне непрерывный обратный T_1^{-1}, допускающий представление*

$$T_1^{-1} = B_1^{-1} + \frac{i}{2}(\cdot,\ \mathbf{v}_1^{(h)})_2\ J\mathbf{v}_1^{(h)} \quad (J = -1), \tag{41}$$

где B_1^{-1} — самосопряженный оператор вида

$$B_1^{-1} = A^{-1} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(\cdot,\ \mathbf{v}_m^{(e)})_2\ J_m\,\mathbf{v}_m^{(e)} + \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}(\cdot,\ \mathbf{v}_m^{(h)})_2\ J_m\ \mathbf{v}_m^{(h)}$$

$$(J_m = -1).$$

Сопряженный оператор $(T_1^{-1})^* = T_1^{*-1}$ имеет вид

$$T_1^{*-1} = B_1^{-1} - \frac{i}{2}(\cdot,\ \mathbf{v}_1^{(h)})_2\ J\ \mathbf{v}_1^{(h)} \quad (J = -1).$$

Нетрудно теперь проверить, что T_1^* определяется теми же граничными условиями, что и оператор T_1 (40), с той лишь разницей, что $\rho_1^{(h)}$ имеет противоположный знак.

9°. Выше (п. 7°) мы получили самосопряженный оператор B^{-1} (39), действующий в $\mathrm{H}(\Omega)$ и зависящий от вещественного параметра ω; обозначим этот оператор через B_ω^{-1}. Расположим числа (ν_m^2) и (μ_m^2) в общую последовательность (υ_m^2) в порядке возрастания. При всех значениях ω, удовлетворяющих условию

$$\omega^2 < \upsilon_1^2 \quad (\upsilon_1^2 = \min\ (\nu_1^2,\ \mu_1^2)),$$

получим семейство самосопряженных операторов вида (39). Если ω удовлетворяет неравенству $\upsilon_1^2 < \omega^2 < \upsilon_2^2$, то оператор B_ω^{-1} становится несамосопряженным T_1^{-1} (п. 8°) вида (41). Вообще говоря, при всех ω, удовлетворяющих условию $\omega^2 > \upsilon_1^2$ будем иметь семейство несамосопряженных операторов T_ω^{-1}.

Одесский политехнический институт

Поступило 20.III.1967

Հ. Գ. ՋԵԲԵՅԱՆ

ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ ՄԱՔՍՎԵԼԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՄԱՍԻՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է Մաքսվելի T *օպերատորը սահմանափակ տիրույթում մի քանի ինքնահամալուծ և ոչ ինքնահամալուծ եզրային պայմանների դեպքում։*

Ապացուցվում է, որ այդպիսի եզրային պայմանների դեպքում T^{-1} *օպերատորը լիովին անընդհատ է։ Օգտագործելով ներկա աշխատանքի արդյունքները, կարելի է տալ ալիքատարների տեսության մեջ «անդրադարձման խնդրի»* [1] *լրիվ վերլուծությունը առանց որևէ լրացուցիչ ֆիզիկական ենթադրության։*

G. G. GEBEYAN

ABOUT THE MAXWELL'S OPERATOR IN THE LIMITED DOMAIN WITH CERTAIN BOUNDARY CONDITIONS

Summary

In this paper the Maxwell's operator with self-adjoint and non self-adjoint boundary conditions is studied. The inverse operator's are found and their compactness established. The results obtained are applyed to the „reflection problem" in the waveguide theory [1] when no additional assumption about the damping sorts of oscillations is made.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Г. Джебеян, Э. Р. Цекановский*. Об одной несамосопряженной краевой задаче в теории волноводов, Известия АН Арм.ССР, серия „Математика" 1, № 6, 1966, 359—373.
2. *Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов*. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа, Труды МИАН СССР, 59, 1960, 5—36.
3. *Н. Е. Кочин*. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Издат. Наука, 1965.
4. *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, Издат. Наука, 1964.