И. С. САРГСЯН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ
 ФУНКЦИИ И О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ
 ФУНКЦИЯМ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

В в е д е н и е

1. В релятивистской квантовой теории Дирака волновая функция Ψ удовлетворяет уравнению следующего вида:

$$(p_0 + Vc^{-1} + \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta) \Psi = 0, \quad (0.1)$$

где $V = V(x, y, z)$ — потенциальная функция, c — скорость света,

$$p_0 = i\hbar c^{-1} \frac{\partial}{\partial t}, p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z},$$

$\hbar$ — постоянная Планка, операторы $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ и β удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = 1, \quad \alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = \alpha_x \alpha_z + \alpha_z \alpha_x = \alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y = 0 \\ \beta^2 = m^2 c^2, \quad \alpha_x \beta + \beta \alpha_x = \alpha_y \beta + \beta \alpha_y = \alpha_z \beta + \beta \alpha_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

и, наконец, m — масса частицы. Эти формулы следуют из формулы (19), § 53.1, см. [1], если в последней формуле положить $A=0$ и $e\Phi = V$.

Пусть $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ и β — квадратные матрицы 4×4 . Тогда волновая функция Ψ будет матрицей 4×1 , т. е. является четырехкомпонентной

функцией $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$, $\Psi_k = \Psi_k(x, y, z; t)$, ($k=1, 2, 3, 4$) и, поэтому

уравнение (0.1) эквивалентно системе четырех дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций $\Psi_k(x, y, z; t)$, ($k=1, 2, 3, 4$). Если положим $\Psi = e^{-iW\hbar} X$, где W — энергия, а четырехкомпонентная функция X зависит только от x, y и z , то уравнение (0.1) примет вид

$$\{ (W - V) c^{-1} + \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta \} X = 0, \quad (0.3)$$

где W играет роль параметра собственных значений.

2. Мы будем рассматривать одномерный случай уравнения (0.3), т. е. предположим, что функции V и X зависят только от x . Тогда из уравнения (0.3) следует

$$\{ (W - V) c^{-1} + \alpha_x p_x + \beta \} X = 0, \quad (0.4)$$

где

$$p_x = -i\hbar \frac{d}{dx}, \quad \alpha_x^2 = 1, \quad \beta^2 = m^2 c^2, \quad \alpha_x \beta + \beta \alpha_x = 0. \quad (0.5)$$

В этом случае α_x и β — матрицы 2×2 , а функция X теперь двухкомпонентная и ее можно рассматривать как матрицу 2×1 . Поэтому уравнение (0.4) эквивалентно двум совместным обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка относительно компонент $X_1(x)$ и $X_2(x)$ функции X .

Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\beta}{mc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_1(x) \\ X_2(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда условия (0.5) удовлетворяются, и поэтому уравнение (0.4) в матричной форме можно записать в виде

$$\begin{cases} \{W - V(x)\} c^{-1} X_1(x) - \hbar X_2'(x) + mc X_1(x) = 0 \\ \{W - V(x)\} c^{-1} X_2(x) + \hbar X_1'(x) - mc X_2(x) = 0 \end{cases} \quad (0.6)$$

Теперь, полагая $V(x) - m = p(x)$, $V(x) + m = r(x)$, $W = \lambda$, уравнение (0.6) можно переписать в следующем окончательном виде:*

$$X_2'(x) + p(x) X_1(x) = \lambda X_1(x), \quad (0.7)$$

$$-X_1'(x) + r(x) X_2(x) = \lambda X_2(x). \quad (0.8)$$

Присоединим к системе (0.7) — (0.8) граничное условие

$$X_2(0) - h X_1'(0) = 0, \quad (0.9)$$

где h — произвольное действительное число.

3. Обозначим через $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ решение системы (0.7) — (0.8), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_2(0, \lambda) = h. \quad (0.10)$$

Известно [см. (2)], что при данном h каждой граничной задаче (0.7) + (0.8) + (0.9) соответствует единственная** неубывающая, ограниченная в каждом конечном интервале, непрерывная слева функция $\rho(\lambda)$, ($-\infty < \lambda < +\infty$), порождающая изометрическое отображение пространства с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0, \infty)$ вектор-функций $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in L^2(0, \infty)$,

на пространство $L^2_{\rho(\lambda)}(-\infty, +\infty)$ по формулам

$$\int_0^{\infty} \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\} dx < +\infty,$$

на пространство $L^2_{\rho(\lambda)}(-\infty, +\infty)$ по формулам

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(x) \varphi_1(x, \lambda) + f_2(x) \varphi_2(x, \lambda)\} dx, \quad (0.11)$$

* Здесь предположено, что единицы измерения выбраны так, что скорость света c и постоянная Планка $\hbar$ равны 1.

** Единственность функции $\rho(\lambda)$ доказана Б. М. Левитаном.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \varphi_1(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (0.12)$$

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \varphi_2(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (0.13)$$

где интегралы (0.11) и (0.12)–(0.13) сходятся в метриках пространств $L^2_{(0, \infty)}$ и $L^2(-\infty, +\infty)$ соответственно, и справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda) d\rho(\lambda).$$

Введем следующую терминологию:

а) функцию $\rho(\lambda)$ будем называть спектральной функцией задачи (0.7) + (0.8) + (0.9);

б) матрицу второго порядка $\theta(x, s; \lambda) = \|\theta_{ik}(x, s; \lambda)\|$, ($i, k = 1, 2$), где функции $\theta_{ik}(x, s; \lambda)$ определяются по формулам

$$\theta_{ik}(x, s; \lambda) = \begin{cases} \int_0^{\lambda} \varphi_i(x, \lambda) \varphi_k(s, \lambda) d\rho(\lambda), & \lambda > 0, \\ \int_{-\lambda}^0 \varphi_i(x, \lambda) \varphi_k(s, \lambda) d\rho(\lambda), & \lambda < 0, \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$$

мы будем называть спектральной матрицей задачи (0.7) + (0.8) + (0.9).

В силу первого из условий (0.9) мы имеем

$$\theta_{11}(0, 0; \lambda) = \rho(\lambda) - \rho(0). \quad (0.14)$$

4. Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения спектральной матрицы $\theta(x; s; \lambda) = \|\theta_{ik}(x, s; \lambda)\|$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ и вопросов разложения произвольной вектор-функции $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ в интегрируемый квадрат на полупрямой $(0, \infty)$ по собственным вектор-функциям задачи (0.7) + (0.8) + (0.9), т. е. одномерного оператора Дирака. Метод работы аналогичен методу, разработанному М. Левитаном [3] и В. А. Марченко [4] для уравнения Шредингера. Основные результаты работы изложены в заметках автора [6, 7].

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 0.1. Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ системы (0.7)–(0.8) суммируемы в каждом конечном интервале, то при любых фиксированных x и s справедливы асимптотические формулы

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \theta_{11}(x, s; \lambda) - \theta_{11}(x, s; -\lambda) - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \lambda(x-s)}{x-s} + \frac{\sin \lambda(x+s)}{x+s} \right] \right\} = 0$$

$$+ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin \lambda (x-s)}{x-s} \cdot \sin^2 \left[\frac{1}{4} \int_s^x (p(\tau) + r(\tau)) d\tau \right] \Big\} = 0, \quad (0.15)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \cdot \left\{ \theta_{13}(x, s; \lambda) - \theta_{13}(x, s; -\lambda) - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin \lambda (x-s)}{x-s} \times \right. \\ \left. \times \sin \left[\frac{1}{2} \int_s^x (p(\tau) + r(\tau)) d\tau \right] \right\} = 0, \quad (0.16)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \theta_{21}(x, s; \lambda) - \theta_{21}(x, s; -\lambda) + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin \lambda (x-s)}{x-s} \times \right. \\ \left. \times \sin \left[\frac{1}{2} \int_s^x (p(\tau) + r(\tau)) d\tau \right] \right\} = 0, \quad (0.17)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \theta_{22}(x, s; \lambda) - \theta_{22}(x, s; -\lambda) - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \lambda (x-s)}{x-s} - \frac{\sin \lambda (x+s)}{x+s} \right] + \right. \\ \left. + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin \lambda (x-s)}{x-s} \cdot \sin^2 \left[\frac{1}{4} \int_s^x (p(\tau) + r(\tau)) d\tau \right] \right\} = 0. \quad (0.18)$$

Асимптотические формулы (0.15) — (0.18) имеют место равномерно в каждой конечной области изменения переменных x и s .

Из формулы (0.15) при $x = s = 0$, в силу равенства (0.14), следует

Теорема 0.2. Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ суммируемы в каждом конечном интервале, то имеет место асимптотическая формула

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \left\{ p(\lambda) - p(-\lambda) - \frac{2}{\pi} \lambda \right\} = 0. \quad (0.19)$$

5. Обозначим через $\theta^*(x, s; \lambda) = \|\theta_{ik}^*(x, s; \lambda)\|$, $i, k = 1, 2$, спектральную матрицу задачи (0.7) + (0.8) + (0.9) при $p(x) = r(x) = h = 0$. В этом случае $\varphi_1(x, \lambda) = \cos \lambda x$, $\varphi_2(x, \lambda) = \sin \lambda x$. Поэтому функции $\theta_{ik}^*(x, s; \lambda)$ определяются по формулам

$$\theta_{11}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \cos \mu x \cdot \cos \mu s d\mu, \quad \theta_{12}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \cos \mu x \cdot \sin \mu s d\mu, \\ \theta_{21}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \sin \mu x \cdot \cos \mu s d\mu, \quad \theta_{22}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \sin \mu x \cdot \sin \mu s d\mu.$$

Пусть вектор-функция $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in L^2(0, \infty)$.

Введем обозначения

$$S_1(x, \lambda) = \int_0^\infty \{ f_1(s) \theta_{11}(x, s; \lambda) + f_2(s) \theta_{12}(x, s; \lambda) \} ds,$$

$$S_2(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s) \theta_{21}(x, s; \lambda) + f_2(s) \theta_{22}(x, s; \lambda)\} ds.$$

В силу определения функций $\theta_{lr}(x, s; \lambda)$ и $F(\lambda)$ для $S_1(x, \lambda)$ и $S_2(x, \lambda)$ получим выражения:

$$S_1(x, \lambda) = \int_0^{\lambda} F(\lambda) \varphi_1(x, \lambda) d\rho(\lambda),$$

$$S_2(x, \lambda) = \int_0^{\lambda} F(\lambda) \varphi_2(x, \lambda) d\rho(\lambda).$$

Функции $S_1(x, \lambda)$ и $S_2(x, \lambda)$ являются отрезками разложений, соответственно функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в интеграл Фурье по собственным функциям задачи (0.7)+(0.8)+(0.9).

Аналогично предыдущему, функции

$$S_1^*(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s) \theta_{11}^*(x, s; \lambda) + f_2(s) \theta_{12}^*(x, s; \lambda)\} ds,$$

$$S_2^*(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s) \theta_{21}^*(x, s; \lambda) + f_2(s) \theta_{22}^*(x, s; \lambda)\} ds$$

являются отрезками разложений функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в обычный интеграл Фурье.

Теорема 0.3. Пусть $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in L^2(0, \infty)$. Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ суммируемы в каждом конечном интервале, то при любом фиксированном x справедливы равенства

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \{(S_1(x, \lambda) - S_1(x, -\lambda)) - [S_1^*(x, \lambda) - S_1^*(x, -\lambda)]\} = 0,$$

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \{(S_2(x, \lambda) - S_2(x, -\lambda)) - [S_2^*(x, \lambda) - S_2^*(x, -\lambda)]\} = 0,$$

т. е. разность между разложением вектор-функции $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0, \infty)$ в обобщенный интеграл Фурье по собственным вектор-функциям одномерного оператора Дирака и разложением в обычный интеграл Фурье стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Теорема 0.3 дает окончательное решение вопроса о возможности разложения произвольной вектор-функции с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0, \infty)$ по собственным вектор-функциям одномерного оператора Дирака. В частности, из этой теоремы следует

Теорема 0.4. Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ суммируемы в каждом конечном интервале, и вектор-функция $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ интегрируема с квадратом на полупрямой $(0, \infty)$, т. е.

$$\int_0^{\infty} \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\} dx < +\infty,$$

то в каждой точке, где выполняются локальные условия разложимости вектор-функции $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ в обычный интеграл Фурье, имеют место равенства

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \{S_1(x, \lambda) - S_1(x, -\lambda)\} = f_1(x),$$

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \{S_2(x, \lambda) - S_2(x, -\lambda)\} = f_2(x),$$

т. е. разложение вектор-функции $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in L^2(0, \infty)$ в обобщенный интеграл Фурье по собственным вектор-функциям одномерного оператора Дирака стремится к значению разлагаемой функции.

Приношу глубокую благодарность проф. Б. М. Левитану за постановку задачи, интерес к работе и обсуждение результатов.

§ 1. Решение задачи Коши для одномерной нестационарной системы Дирака

Пусть $p(x)$ и $r(x)$ — вещественные функции, определенные на полупрямой $(0, \infty)$ и суммируемые в каждом конечном интервале. Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\frac{dy_2}{dx} + p(x)y_1 = \lambda y_1, \quad (1.1)$$

$$-\frac{dy_1}{dx} + r(x)y_2 = \lambda y_2, \quad (1.2)$$

$$y_2(0) - hy_1(0) = 0, \quad (1.3)$$

где h — произвольное действительное число.

Изучение асимптотического поведения спектральной функции и вопросов разложения по собственным вектор-функциям задачи (1.1) + (1.2) + (1.3) методами, аналогичными методам Б. М. Левитана и В. А. Марченко, основано на предварительном исследовании задачи Коши для одномерной нестационарной системы Дирака, а именно задачи:

$$i \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + p(x)u_1 = 0, \quad (1.4)$$

$$i \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} + r(x)u_2 = 0, \quad (1.5)$$

$$u_1(x, 0) = f_1(x), \quad u_2(x, 0) = f_2(x), \quad u_2(0, t) = hu_1(0, t), \quad (1.6)$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — вещественные функции, определенные и непрерывно дифференцируемые на полупрямой $(0, \infty)$. Исследование задачи

(1.4)+(1.5)+(1.6) нами проведено в работе [9]. Там выведены явные формулы для решения задачи (1.4)+(1.5)+(1.6), а именно, справедлива

Теорема 1.1. Пусть функции $p(x)$, $r(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют вышеуказанным требованиям. Тогда решения $u(x, t) =$

$\begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}$ задачи (1.4)+(1.5)+(1.6) даются по формулам

I. при $0 < t < x$

$$u_1(x, t) = k(x, t) \{f_1(x+t) + if_2(x+t)\} + l(x, t) \{f_1(x-t) - if_2(x-t)\} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \{K(x, t, s) f_1(s) + L(x, t, s) f_2(s)\} ds, \quad (1.7)$$

$$u_2(x, t) = k(x, t) \{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + l(x, t) \{f_2(x-t) + if_1(x-t)\} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \{M(x, t, s) f_1(s) + N(x, t, s) f_2(s)\} ds; \quad (1.8)$$

II. при $t < 0$, $0 < -t < x$

$$u_1(x, t) = k(x, t) \{f_1(x+t) + if_2(x+t)\} + l(x, t) \{f_1(x-t) - if_2(x-t)\} + \frac{1}{2} \int_{x+t}^{x-t} \{\bar{K}(x, -t, s) f_1(s) + \bar{L}(x, -t, s) f_2(s)\} ds, \quad (1.9)$$

$$u_2(x, t) = k(x, t) \{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + l(x, t) \{f_2(x-t) + if_1(x-t)\} + \frac{1}{2} \int_{x+t}^{x-t} \{\bar{M}(x, -t, s) f_1(s) + \bar{N}(x, -t, s) f_2(s)\} ds, \quad (1.10)$$

где положено

$$k(x, t) = \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{1}{2} i \int_0^t [p(x+\tau) + r(x+\tau)] d\tau \right\}, \quad (1.11)$$

$$l(x, t) = \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{1}{2} i \int_0^t [p(x-\tau) + r(x-\tau)] d\tau \right\}, \quad (1.12)$$

а вектор-функции $\begin{pmatrix} K(x, t, s) \\ L(x, t, s) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} M(x, t, s) \\ N(x, t, s) \end{pmatrix}$ удовлетворяют системе

$$i \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial x} + p(s) w_1 = 0, \quad (1.13)$$

$$i \frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial x} + r(s) w_2 = 0 \quad (1.14)$$

и следующим условиям на характеристиках:

$$K(x, t, x+t) + iL(x, t, x+t) = \frac{1}{2} i \{p(x+t) - r(x+t)\} k(x, t), \quad (1.15)$$

$$K(x, t, x-t) - iL(x, t, x-t) = \frac{1}{2} i \{p(x-t) - r(x-t)\} l(x, t), \quad (1.16)$$

$$N(x, t, x+t) - iM(x, t, x+t) = \frac{1}{2} i \{r(x+t) - p(x+t)\} k(x, t), \quad (1.17)$$

$$N(x, t, x-t) + iM(x, t, x-t) = \frac{1}{2} i \{r(x-t) - p(x-t)\} l(x, t), \quad (1.18)$$

вектор-функции же $\begin{pmatrix} \bar{K}(x, -t, s) \\ \bar{L}(x, -t, s) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \bar{M}(x, -t, s) \\ \bar{N}(x, -t, s) \end{pmatrix}$ также удовлетворяют системе (1.13)+(1.14) и условиям (1.17)+(1.18) и (1.15)+ (1.16), соответственно.

Для решения задачи (1.4)+(1.5)+(1.6) при $0 < x < t$ поступим следующим образом. Продолжим функции $p(x)$ и $r(x)$ на отрицательную полуось с сохранением класса, а в остальном как угодно, а функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — по формулам*:

$$f_1(-x) = \alpha(x)f_1(x) + \beta(x)f_2(x) + \int_0^x \{P(x, s)f_1(s) + R(x, s)f_2(s)\} ds, \quad (1.19)$$

$$f_2(-x) = \alpha(x)f_2(x) - \beta(x)f_1(x) + \int_0^x \{Q(x, s)f_1(s) + H(x, s)f_2(s)\} ds, \quad (1.20)$$

где положено

$$\alpha(x) = \cos \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x [p(\tau) + r(\tau)] d\tau \right\},$$

$$\beta(x) = -\sin \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x [p(\tau) + r(\tau)] d\tau \right\},$$

а функции $P(x, s)$, $R(x, s)$, $\Theta(x, s)$ и $H(x, s)$ удовлетворяют системе:

$$\frac{\partial P(x, s)}{\partial x} + \frac{\partial H(x, s)}{\partial s} = \{r(x) - p(-s)\} Q(x, s),$$

$$\frac{\partial H(x, s)}{\partial x} + \frac{\partial P(x, s)}{\partial s} = \{r(-s) - p(x)\} R(x, s),$$

$$\frac{\partial Q(x, s)}{\partial x} - \frac{\partial R(x, s)}{\partial s} = \{p(-s) - p(x)\} P(x, s),$$

$$\frac{\partial R(x, s)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x, s)}{\partial s} = \{r(x) - r(-s)\} H(x, s)$$

и условиям

$$H(x, x) - P(x, x) = \alpha'(x) - \beta(x) \{p(-x) - r(x)\};$$

* В совместной работе Б. М. Левитана и автора [8] показано, что это продолжение непрерывно вместе с первой производной.

$$R(x, x) + Q(x, x) = -\beta'(x) - \alpha(x) \{r(-x) - r(x)\},$$

$$R(x, 0) - h^*P(x, 0) = 0; H(x, 0) - h^*Q(x, 0) = 0,$$

где $h^* = \frac{f_2(0)}{f_1(0)}$. Если $f_1(0) = 0$, то следует взять $h^* = 0$;

III. При $0 < x < t$ решение задачи (1.4)+(1.5)+(1.6) задается формулами

$$u_1(x, t) = k(x, t) \{f_1(x+t) + if_2(x+t)\} + l_1(x, t) \{f_1(t-x) - if_2(t-x)\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \{K(x, t, s) f_1(s) + L(x, t, s) f_2(s)\} ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{t-x} \{K_1(x, t, s) f_1(s) + L_1(x, t, s) f_2(s)\} ds, \quad (1.21)$$

$$u_2(x, t) = k(x, t) \{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + l_1(x, t) \{f_2(t-x) + if_1(t-x)\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \{M(x, t, s) f_1(s) + N(x, t, s) f_2(s)\} ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{t-x} \{M_1(x, t, s) f_1(s) + N_1(x, t, s) f_2(s)\} ds, \quad (1.22)$$

где

$$l_1(x, t) = \{\alpha(t-x) + i\beta(t-x)\} l(x, t), \quad (1.23)$$

функции $K(x, t, s)$, $L(x, t, s)$, $M(x, t, s)$ и $N(x, t, s)$ имеют те же значения, что и в формулах (1.7) и (1.8), а функции $K_1(x, t, s)$, $L_1(x, t, s)$, $M_1(x, t, s)$ и $N_1(x, t, s)$ определяются следующим образом

$$K_1(x, t, s) = \alpha(s) K(x, t, -s) - \beta(s) L(x, t, -s) + 2l(x, t) [P(t-x, s) -$$

$$- iQ(t-x, s)] + \int_s^{t-x} \{K(x, t, -\tau) P(\tau, s) + L(x, t, -\tau) Q(\tau, s)\} d\tau, \quad (1.24)$$

$$L_1(x, t, s) = \alpha(s) L(x, t, -s) + \beta(s) K(x, t, -s) + 2l(x, t) [R(t-x, s) -$$

$$- iH(t-x, s)] + \int_s^{t-x} \{K(x, t, -\tau) R(\tau, s) + L(x, t, -\tau) H(\tau, s)\} d\tau, \quad (1.25)$$

$$M_1(x, t, s) = \alpha(s) M(x, t, -s) - \beta(s) N(x, t, -s) + 2l(x, t) [Q(t-x, s) +$$

$$+ iP(t-x, s)] + \int_s^{t-x} \{M(x, t, -\tau) P(\tau, s) + N(x, t, -\tau) Q(\tau, s)\} d\tau, \quad (1.26)$$

$$N_1(x, t, s) = \alpha(s) N(x, t, -s) + \beta(s) M(x, t, -s) + 2l(x, t) [H(t-x, s) +$$

$$- iR(t-x, s)] + \int_s^{t-x} \{M(x, t, -\tau) R(\tau, s) + N(x, t, -\tau) H(\tau, s)\} d\tau. \quad (1.27)$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые равенства, которые следуют из условий (1.15)–(1.18). Так, полагая в равенствах (1.15) и (1.16) $t=0$ и учитывая, что при $t=0$ $k(x, 0) = l(x, 0) = \frac{1}{2}$ (см. равенства (1.11) и (1.12)), мы получим

$$K(x, 0, x) = \frac{1}{4} i \{p(x) - r(x)\}, \quad L(x, 0, x) = 0. \quad (1.28)$$

Поступая аналогично, из (1.17) и (1.18) получаем

$$N(x, 0, x) = -\frac{1}{4} i \{p(x) - r(x)\}, \quad M(x, 0, x) = 0. \quad (1.29)$$

Далее, так как вектор-функции $\begin{pmatrix} \tilde{K}(x, -t, s) \\ \tilde{L}(x, -t, s) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \tilde{M}(x, -t, s) \\ \tilde{N}(x, -t, s) \end{pmatrix}$ удовлетворяют условиям (1.17)–(1.18) и (1.15)–(1.16) соответственно, то для них справедливы равенства

$$\tilde{K}(x, 0, x) = -\frac{1}{4} i \{p(x) - r(x)\}, \quad \tilde{L}(x, 0, x) = 0, \quad (1.30)$$

$$\tilde{N}(x, 0, x) = \frac{1}{4} i \{p(x) - r(x)\}, \quad \tilde{M}(x, 0, x) = 0. \quad (1.31)$$

§ 2. Вывод основных тождеств

Мы будем изучать задачу

$$\frac{dy_2}{dx} + p(x)y_1 = iy_1, \quad (2.1)$$

$$-\frac{dy_1}{dx} + r(x)y_2 = iy_2, \quad (2.2)$$

$$y_2(0) - hy_1(0) = 0, \quad (2.3)$$

где $p(x)$ и $r(x)$ — вещественные функции, определенные на полупрямой $(0, \infty)$ и суммируемые в каждом конечном интервале, а h — произвольное число.

Наряду с системой (2.1)+(2.2) рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$i \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + p(x)u_1 = 0, \quad (2.4)$$

$$i \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} + r(x)u_2 = 0. \quad (2.5)$$

Пусть вектор-функция $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ имеет непрерывную первую производную и определена на полупрямой $(0, \infty)$. Обозначим через

$u(x, t; f) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}$ решение системы (2.4) + (2.5), удовлетворяющее начальным условиям

$$u_1(x, 0) = f_1(x), \quad u_2(x, 0) = f_2(x). \quad (2.6)$$

Продолжим функции $p(x)$ и $r(x)$ на всю числовую ось с сохранением класса, а в остальном как угодно и предположим, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют еще условию

$$f_2(0) - h f_1(0) = 0. \quad (2.7)$$

Продолжим функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрицательную полуось по формулам ($x > 0$) [см. формулы (1.19) и (1.20)]:

$$f_1(-x) = \alpha(x) f_1(x) + \beta(x) f_2(x) + \int_{\gamma}^x \{P(x, s) f_1(s) + R(x, s) f_2(s)\} ds, \quad (2.8)$$

$$f_2(-x) = \alpha(x) f_2(x) - \beta(x) f_1(x) + \int_0^x \{Q(x, s) f_1(s) + H(x, s) f_2(s)\} ds. \quad (2.9)$$

Обозначим через $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ решение системы (2.1) + (2.2), удовлетворяющее условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_2(0, \lambda) = h. \quad (2.10)$$

Очевидно, что функция $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ удовлетворяет условию (2.3).

Теперь положим $f_1(x) = \varphi_1(x, \lambda)$, $f_2(x) = \varphi_2(x, \lambda)$ и рассмотрим задачу (2.4) + (2.5) + (2.6). С одной стороны, решение этой задачи дается по формулам (1.7) + (1.8), (1.9) + (1.10) и (1.21) + (1.22) при $0 < t < x$, $0 < -t < x$ и $0 < x < t$, соответственно. С другой стороны, решая задачу (2.4) + (2.5) + (2.6) по методу Фурье, легко убедиться непосредственной проверкой, что решение этой задачи можно задавать по формулам:

$$u_1(x, t) = \varphi_1(x, \lambda) e^{i\lambda t}, \quad (2.11)$$

$$u_2(x, t) = \varphi_2(x, \lambda) e^{i\lambda t}. \quad (2.12)$$

Тогда, в силу единственности решения задачи (2.4) + (2.5) + (2.6), приравняв правые части формул (1.7) + (1.8), (1.9) + (1.10) и (1.21) + (1.22) с правыми частями формул (2.11) + (2.12), соответственно находим тождества:

I. при $0 < t < x$

$$\varphi_1(x, \lambda) e^{i\lambda t} = k(x, t) \{ \varphi_1(x+t, \lambda) + i \varphi_2(x+t, \lambda) \} + l(x, t) \{ \varphi_1(x-t, \lambda) -$$

$$-i\varphi_2(x-t, \lambda)\} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \{K(x, t, s) \varphi_1(s, \lambda) + L(x, t, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, \lambda) e^{i\lambda t} = & k(x, t) \{\varphi_2(x+t, \lambda) - i\varphi_1(x+t, \lambda)\} + l(x, t) \{\varphi_2(x-t, \lambda) + \\ & + i\varphi_1(x-t, \lambda)\} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \{M(x, t, s) \varphi_1(s, \lambda) + N(x, t, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds; \end{aligned} \quad (2.14)$$

II. при $t < 0$, $0 < -t < x$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \lambda) e^{i\lambda t} = & k(x, t) \{\varphi_1(x+t, \lambda) + i\varphi_2(x+t, \lambda)\} + l(x, t) \{\varphi_1(x-t, \lambda) - \\ & - i\varphi_2(x-t, \lambda)\} + \frac{1}{2} \int_{x+t}^{x-t} \{\bar{K}(x, -t, s) \varphi_1(s, \lambda) + \bar{L}(x, -t, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, \lambda) e^{i\lambda t} = & k(x, t) \{\varphi_2(x+t, \lambda) - i\varphi_1(x+t, \lambda)\} + l(x, t) \{\varphi_2(x-t, \lambda) + \\ & + i\varphi_1(x-t, \lambda)\} + \frac{1}{2} \int_{x+t}^{x-t} \{\bar{M}(x, -t, s) \varphi_1(s, \lambda) + \bar{N}(x, -t, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds; \end{aligned} \quad (2.16)$$

III. при $0 < x < t$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \lambda) e^{i\lambda t} = & k(x, t) \{\varphi_1(x+t, \lambda) + i\varphi_2(x+t, \lambda)\} + l_1(x, t) \{\varphi_1(t-x, \lambda) - \\ & - i\varphi_2(t-x, \lambda)\} + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \{K(x, t, s) \varphi_1(s, \lambda) + L(x, t, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{t-x} \{K_1(x, t, s) \varphi_1(s, \lambda) + L_1(x, t, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, \lambda) e^{i\lambda t} = & k(x, t) \{\varphi_2(x+t, \lambda) - i\varphi_1(x+t, \lambda)\} + l_1(x, t) \{\varphi_2(t-x, \lambda) + \\ & + i\varphi_1(t-x, \lambda)\} + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \{M(x, t, s) \varphi_1(s, \lambda) + N(x, t, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{t-x} \{M_1(x, t, s) \varphi_1(s, \lambda) + N_1(x, t, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Обозначим через ε произвольное положительное число и через $g_\varepsilon(t)$ — функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1°. $g_\varepsilon(t)$ четна, т. е. $g_\varepsilon(-t) = g_\varepsilon(t)$;
- 2°. $g_\varepsilon(t)$ обращается в нуль вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$;
- 3°. $g_\varepsilon(t)$ имеет кусочно-непрерывную первую производную.

Далее, обозначим через $\psi_\varepsilon(\lambda)$ преобразование Фурье функции $g_\varepsilon(t)$, т. е. положим

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t) e^{i\lambda t} dt. \quad (2.19)$$

Так как согласно условию 1^o функция $g_\varepsilon(t)$ четная, то из равенства (2.19) следует, что

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t) \cos \lambda t dt. \quad (2.20)$$

Обозначим через x произвольную точку полупрямой $(0, \infty)$.

Предположим, что $x \geq \varepsilon^*$. Умножим обе части тождества (2.13) на функцию $g_\varepsilon(t)$ и проинтегрируем по t в пределах от 0 до ε . Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \lambda) \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) e^{i\lambda t} dt &= \int_0^\varepsilon k(x, t) \{ \varphi_1(x+t, \lambda) + i\varphi_2(x+t, \lambda) \} g_\varepsilon(t) dt + \\ &+ \int_0^\varepsilon l(x, t) \{ \varphi_1(x-t, \lambda) - i\varphi_2(x-t, \lambda) \} g_\varepsilon(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \left\{ \int_{x-t}^{x+t} [K(x, t, s) \varphi_1(s, \lambda) + L(x, t, s) \varphi_2(s, \lambda)] ds \right\} g_\varepsilon(t) dt. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Заменяя переменную в первых двух интегралах и меняя порядок интегрирования в третьем интеграле, тождество (2.21) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \lambda) \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) e^{i\lambda t} dt &= \int_x^{x+\varepsilon} k(x, s-x) g_\varepsilon(s-x) \{ \varphi_1(s, \lambda) + i\varphi_2(s, \lambda) \} ds + \\ &+ \int_{x-\varepsilon}^x l(x, x-s) g_\varepsilon(x-s) \{ \varphi_1(s, \lambda) - i\varphi_2(s, \lambda) \} ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left\{ \int_{|x-s|}^\varepsilon K(x, t, s) g_\varepsilon(t) dt \right\} \varphi_1(s, \lambda) + \\ &+ \left[\int_{|x-s|}^\varepsilon L(x, t, s) g_\varepsilon(t) dt \right] \varphi_2(s, \lambda) \} ds. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Умножая теперь обе части тождества (2.15) на функцию $g_\varepsilon(t)$ и интегрируя по t в пределах от $-\varepsilon$ до 0, а затем поступая так же, как и при получении тождества (2.22), мы находим

* Случай $x < \varepsilon$ изучается аналогично, поэтому мы его рассматривать не будем.

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, \lambda) \int_{-1}^0 g_1(t) e^{i\lambda t} dt &= \int_{x-1}^x k(x, s-x) g_1(s-x) \{\varphi_1(s, \lambda) + i\varphi_2(s, \lambda)\} ds + \\
&+ \int_x^{x+1} l(x, x-s) g_1(x-s) \{\varphi_1(s, \lambda) - i\varphi_2(s, \lambda)\} ds + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \left\{ \int_{|x-s|}^s \tilde{K}(x, t, s) g_1(t) dt \right\} \varphi_1(s, \lambda) + \\
&+ \left[\int_{|x-s|}^s \tilde{L}(x, t, s) g_1(t) dt \right] \varphi_2(s, \lambda) ds. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Суммируя тождества (2.22) и (2.23) и учитывая равенство (2.19), мы получим

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, \lambda) \psi_1(\lambda) &= \int_{x-1}^{x+1} \left\{ [k(x, s-x) + l(x, x-s)] g_1(x-s) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^s [K(x, t, s) + \tilde{K}(x, t, s)] g_1(t) dt \right\} \varphi_1(s, \lambda) ds + \\
&+ \int_{x-1}^{x+1} \{i[k(x, s-x) - l(x, x-s)] g_1(x-s) + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^s [L(x, t, s) + \tilde{L}(x, t, s)] g_1(t) dt\} \varphi_2(s, \lambda) ds. \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Поступая аналогичным образом, из тождеств (2.14) и (2.16) найдем

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x, \lambda) \psi_2(\lambda) &= \int_{x-1}^{x+1} \{ -i[k(x, s-x) - l(x, x-s)] g_1(x-s) + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^s [M(x, t, s) + \tilde{M}(x, t, s)] g_1(t) dt \} \varphi_1(s, \lambda) ds + \\
&+ \int_{x-1}^{x+1} \{ [k(x, s-x) + l(x, x-s)] g_1(x-s) + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^s [N(x, t, s) + \tilde{N}(x, t, s)] g_1(t) dt \} \varphi_2(s, \lambda) ds. \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Для удобства записи введем обозначения:

$$K_i(x, s) = [k(x, s-x) + l(x, x-s)] g_i(x-s) + \\ + \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^x [K(x, t, s) + \tilde{K}(x, t, s)] g_i(t) dt, \quad (2.26)$$

$$L_i(x, s) = i[k(x, s-x) - l(x, x-s)] g_i(x-s) + \\ + \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^x [L(x, t, s) + \bar{L}(x, t, s)] g_i(t) dt, \quad (2.27)$$

$$M_i(x, s) = -i[k(x, s-x) - l(x, x-s)] g_i(x-s) + \\ + \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^x [M(x, t, s) + \bar{M}(x, t, s)] g_i(t) dt, \quad (2.28)$$

$$N_i(x, s) = [k(x, s-x) + l(x, x-s)] g_i(x-s) + \\ + \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^x [N(x, t, s) + \tilde{N}(x, t, s)] g_i(t) dt. \quad (2.29)$$

Тогда тождества (2.24) и (2.25) примут следующий вид:

$$\varphi_1(x, \lambda) \psi_1(\lambda) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \{K_i(x, s) \varphi_1(s, \lambda) + L_i(x, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds, \quad (2.30)$$

$$\varphi_2(x, \lambda) \psi_2(\lambda) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \{M_i(x, s) \varphi_1(s, \lambda) + N_i(x, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds. \quad (2.31)$$

Тождества (2.30) и (2.31) для нас являются основными и в дальнейшем они будут играть важную роль.

§ 3. Предварительная оценка спектральной матрицы

Пусть $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ — произвольная вектор-функция класса $C^2(0, \infty)$, т. е.

$$\int_0^{\infty} \{f_{1_1}^2(x) + f_2^2(x)\} dx < +\infty,$$

пусть вектор-функция $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ по-прежнему является решением задачи

$$\frac{dy_2}{dx} + p(x) y_1 = \lambda y_1, \quad (3.1)$$

$$-\frac{dy_1}{dx} + r(x) y_2 = \lambda y_2, \quad (3.2)$$

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = h. \quad (3.3)$$

Известно [2], что при данном h существует единственная (единственность доказана Б. М. Левитаном) неубывающая, ограниченная в каждом конечном интервале, непрерывная слева функция $\rho(\lambda)$, $-\infty < \lambda < +\infty$, порождающая изометрическое отображение пространства вектор-функций $L^2(0, \infty)$ на пространство $L^2_{\rho(\lambda)}(-\infty, \infty)$ по формулам:

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(x) \varphi_1(x, \lambda) + f_2(x) \varphi_2(x, \lambda)\} dx, \quad (3.4)$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \varphi_1(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (3.5)$$

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \varphi_2(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (3.6)$$

где интегралы (3.4) и (3.5)–(3.6) сходятся в метриках пространств $L^2_{\rho(\lambda)}(-\infty, \infty)$ и $L^2(0, \infty)$, соответственно, и справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda) d\rho(\lambda). \quad (3.7)$$

Пусть $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ и $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} \in L^2(0, \infty)$, а $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ — их преобразования Фурье в смысле (3.4). Легко видеть, что вектор-функции $f(x) \pm g(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \pm g_1(x) \\ f_2(x) \pm g_2(x) \end{pmatrix}$ имеют своими преобразованиями Фурье $F(\lambda) \pm G(\lambda)$. Поэтому в силу равенства Парсеваля (3.7) мы имеем

$$\int_0^{\infty} \{[f_1(x) + g_1(x)]^2 + [f_2(x) + g_2(x)]^2\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda) + G(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda),$$

$$\int_0^{\infty} \{[f_1(x) - g_1(x)]^2 + [f_2(x) - g_2(x)]^2\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda) - G(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda).$$

Вычитая из верхнего равенства нижнее, находим

$$\int_0^{\infty} \{f_1(x) g_1(x) + f_2(x) g_2(x)\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) G(\lambda) d\rho(\lambda). \quad (3.8)$$

Равенство (3.8) будем называть обобщенным равенством Парсеваля. Введем следующую терминологию:

1. Функцию $\rho(\lambda)$ будем называть спектральной функцией задачи (2.1)+(2.2)+(2.3);

2. Матрицу второго порядка

$$\theta(x, s; \lambda) = \begin{pmatrix} \theta_{11}(x, s; \lambda), & \theta_{12}(x, s; \lambda) \\ \theta_{21}(x, s; \lambda), & \theta_{22}(x, s; \lambda) \end{pmatrix},$$

где функции $\theta_{ik}(x, s; \lambda)$, $i, k = 1, 2$ определяются по формулам

$$\theta_{ik}(x, s; \lambda) = \begin{cases} \int_0^\lambda \varphi_i(x, \lambda) \varphi_k(s, \lambda) d\rho(\lambda), & \lambda < 0, \\ \int_{-\lambda}^0 \varphi_i(x, \lambda) \varphi_k(s, \lambda) d\rho(\lambda), & \lambda < 0, \\ 0, & \lambda = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

мы будем называть спектральной матрицей задачи (2.1) + (2.2) + (2.3). Очевидно, что при $x = s = 0$, в силу условия (3.3), мы имеем

$$\theta_{11}(0, 0; \lambda) = \rho(\lambda) - \rho(0). \quad (3.10)$$

В этом параграфе мы получим некоторые оценки для спектральной матрицы $\theta(x, s; \lambda)$.

В предыдущем параграфе мы получили тождества

$$\varphi_1(x, \lambda) \psi_1(\lambda) = \int_{x-1}^{x+s} \{K_1(x, s) \varphi_1(s, \lambda) + L_1(x, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds, \quad (3.11)$$

$$\varphi_2(x, \lambda) \psi_2(\lambda) = \int_{x-1}^{x+s} \{M_1(x, s) \varphi_1(s, \lambda) + N_1(x, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds. \quad (3.12)$$

Тождества (3.11) и (3.12) означают, что для любого $x \geq 0$ функции $\varphi_1(x, \lambda) \psi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(x, \lambda) \psi_2(\lambda)$ являются преобразованиями Фурье вектор-функций, равных $\begin{pmatrix} K_1(x, t, s) \\ L_1(x, t, s) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} M_1(x, t, s) \\ N_1(x, t, s) \end{pmatrix}$, соответственно,

при $|x-s| \leq \varepsilon$ и равных нулю при $|x-s| > \varepsilon$. Поэтому, если $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in L^2(0, \infty)$, то, в силу обобщенного равенства Парсеваля (3.8), из равенств (3.4)—(3.11) и (3.4)—(3.12) соответственно получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x, \lambda) F(\lambda) \psi_1(\lambda) d\rho(\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s) K_1(x, t, s) + f_2(s) L_1(x, t, s)\} ds, \quad (3.13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x, \lambda) F(\lambda) \psi_2(\lambda) d\rho(\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s) M_1(x, t, s) + f_2(s) N_1(x, t, s)\} ds, \quad (3.14)$$

где функции $K_1(x, s)$, $L_1(x, s)$, $M_1(x, s)$ и $N_1(x, s)$ определяются равенствами (2.26), (2.27), (2.28) и (2.29), соответственно.

Лемма 3.1. Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ системы (3.1) + (3.2) суммируемы в каждом конечном интервале, и если (x_0, x_1) — произвольный конечный интервал вещественной оси, то существует постоянная $C = C(x_0, x_1)$ такая, что для любых x и s , принадлежащих интервалу (x_0, x_1) , и для всех a справедливы оценки

$$\int_a^{a-1} \{\theta_{ik}(x, s; \lambda)\} = \int_a^{a+1} |\varphi_i(x, \lambda)| \cdot |\varphi_k(s, \lambda)| d\rho(\lambda) < C, \quad (i, k = 1, 2). \quad (3.15)$$

Оценки (3.15) имеют место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. Пусть функция $g_\varepsilon(t)$ определяется равенством

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2} (\varepsilon - |t|), & |t| \leq \varepsilon, \\ 0, & |t| > \varepsilon. \end{cases} \quad (3.16)$$

Тогда

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t) e^{i\lambda t} dt = \left(\frac{\sin \frac{\varepsilon \lambda}{2}}{\frac{\varepsilon \lambda}{2}} \right)^2. \quad (3.17)$$

Пусть a — произвольное положительное число. Положим

$$g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t) e^{-iat},$$

причем функция $g_\varepsilon(t)$ по-прежнему определяется по формуле (3.16). В таком случае, согласно (3.17), мы имеем

$$\psi_\varepsilon(t, a) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t, a) e^{i\lambda t} dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t) e^{i(\lambda-a)t} dt = \left[\frac{\sin \frac{\varepsilon(\lambda-a)}{2}}{\frac{\varepsilon(\lambda-a)}{2}} \right]^2. \quad (3.18)$$

Поэтому из тождеств (3.11), (3.12) и (3.18), в силу равенства Парсеваля, следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^2(x, \lambda) \left[\frac{\sin \frac{(\lambda-a)\varepsilon}{2}}{\frac{(\lambda-a)\varepsilon}{2}} \right]^4 d\rho(\lambda) = \int_0^{\infty} \{[K_\varepsilon(x, s; a)]^2 + [L_\varepsilon(x, s; a)]^2\} ds, \quad (3.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2^2(x, \lambda) \left[\frac{\sin \frac{(\lambda-a)\varepsilon}{2}}{\frac{(\lambda-a)\varepsilon}{2}} \right]^4 d\rho(\lambda) = \int_0^{\infty} \{[M_\varepsilon(x, s; a)]^2 + [N_\varepsilon(x, s; a)]^2\} ds, \quad (3.20)$$

где функции $K_\varepsilon(x, s; a)$, $L_\varepsilon(x, s; a)$, $M_\varepsilon(x, s; a)$ и $N_\varepsilon(x, s; a)$ определяются по формулам (2.26), (2.27), (2.28) и (2.29), соответственно, в которых функция $g_\varepsilon(t)$ заменена на $g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t) e^{-iat}$. А так как функция $g_\varepsilon(t)$ финитна, то эти функции тоже финитны и, в силу суммируемости функций $p(x)$ и $r(x)$, суммируемы и они. Поэтому интегралы, стоящие в правых частях равенств (3.19) и (3.20), существуют. Тогда из этих равенств при $\varepsilon = 2$ следуют оценки

$$\int_0^{\infty} \varphi_1^2(x, \lambda) \left[\frac{\sin(\lambda - a)}{\lambda - a} \right]^4 d\rho(\lambda) < C,$$

$$\int_0^{\infty} \varphi_2^2(x, \lambda) \left[\frac{\sin(\lambda - a)}{\lambda - a} \right]^4 d\rho(\lambda) < C$$

и, значит, тем более ($a > 0$)

$$\int_a^{a+1} \varphi_1^2(x, \lambda) \frac{\sin^4(\lambda - a)}{(\lambda - a)^4} d\rho(\lambda) < C, \quad (3.21)$$

$$\int_a^{a+1} \varphi_2^2(x, \lambda) \frac{\sin^4(\lambda - a)}{(\lambda - a)^4} d\rho(\lambda) < C. \quad (3.22)$$

Так как для $0 < x < 1$ справедливо неравенство $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$, то из

(3.21) и (3.22) следуют оценки

$$\int_a^{a+1} \varphi_1^2(x, \lambda) d\rho(\lambda) < \frac{\pi^4}{16} C = C_1, \quad (3.23)$$

$$\int_a^{a+1} \varphi_2^2(x, \lambda) d\rho(\lambda) < \frac{\pi^4}{16} C = C_1. \quad (3.24)$$

Оценки (3.23) и (3.24) доказывают лемму для функций $\theta_{11}(x, s; \lambda)$ и $\theta_{22}(x, s; \lambda)$ при $s = x$. Оценки (3.15) для функций $\theta_{11}(x, s; \lambda)$ и $\theta_{22}(x, s; \lambda)$ при $s \neq x$ следует из (3.23) и (3.24) в силу неравенства Коши-Буняковского. Аналогично завершается доказательство леммы для функций $\theta_{12}(x, s; \lambda)$ и $\theta_{21}(x, s; \lambda)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ суммируемы в каждом конечном интервале, то для всех a

$$\rho(a+1) - \rho(a) < C. \quad (3.25)$$

Доказательство леммы следует из оценки (3.23), если в ней положить $x = 0$ и учесть, что $\varphi_1(0, \lambda) = 1$.

§ 4. Асимптотическое поведение спектральной матрицы

Пусть $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ — произвольная вектор-функция из класса $L^2(0, \infty)$, равная нулю вне некоторого конечного интервала. В таком случае ее преобразование Фурье

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(x) \varphi_1(x, \lambda) + f_2(x) \varphi_2(x, \lambda)\} dx \quad (4.1)$$

существует в обычном смысле.

Подставляя выражение $F(\lambda)$ из (4.1) в (3.13) и (3.14), а затем, меняя порядок интегрирования в левых частях этих тождеств, что возможно, в силу оценки (3.25) и теоремы Фубини, получим

$$\int_0^{\infty} \{f_1(s) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x, \lambda) \varphi_1(s, \lambda) \psi_\varepsilon(\lambda) d\rho(\lambda) + f_2(s) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2(s, \lambda) \psi_\varepsilon(\lambda) d\rho(\lambda)\} ds = \int_0^{\infty} \{f_1(s) K_\varepsilon(x, s) + f_2(s) L_\varepsilon(x, s)\} ds, \quad (4.2)$$

$$\int_0^{\infty} \{f_1(s) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x, \lambda) \varphi_1(s, \lambda) \psi_\varepsilon(\lambda) d\rho(\lambda) + f_2(s) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x, \lambda) \varphi_2(s, \lambda) \psi_\varepsilon(\lambda) d\rho(\lambda)\} ds = \int_0^{\infty} \{f_1(s) M_\varepsilon(x, s) + f_2(s) N_\varepsilon(x, s)\} ds. \quad (4.3)$$

Благодаря произвольности вектор-функции $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$, из равенств (4.2) и (4.3) следуют равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x, \lambda) \varphi_1(s, \lambda) \psi_\varepsilon(\lambda) d\rho(\lambda) = K_\varepsilon(x, s), \quad (4.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2(s, \lambda) \psi_\varepsilon(\lambda) d\rho(\lambda) = L_\varepsilon(x, s), \quad (4.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x, \lambda) \varphi_1(s, \lambda) \psi_\varepsilon(\lambda) d\rho(\lambda) = M_\varepsilon(x, s), \quad (4.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x, \lambda) \varphi_2(s, \lambda) \psi_\varepsilon(\lambda) d\rho(\lambda) = N_\varepsilon(x, s), \quad (4.7)$$

где функции $K_\varepsilon(x, s)$, $L_\varepsilon(x, s)$, $M_\varepsilon(x, s)$ и $N_\varepsilon(x, s)$ определяются по формулам (2.26), (2.27), (2.28) и (2.29) соответственно, и как видно из последних формул, все эти функции равны нулю, когда $(x - s) > \varepsilon$. Теперь, полагая

$$K_{\varepsilon}(x, s) = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \{K(x, t, s) + \bar{K}(x, t, s)\} g_{\varepsilon}(t) dt, \quad (4.8)$$

$$L_{\varepsilon}(x, s) = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \{L(x, t, s) + \bar{L}(x, t, s)\} g_{\varepsilon}(t) dt, \quad (4.9)$$

$$M_{\varepsilon}(x, s) = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \{M(x, t, s) + \bar{M}(x, t, s)\} g_{\varepsilon}(t) dt, \quad (4.10)$$

$$N_{\varepsilon}(x, s) = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \{N(x, t, s) + \bar{N}(x, t, s)\} g_{\varepsilon}(t) dt \quad (4.11)$$

и учитывая формулы (2.26), (2.27), (2.28) и (2.29), в силу определения спектральной матрицы $\theta(x, s; \lambda) = |\theta_{ik}(x, s; \lambda)|$, ($i, k = 1, 2$), т. е. выражения (3.9), тождества (4.4)–(4.7) примут вид

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(i) d_{\lambda} \theta_{11}(x, s; \lambda) = \\ [k(x, s-x) + l(x, x-s)] g_{\varepsilon}(x-s) + K_{\varepsilon}(x, s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon, \end{cases} \quad (4.12)$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(i) d_{\lambda} \theta_{12}(x, s; \lambda) = \\ i[k(x, s-x) - l(x, x-s)] g_{\varepsilon}(x-s) + L_{\varepsilon}(x, s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon, \end{cases} \quad (4.13)$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(i) d_{\lambda} \theta_{21}(x, s; \lambda) = \\ -i[k(x, s-x) - l(x, x-s)] g_{\varepsilon}(x-s) + M_{\varepsilon}(x, s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(i) d_{\lambda} \theta_{22}(x, s; \lambda) = \\ [k(x, s-x) + l(x, x-s)] g_{\varepsilon}(x-s) + N_{\varepsilon}(x, s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon. \end{cases} \quad (4.15)$$

Рассмотрим теперь задачу (2.1) + (2.2) + (2.10) при условиях $p(x) = r(x) \equiv 0$ и $h = 0$, т. е. задачу

$$\frac{dy_2}{dx} = \lambda y_1, \quad (4.16)$$

$$-\frac{dy_1}{dx} = \lambda y_2, \quad (4.17)$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0. \quad (4.18)$$

Наша ближайшая цель — выписывать тождества, аналогичные тождествам (4.12) — (4.15), для задачи (4.16) + (4.17) + (4.18). Как легко видеть, в этом случае все функции $K(x, t, s)$, $\bar{K}(x, t, s)$, $L(x, t, s)$, $\bar{L}(x, t, s)$, $M(x, t, s)$, $\bar{M}(x, t, s)$, $N(x, t, s)$ и $\bar{N}(x, t, s)$ тождественно обращаются в нуль. Поэтому в силу равенств (4.8) — (4.11)

$$K_i(x, s) = L_i(x, s) = M_i(x, s) = N_i(x, s) \equiv 0. \quad (4.19)$$

Далее, из определения функций $k(x, t)$ и $l(x, t)$, т. е. равенств (1.11) и (1.72), следует, что при $p(x) = r(x) \equiv 0$

$$k(x, s-x) + l(x, x-s) \equiv 1, \quad (4.20)$$

$$k(x, s-x) - l(x, x-s) \equiv 0. \quad (4.21)$$

И, наконец, так как в этом случае $\varphi_1(x, \lambda) = \cos \lambda x$, $\varphi_2(x, \lambda) = \sin \lambda x$, то спектральная матрица ${}^i\theta^*(x, s; \lambda) = \|\theta_{ik}^*(x, s, \lambda)\|$, ($i, k = 1, 2$) задачи (4.16) + (4.17) + (4.18), согласно (3.9), определяется по формулам

$$\theta_{11}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \cos \mu x \cdot \cos \mu s d\mu, \quad (4.22)$$

$$\theta_{12}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \cos \mu x \cdot \sin \mu s d\mu, \quad (4.23)$$

$$\theta_{21}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \sin \mu x \cdot \cos \mu s d\mu, \quad (4.24)$$

$$\theta_{22}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \sin \mu x \cdot \sin \mu s d\mu. \quad (4.25)$$

Поэтому, в силу равенств (4.19), (4.20) и (4.21), тождества (4.12) — (4.15) для задачи (4.16) + (4.17) + (4.18) соответственно примут вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\lambda) d_\lambda \theta_{11}^*(x, s; \lambda) = \begin{cases} g_s(x-s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon, \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\lambda) d_\lambda \theta_{12}^*(x, s; \lambda) = 0, \quad (4.27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\lambda) d_\lambda \theta_{21}^*(x, s; \lambda) = 0, \quad (4.28)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\lambda) d_\lambda \theta_{22}^*(x, s; \lambda) = \begin{cases} g_s(x-s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon. \end{cases} \quad (4.29)$$

Теперь, вычитая из тождеств (4.12) — (4.15) соответственно тождества (4.26) — (4.29), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\lambda) d_\lambda \{\theta_{11}(x, s; \lambda) - \theta_{11}^*(x, s; \lambda)\} = \begin{cases} [k(x, s-x) + l(x, x-s) - 1] g_1(x-s) + K_1^*(x, s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon, \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\lambda) d_\lambda \{\theta_{12}(x, s; \lambda) - \theta_{12}^*(x, s; \lambda)\} = \begin{cases} i[k(x, s-x) - l(x, x-s)] g_1(x-s) + L_1^*(x, s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon, \end{cases} \quad (4.31)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_3(\lambda) d_\lambda \{\theta_{21}(x, s; \lambda) - \theta_{21}^*(x, s; \lambda)\} = \begin{cases} -i[k(x, s-x) - l(x, x-s)] g_1(x-s) + M_1^*(x, s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon. \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_4(\lambda) d_\lambda \{\theta_{22}(x, s; \lambda) - \theta_{22}^*(x, s; \lambda)\} = \begin{cases} [k(x, s-x) l(x, x-s) - 1] g_1(x-s) + N_1^*(x, s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon. \end{cases} \quad (4.33)$$

Займемся теперь преобразованием правых частей тождеств (4.30) — (4.33). С этой целью положим

$$z_{11}(x, s; \lambda) = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^x \{K(x, t, s) + \bar{K}(x, t, s)\} \cos \lambda t dt, \quad (4.34)$$

$$z_{12}(x, s; \lambda) = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^x \{L(x, t, s) + \tilde{L}(x, t, s)\} \cos \lambda t dt, \quad (4.35)$$

$$z_{21}(x, s; \lambda) = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^x \{M(x, t, s) + \bar{M}(x, t, s)\} \cos \lambda t dt, \quad (4.36)$$

$$z_{22}(x, s; \lambda) = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^x \{N(x, t, s) + \bar{N}(x, t, s)\} \cos \lambda t dt. \quad (4.37)$$

С другой стороны, согласно формуле (2.20), имеем

$$\psi_1(\lambda) = \int_{-i}^i g_1(t) \cos \lambda t dt. \quad (4.38)$$

Тогда в силу равенства Парсеваля для cos-преобразований Фурье из равенств (4.34) — (4.37) и (4.38) соответственно получим (см. также формулы (4.8) — (4.11))

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\lambda) z_{11}(x, s; \lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^x \{K(x, t, s) + \bar{K}(x, t, s)\} g_{\varepsilon}(t) dt = K_{\varepsilon}^{\pm}(x, s), \quad (4.39)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\lambda) z_{12}(x, s; \lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^x \{L(x, t, s) + \bar{L}(x, t, s)\} g_{\varepsilon}(t) dt = L_{\varepsilon}^{\pm}(x, s), \quad (4.40)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\lambda) z_{21}(x, s; \lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^x \{M(x, t, s) + \bar{M}(x, t, s)\} g_{\varepsilon}(t) dt = M_{\varepsilon}^{\pm}(x, s), \quad (4.41)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\lambda) z_{22}(x, s; \lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^x \{N(x, t, s) + \bar{N}(x, t, s)\} g_{\varepsilon}(t) dt = N_{\varepsilon}^{\pm}(x, s). \quad (4.42)$$

Далее, обращая формулу (4.38), получим

$$g_{\varepsilon}(x-s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\lambda) \cos \lambda(x-s) d\lambda. \quad (4.43)$$

На основании (4.39) — (4.43) тождества (4.30) — (4.33) соответственно примут окончательный вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\lambda) d\lambda \Phi_{11}(x, s; \lambda) = 0, \quad (4.44)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\lambda) d\lambda \Phi_{12}(x, s; \lambda) = 0, \quad (4.45)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\lambda) d\lambda \Phi_{21}(x, s; \lambda) = 0, \quad (4.46)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\lambda) d\lambda \Phi_{22}(x, s; \lambda) = 0, \quad (4.47)$$

где положено

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(x, s; \lambda) &= \theta_{11}(x, s; \lambda) - \theta_{11}^*(x, s; \lambda) - \\ &- \{k(x, s-x) + l(x, x-s)\} \frac{\sin \lambda(x-s)}{\pi(x-s)} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} z_{11}(x, s; \nu) d\nu, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{12}(x, s; \lambda) &= \theta_{12}(x, s; \lambda) - \theta_{12}^*(x, s; \lambda) - \\ &- i \{k(x, s-x) - l(x, x-s)\} \frac{\sin \lambda(x-s)}{\pi(x-s)} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} z_{12}(x, s; \nu) d\nu, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{21}(x, s; \lambda) &= \theta_{21}(x, s; \lambda) - \theta_{21}^*(x, s; \lambda) + \\ &+ i \{k(x, s-x) - l(x, x-s)\} \frac{\sin \lambda(x-s)}{\pi(x-s)} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} z_{21}(x, s; \nu) d\nu, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{22}(x, s; \lambda) &= \theta_{22}(x, s; \lambda) - \theta_{22}^*(x, s; \lambda) - \\ &- \{k(x, s-x) + l(x, x-s) - 1\} \frac{\sin \lambda(x-s)}{\pi(x-s)} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} z_{22}(x, s; \nu) d\nu. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Тождества (4.44)–(4.47) и тауберова теорема для интегралов Фурье В. А. Марченко [5] дают возможность изучить поведение функций $\theta_{ik}(x, s; \lambda)$, ($i, k = 1, 2$) при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 4.1. Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ системы (3.1) + (3.2) суммируемы в каждом конечном интервале, то при любых фиксированных x и s и для всех d справедливы оценки

$$\bigvee_a^{a+1} \{|\Phi_{ik}(x, s; \lambda)|\} < C \quad (i, k = 1, 2). \quad (4.52)$$

Оценки (4.52) имеют место равномерно в каждой конечной области изменения переменных x и s .

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно получить оценку (4.52) для каждого члена входящих в выражения функций $\Phi_{ik}(x, s; \lambda)$, т. е. в правых частях равенств (4.48)–(4.51). Для функций $\theta_{ik}(x, s; \lambda)$ ($i, k = 1, 2$) оценка (4.52) совпадает с оценкой (3.15). Для функций $\theta_{ik}^*(x, s; \lambda)$ оценка (4.52) получается непосредственно, если учесть явный вид этих функций, т. е. равенства (4.22)–(4.25). Далее из определения функций $z_{ik}(x, s; \lambda)$ ($i, k = 1, 2$), т. е. равенств (4.34)–(4.37), в силу непрерывности функций $K(x, t, s)$, $\bar{K}(x, t, s)$, $L(x, t, s)$, $\bar{L}(x, t, s)$, $M(x, t, s)$, $\bar{M}(x, t, s)$, $N(x, t, s)$, $\bar{N}(x, t, s)$ и известной леммы Римана-Лебега следует, что в каждой конечной области изменения переменных x и s справедливы равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} z_{ik}(x, s; \lambda) = 0 \quad (i, k = 1, 2).$$

Поэтому при $a \rightarrow +\infty$

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \int_0^{\lambda} z_{ik}(x, s; \nu) d\nu \right\} = o(1) \quad (i, k = 1, 2). \quad (4.53)$$

И, наконец, для остальных членов в равенствах (4.48)–(4.51) (по одному члену в каждом равенстве) оценка (4.52) получается непосредственно, если учесть явный вид этих членов. Лемма доказана.

Лемма 4.2. При любых фиксированных x и s справедливы равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} a_{ik}(x, s; \nu) d\nu = 0 \quad (i, k = 1, 2). \quad (4.54)$$

Равенства (4.54) имеют место равномерно в каждой конечной области изменения переменных x и s .

Доказательство. Докажем равенство (4.54) сначала для функции $a_{11}(x, s; \nu)$. В силу определения этой функции, т. е. равенства (4.34), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda} a_{11}(x, s; \nu) d\nu &= \int_0^{\lambda} \left\{ \int_{|x-s|}^{\nu} [K(x, t, s) + \bar{K}(x, t, s)] \cos \nu t dt \right\} d\nu = \\ &= \int_{|x-s|}^{\lambda} [K(x, t, s) + \bar{K}(x, t, s)] \frac{\sin \lambda t}{t} dt. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Поэтому при $s \neq x$ лемма следует из (4.55), в силу леммы Римана — Лебега. Если $s = x$, то

$$\int_0^{\lambda} a_{11}(x, x; \nu) d\nu = \int_0^{\lambda} [K(x, t, x) + \bar{K}(x, t, x)] \frac{\sin \lambda t}{t} dt. \quad (4.56)$$

Далее, согласно равенствам (1.28) и (1.30), мы имеем

$$K(x, 0, x) + \bar{K}(x, 0, x) = 0. \quad (4.57)$$

Тогда, так как функция $K(x, t, x) + \bar{K}(x, t, x)$ дифференцируема по t , то в силу равенства (4.57)

$$K(x, t, x) + \bar{K}(x, t, x) = O(t). \quad (4.58)$$

Поэтому в этом случае равенство (4.54) является следствием из известной теоремы теории рядов Фурье: если при $t \rightarrow 0$, $\varphi(t) - \varphi(0) = O(t^\alpha)$, $\alpha > 0$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} \varphi(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \varphi(0). \quad (4.59)$$

Доказательство леммы для функций $a_{12}(x, s; \nu)$, $a_{21}(x, s; \nu)$ и $a_{22}(x, s; \nu)$ проводится аналогично, в силу равенств (1.28) — (1.32), которые обеспечивают выполнение равенства (4.57) для соответствующих ядер в представлениях этих функций в виде (4.56).

Теперь докажем основную теорему этого параграфа.

Теорема 4.1. Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ системы (3.1) + (3.2) суммируемы в каждом конечном интервале, то при любых фиксированных x и s справедливы асимптотические формулы

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \theta_{11}(x, s; \lambda) - \theta_{11}(x, s; -\lambda) - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \lambda (x+s)}{x+s} + \frac{\sin \lambda (x-s)}{x-s} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin \lambda (x-s)}{x-s} \cdot \sin^2 \left[\frac{1}{4} \int_s^x (p(\tau) + r(\tau)) d\tau \right] \Big\} = 0. \quad (4.60)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \theta_{12}(x, s; \lambda) - \theta_{12}(x, s; -\lambda) - \frac{2}{\pi} \frac{\sin \lambda (x-s)}{x-s} \times \right. \\ \left. \times \sin \left[\frac{1}{2} \int_s^x (p(\tau) + r(\tau)) d\tau \right] \right\} = 0, \quad (4.61)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \theta_{21}(x, s; \lambda) - \theta_{21}(x, s; -\lambda) + \frac{2}{\pi} \frac{\sin \lambda (x-s)}{x-s} \times \right. \\ \left. \times \sin \left[\frac{1}{2} \int_s^x p(\tau) + r(\tau) d\tau \right] \right\} = 0, \quad (4.62)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \theta_{22}(x, s; \lambda) - \theta_{22}(x, s; -\lambda) + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \lambda (x+s)}{x+s} - \frac{\sin \lambda (x-s)}{x-s} \right] + \right. \\ \left. + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin \lambda (x-s)}{x-s} \cdot \sin^2 \left[\frac{1}{4} \int_s^x (p(\tau) + r(\tau)) d\tau \right] \right\} = 0. \quad (4.63)$$

Асимптотические формулы (4.60)–(4.63) имеют место равномерно в каждой конечной области изменения переменных x и s .

Доказательство. В силу оценок (4.52) и тождеств (4.44) – (4.47) применима тауберова теорема для интегралов Фурье В. А. Марченко [5], согласно которой равномерно в каждой конечной области изменения переменных x и s справедливы равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{ \Phi_{ik}(x, s; \lambda) - \Phi_{ik}(x, s; -\lambda) \} = 0 \quad (i, k = 1, 2). \quad (4.64)$$

Докажем формулу (4.60). Остальные доказываются аналогично. Из определения функции $\Phi_{11}(x, s; \lambda)$, т. е. равенства (4.48), следует, что

$$\Phi_{11}(x, s; \lambda) - \Phi_{11}(x, s; -\lambda) = \theta_{11}(x, s; \lambda) - \theta_{11}(x, s; -\lambda) - [\theta_{11}^*(x, s; \lambda) - \theta_{11}^*(x, s; -\lambda)] - \frac{2}{\pi} [k(x, s-x) + \dots - \frac{\sin \lambda (x-s)}{x-s} - \frac{2}{\pi} \int_0^\lambda \alpha_{11}(x, s; \nu) d\nu]. \quad (4.65)$$

Вычислим теперь каждый член правой части равенства (4.65). Из определения функции $\theta_{11}^*(x, s; \lambda)$, т. е. из равенства (4.22), следует

$$\theta_{11}^*(x, s; \lambda) - \theta_{11}^*(x, s; -\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\lambda \cos \lambda x \cdot \cos \lambda s d\lambda = \\ = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \lambda (x+s)}{x+s} + \frac{\sin \lambda (x-s)}{x-s} \right]. \quad (4.66)$$

Далее из определения функций $k(x, t)$ и $l(x, t)$, т. е. из равенств (1.11) и (1.12), следует

$$k(x, s-x) + l(x, x-s) = \cos \left\{ \frac{1}{2} \int_s^x [p(\tau) + r(\tau)] d\tau \right\},$$

поэтому

$$-\frac{2}{\pi} [k(x, s-x) + l(x, x-s) - 1] = \frac{4}{\pi} \sin^2 \left\{ \frac{1}{4} \int_s^x [p(\tau) + r(\tau)] d\tau \right\}. \quad (4.67)$$

И так как в силу леммы 4.2

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\lambda a_{11}(x, s; \nu) d\nu = 0,$$

то формула (4.60) следует из (4.64) (при $i = k = 1$), в силу равенств (4.65), (4.66) и (4.67). Теорема доказана.

Из теоремы 4.1, точнее из формулы (4.60), следует

Теорема 4.2. *Имеет место асимптотическая формула*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \rho(\lambda) - \rho(-\lambda) - \frac{2}{\pi} \lambda \right\} = 0. \quad (4.68)$$

В самом деле, полагая в формуле (4.60) $x = s = 0$, мы получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \theta_{11}(0, 0; \lambda) - \theta_{11}(0, 0; -\lambda) - \frac{2}{\pi} \lambda \right\} = 0,$$

что совпадает с формулой (4.68), так как в силу равенств (3.10)

$$\theta_{11}(0, 0; \lambda) = \rho(\lambda) - \rho(0).$$

Теорема доказана.

§ 5. Некоторые предварительные оценки

В следующем параграфе мы докажем теорему о равносходимости разложения произвольной вектор-функции $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0, \infty)$ по собственным вектор-функциям задачи

$$\frac{dy_2}{dx} + p(x)y_1 = \lambda y_1, \quad (5.1)$$

$$-\frac{dy_1}{dx} + r(x)y_2 = \lambda y_2, \quad (5.2)$$

$$y_2(0) - h y_1(0) = 0 \quad (5.3)$$

и разложения в обычный интеграл Фурье, притом при минимальном требовании на коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ — суммируемости в каждом конечном интервале. Для этого мы в настоящем параграфе получим

некоторые предварительные оценки для отрезков разложений по собственным функциям.

В параграфе 2 нами получены тождества (см. (2.30) и (2.31):

$$\varphi_1(x, \lambda) \psi_1(\lambda) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \{K_1(x, s) \varphi_1(s, \lambda) + L_1(x, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds, \quad (5.4)$$

$$\varphi_2(x, \lambda) \psi_2(\lambda) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \{M_1(x, s) \varphi_1(s, \lambda) + N_1(x, s) \varphi_2(s, \lambda)\} ds, \quad (5.5)$$

где вектор-функция $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$, как и прежде, означает решение системы (5.1)+(5.2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_2(0, \lambda) = h, \quad (5.3')$$

а функции $K_1(x, s)$, $L_1(x, s)$, $M_1(x, s)$ и $N_1(x, s)$ определяются по формулам (2.26), (2.27), (2.28) и (2.29), соответственно.

Пусть $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ — произвольная вектор-функция класса $L^2(0, \infty)$.

Обозначим через $F(\lambda)$ обобщенное преобразование Фурье вектор-функции $f(x)$, т. е. положим

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(x) \varphi_1(x, \lambda) + f_2(x) \varphi_2(x, \lambda)\} dx. \quad (5.6)$$

Из тождеств (5.4) и (5.5) следует, что функции $\varphi_1(x, \lambda) \psi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(x, \lambda) \psi_2(\lambda)$ при каждом фиксированном x являются обобщенными преобразованиями Фурье соответственно вектор-функций, равных $\begin{pmatrix} K_1(x, t, s) \\ L_1(x, t, s) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} M_1(x, t, s) \\ N_1(x, t, s) \end{pmatrix}$ при $x - \varepsilon \leq s \leq x + \varepsilon$ и равных нулю вне этого интервала. Поэтому, в силу обобщенного равенства Парсеваля (3.8), из тождеств (5.4)–(5.5) и равенства (5.6) соответственно следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x, \lambda) F(\lambda) \psi_1(\lambda) d\rho(\lambda) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \{K_1(x, s) f_1(s) + L_1(x, s) f_2(s)\} ds, \quad (5.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x, \lambda) F(\lambda) \psi_2(\lambda) d\rho(\lambda) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \{M_1(x, s) f_1(s) + N_1(x, s) f_2(s)\} ds. \quad (5.8)$$

Введем в рассмотрение функции

$$S_1(x, \lambda) = \int_0^{\infty} F(\lambda) \varphi_1(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (5.9)$$

$$S_2(x, \lambda) = \int_0^{\infty} F(\lambda) \varphi_2(x, \lambda) d\rho(\lambda). \quad (5.10)$$

Тогда равенства (5.7) и (5.8) примут вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\lambda) d\lambda S_1(x, \lambda) = \int_{x-a}^{x+a} \{K_1(x, s) f_1(s) + L_1(x, s) f_2(s)\} ds, \quad (5.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\lambda) d\lambda S_2(s, \lambda) = \int_{x-a}^{x+a} \{M_1(x, s) f_1(s) + N_1(x, s) f_2(s)\} ds. \quad (5.12)$$

Выпишем формулы, аналогичные формулам (5.11) и (5.12), для задачи (5.1) + (5.2) + (5.3) при $p(x) = r(x) \equiv 0$ и $h = 0$. С этой целью найдем новые представления для функций $S_1(x, \lambda)$ и $S_2(x, \lambda)$. Подставляя значение функций $F(\lambda)$ из (5.6) в выражения (5.9) и (5.10), а затем меняя порядок интегрирования, получим

$$S_1(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s) \int_0^{\lambda} \varphi_1(x, \lambda) \varphi_1(s, \lambda) d\rho(\lambda) + f_2(s) \int_0^{\lambda} \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2(x, \lambda) d\rho(\lambda)\} ds, \quad (5.13)$$

$$S_2(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s) \int_0^{\lambda} \varphi_2(x, \lambda) \varphi_1(s, \lambda) d\rho(\lambda) + f_2(s) \int_0^{\lambda} \varphi_2(x, \lambda) \varphi_2(s, \lambda) d\rho(\lambda)\} ds. \quad (5.14)$$

Тогда, в силу определения спектральной матрицы $\theta(x, s; \lambda) = \|\theta_{ik}(x, s; \lambda)\|$, $i, k = 1, 2$ (см. равенства (3.9)), равенства (5.13) и (5.4) приобретают вид

$$S_1(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s) \theta_{11}(x, s; \lambda) + f_2(s) \theta_{12}(x, s; \lambda)\} ds, \quad (5.15)$$

$$S_2(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s) \theta_{21}(x, s; \lambda) + f_2(s) \theta_{22}(x, s; \lambda)\} ds. \quad (5.16)$$

Положим

$$S_1^*(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s) \theta_{11}^*(x, s; \lambda) + f_2(s) \theta_{12}^*(x, s; \lambda)\} ds, \quad (5.17)$$

$$S_2^*(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s) \theta_{21}^*(x, s; \lambda) + f_2(s) \theta_{22}^*(x, s; \lambda)\} ds. \quad (5.18)$$

Далее, если учесть, что при $p(x) = r(x) \equiv 0$ и $k = 0$ (см. вывод тождеств (4.26) — (4.29)), в силу равенств (4.19) — (4.21) $K_1(x, s) = N_1(x, s) = g_1(x-s)$, а $L_1(x, s) = M_1(x, s) = 0$, то в рассматриваемом случае равенства (5.11) и (5.12) соответственно примут вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\lambda) d\lambda S_1^*(x, \lambda) = \int_{x-1}^{x+1} f_1(s) g_1(x-s) ds, \quad (5.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\lambda) d\lambda S_2^*(x, \lambda) = \int_{x-1}^{x+1} f_2(s) g_2(x-s) ds. \quad (5.20)$$

Теперь, вычитая из равенств (5.11) и (5.12) соответственно равенства (5.19) и (5.20), окончательно получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\lambda) d\lambda \{S_1(x, \lambda) - S_1^*(x, \lambda)\} = \int_{x-1}^{x+1} \{[K_1(x, s) - g_1(x-s)] f_1(s) + L_1(x, s) f_2(s)\} ds, \quad (5.21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\lambda) d\lambda \{S_2(x, \lambda) - S_2^*(x, \lambda)\} = \int_{x-1}^{x+1} \{M_2(x, s) f_1(s) + [N_2(x, s) - g_2(x-s)] f_2(s)\} ds. \quad (5.22)$$

Лемма 5.1. Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ системы (5.1) + (5.2) суммируемы в каждом конечном интервале, то при любом фиксированном x и при $a \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\bigvee_a^{a+1} \{S_i(x, \lambda)\} = \int_a^{a+1} |\varphi_i(x, \lambda)| \cdot |F(\lambda)| d\rho(\lambda) = o(1) \quad (i=1, 2). \quad (5.23)$$

Оценки (5.23) имеют место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. В силу определения функций $S_1(x, \lambda)$, т. е. равенств (5.9) и (5.10), мы имеем

$$\bigvee_a^{a+1} \{S_i(x, \lambda)\} = \int_a^{a+1} |\varphi_i(x, \lambda)| \cdot |F(\lambda)| d\rho(\lambda) \quad (i=1, 2).$$

Поэтому согласно неравенству Коши-Буняковского, из последнего равенства следует

$$\bigvee_a^{a+1} \{S_i(x, \lambda)\} = \left(\int_a^{a+1} |\varphi_i(x, \lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{1/2} \left(\int_a^{a+1} |F(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right)^{1/2} \quad (i=1, 2). \quad (5.24)$$

Теперь, с одной стороны, согласно лемме 3.1

$$\int_a^{a+1} |\varphi_i(x, \lambda)|^2 d\rho(\lambda) = \bigvee_a^{a+1} \{\theta_{ii}(x, x; \lambda)\} < C \quad (i=1, 2). \quad (5.25)$$

С другой стороны, так как (см. равенство (3.7))

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda) d\rho(\lambda) < +\infty,$$

то при $a \rightarrow \infty$

$$\int_a^{a+1} F^2(\lambda) d\rho(\lambda) = o(1). \quad (5.26)$$

Поэтому оценки (5.23) следуют из неравенств (5.24), в силу оценок (5.25) и (5.26). Лемма доказана.

Из определения функций $S_1^*(x, \lambda)$ и $S_2^*(x, \lambda)$, т. е. равенств (5.17) и (5.18) и из явного вида функций $\theta_{ik}^*(x, s; \lambda)$ (см. формулы (4.22) — (4.25) непосредственно следует

Лемма 5.2. *Равномерно на всей полупрямой $(0, \infty)$ при $a \rightarrow \infty$ справедливы оценки*

$$\bigvee_a^{a+1} \{S_i^*(x, \lambda)\} = o(1) \quad (i = 1, 2). \quad (5.27)$$

§ 6. Доказательство теоремы равносходимости

Опираясь на формулы (5.21) и (5.22) и на тауберову теорему В. А. Марченко [5], в настоящем параграфе мы дадим полное доказательство теоремы о равносходимости разложений по собственным функциям задачи (5.1) + (5.2) + (5.3) и в обычный интеграл Фурье по косинусам и синусам для произвольных вектор-функций с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0, \infty)$.

Обозначим через x произвольную точку полупрямой $(0, \infty)$.

Займемся сначала преобразованием правых частей формул (5.21) и (5.22). Функции $K_1(x, s)$, $L_1(x, s)$, $M_1(x, s)$ и $N_1(x, s)$, входящие в правые части формул (5.21) и (5.22), определяются по формулам (2.26), (2.27), (2.28) и (2.29) соответственно. Поэтому, подставляя их выражения в (5.21) и (5.22), получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\lambda) d_i \{S_1(x, \lambda) - S_1^*(x, \lambda)\} = \\ & = \int_{x-s}^{x+s} [k(x, s-x) + l(x, x-s) - 1] g_2(x-s) f_1(s) ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x-s}^{x+s} \left\{ \int_{|x-s|}^x [K(x, t, s) + \bar{K}(x, t, s)] g_2(t) dt \right\} f_1(s) ds + \\ & + i \int_{x-s}^{x+s} [k(x, s-x) - l(x, x-s)] g_2(x-s) f_2(s) ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x-s}^{x+s} \left\{ \int_{|x-s|}^x [L(x, t, s) + \tilde{L}(x, t, s)] g_2(t) dt \right\} f_2(s) ds, \quad (6.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\lambda) d_\lambda \{S_2(x, \lambda) - S_2^*(x, \lambda)\} = \\
& = -i \int_{x-s}^{x+s} [k(x, s-x) - l(x, x-s)] g_1(x-s) f_1(s) ds + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x-s}^{x+s} \left\{ \int_{|x-s|}^s [M(x, t, s) + \bar{M}(x, t, s)] g_0(t) dt \right\} f_1(s) ds + \\
& + \int_{x-s}^{x+s} [k(x, s-x) + l(x, x-s) - 1] g_1(x-s) f_2(s) ds + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x-s}^{x+s} \left\{ \int_{|x-s|}^s [N(x, t, s) + \bar{N}(x, t, s)] g_2(t) dt \right\} f_2(s) ds. \quad (6.2)
\end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования в двукратных интегралах правых частей (6.1) с (6.2), мы находим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{x-s}^{x+s} f_1(s) \left\{ \int_{|x-s|}^s [K(x, t, s) + \bar{K}(x, t, s)] g_2(t) dt \right\} ds = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^s \left\{ \int_{x-t}^{x+t} [K(x, t, s) + \bar{K}(x, t, s)] f_1(s) ds \right\} g_2(t) dt, \quad (6.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{x-s}^{x+s} f_2(s) \left\{ \int_{|x-s|}^s [L(x, t, s) + \bar{L}(x, t, s)] g_2(t) dt \right\} ds = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^s \left\{ \int_{x-t}^{x+t} [L(x, t, s) + \bar{L}(x, t, s)] f_2(s) ds \right\} g_2(t) dt, \quad (6.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{x-s}^{x+s} f_1(s) \left\{ \int_{|x-s|}^s [M(x, t, s) + \bar{M}(x, t, s)] g_1(t) dt \right\} ds = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^s \left\{ \int_{x-t}^{x+t} [M(x, t, s) + \bar{M}(x, t, s)] f_1(s) ds \right\} g_1(t) dt, \quad (6.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{x-s}^{x+s} f_2(s) \left\{ \int_{|x-s|}^s [N(x, t, s) + \bar{N}(x, t, s)] g_1(t) dt \right\} ds = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^s \left\{ \int_{x-t}^{x+t} [N(x, t, s) + \bar{N}(x, t, s)] f_2(s) ds \right\} g_1(t) dt. \quad (6.6)
\end{aligned}$$

Далее положим

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, \lambda) &= \int_0^x \left\{ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} [K(x, t, s) + \bar{K}(x, t, s)] f_1(s) ds \right\} \cos \lambda t dt = \\ &= \int_0^x h_1(x, t) \cos \lambda t dt, \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(x, \lambda) &= \int_0^x \left\{ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} [L(x, t, s) + \bar{L}(x, t, s)] f_2(s) ds \right\} \cos \lambda t dt = \\ &= \int_0^x h_2(x, t) \cos \lambda t dt, \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3(x, \lambda) &= \int_0^x \left\{ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} [M(x, t, s) + \bar{M}(x, t, s)] f_1(s) ds \right\} \cos \lambda t dt = \\ &= \int_0^x h_3(x, t) \cos \lambda t dt, \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \alpha_4(x, \lambda) &= \int_0^x \left\{ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} [N(x, t, s) + \bar{N}(x, t, s)] f_2(s) ds \right\} \cos \lambda t dt = \\ &= \int_0^x h_4(x, t) \cos \lambda t dt. \end{aligned} \quad (6.10)$$

С другой стороны, в силу (2.20) мы имеем

$$\frac{1}{2} \psi_i(\lambda) = \int_0^x g_i(t) \cos \lambda t dt. \quad (6.11)$$

Поэтому, применяя равенство Парсеваля для обычных интегралов Фурье к каждому из равенств (6.7)–(6.10) и равенству (6.11), соответственно получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\lambda) \alpha_i(x, \lambda) d\lambda = \int_0^x h_i(x, t) g_i(t) dt \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (6.12)$$

И, наконец, полагая

$$\begin{aligned} \beta_1(x, \lambda) &= \int_{-x}^x [k(x, -t) + l(x, t) - 1] f_1(x-t) \cos \lambda t dt = \\ &= \int_{-x}^x \chi_1(x, t) \cos \lambda t dt, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned}\beta_2(x, i) &= \int_{-i}^i i [k(x, -t) - l(x, t)] f_2(x-t) \cos \lambda t dt = \\ &= \int_{-i}^i \gamma_2(x, t) \cos \lambda t dt,\end{aligned}\quad (6.14)$$

$$\begin{aligned}\beta_3(x, i) &= -i \int_{-i}^i [k(x, -t) - l(x, t)] f_1(x-t) \cos \lambda t dt = \\ &= \int_{-i}^i \gamma_3(x, t) \cos \lambda t dt,\end{aligned}\quad (6.15)$$

$$\begin{aligned}\beta_4(x, i) &= \int_{-i}^i [k(x, -t) + l(x, t) - 1] f_2(x-t) \cos \lambda t dt = \\ &= \int_{-i}^i \gamma_4(x, t) \cos \lambda t dt,\end{aligned}\quad (6.16)$$

и применяя опять равенство Парсеваля к каждому из равенств (6.13)—(6.16) и равенству (6.11), соответственно, получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\lambda) \beta_i(x, \lambda) d\lambda = \int_{-i}^i \gamma_i(x, t) g_i(t) dt \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (6.17)$$

Теперь, учитывая равенства (6.3)—(6.10) и (6.12)—(6.17), формулы (6.1) и (6.2) можно, соответственно, записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\lambda) d\lambda R_1(x, \lambda) = 0, \quad (6.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\lambda) d\lambda R_2(x, \lambda) = 0, \quad (6.19)$$

где

$$\begin{aligned}R_1(x, \lambda) &= S_1(x, \lambda) - S_1^*(x, \lambda) - \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \beta_1(x, \nu) d\nu - \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \alpha_1(x, \nu) d\nu - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \beta_2(x, \nu) d\nu - \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \alpha_2(x, \nu) d\nu,\end{aligned}\quad (6.20)$$

$$\begin{aligned}R_2(x, \lambda) &= S_2(x, \lambda) - S_2^*(x, \lambda) - \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \beta_3(x, \nu) d\nu - \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \alpha_3(x, \nu) d\nu - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \beta_4(x, \nu) d\nu - \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \alpha_4(x, \nu) d\nu.\end{aligned}\quad (6.21)$$

Докажем несколько лемм.

Лемма 6.1. При каждом фиксированном x и при $a \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\bigvee_a^{a+1} \{R_i(x, \lambda)\} = o(1) \quad (i=1, 2). \quad (6.22)$$

Оценки (6.22) имеют место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. Так как вариация суммы функций не превосходит суммы вариаций слагаемых, то для доказательства леммы достаточно показать, что оценка (6.22) имеет место для каждого из шести слагаемых правых частей равенств (6.20) и (6.21). Для функций $S_i(x, \lambda)$ и $S_i^*(x, \lambda)$ ($i=1, 2$) оценка (6.22) совпадает с оценками (5.23) и (5.27). Далее, в силу леммы Римана-Лебега

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \beta_i(x, \lambda) = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

Поэтому

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \int_0^\lambda \beta_i(x, \nu) d\nu \right\} = \int_a^{a+1} |\beta_i(x, \nu)| d\nu = o(1) \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

А так как функции $h_i(x, t)$ (см. равенства (6.7)—(6.10)) даже дифференцируемы по t , то оценка (6.22) для функций $z_i(x, \lambda)$, $i=1, 2, 3, 4$ также следует из леммы Римана-Лебега. Лемма доказана.

Лемма 6.2. Пусть $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ — произвольная вектор-функция класса $L^2(0, \infty)$. Тогда для каждого интервала $0 \leq x \leq \infty$ существует постоянная $C = C(N)$ такая, что при $t \rightarrow 0$ справедливы оценки

$$|h_i(x, t)| < Ct^{1/2} \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (6.23)$$

Доказательство. Докажем оценку (6.23) для функции $h_1(x, t)$. Для остальных функций $h_i(x, t)$ ($i=2, 3, 4$), доказательство аналогично. По определению (см. равенство (6.7))

$$h_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \{K(x, t, s) + \bar{K}(x, t, s)\} f_1(s) ds. \quad (6.24)$$

Так как в равенстве (6.7) интеграл по t берется в пределах от 0 до x , а по условию $\varepsilon \leq x$ (см. сноску на стр. 13), то $t \leq x$, т. е. $x-t \geq 0$. Поэтому из равенства (6.24) и неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$|h_1(x, t)| \leq C \int_{x-t}^{x+t} |f_1(s)| ds < C \left(\int_0^\infty f_1^2(s) ds \right)^{1/2} \cdot t^{1/2} = C_1 t^{1/2},$$

где

$$C = \max_{x-t < s < x+t} |K(x, t, s) + \bar{K}(x, t, s)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 6.3. Пусть выполняется условие леммы 6.2. Тогда при любом фиксированном x справедливы равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} \alpha_i(x, \nu) d\nu = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (6.25)$$

Равенства (6.24) имеют место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 6.2 докажем равенство (6.25) только для функции $\alpha_1(x, \nu)$. Из определения $\alpha_1(x, \nu)$, т. е. равенства (6.7), следует

$$\int_0^{\nu} \alpha_1(x, \nu) d\nu = \int_0^{\lambda} \left\{ \int_0^{\nu} h_1(x, t) \cos \nu t dt \right\} d\nu = \int_0^{\lambda} h_1(x, t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt.$$

Далее, так как из (6.24) следует, что $h(x, 0) = 0$, то, в силу оценки (6.23), $h(x, t) - h(x, 0) = O(t^2)$, $x > 0$. Поэтому оценка (6.25) следует из равенства (4.59). Лемма доказана.

Лемма 6.4. Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ суммируемы в каждом конечном интервале, то при любом фиксированном x справедливы равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} \beta_i(x, \nu) d\nu = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (6.26)$$

Равенства (6.26) имеют место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. Докажем лемму опять только для $\beta_1(x, \nu)$. Из равенства (6.13) следует, что

$$\int_0^{\lambda} \beta_1(x, \nu) d\nu = \int_{-x}^x \{k(x, -t) + l(x, t) - 1\} f_1(x-t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt. \quad (6.27)$$

С другой стороны, из определения функций $k(x, t)$ и $l(x, t)$, т. е. равенств (1.11) и (1.12), мы имеем

$$k(x, -t) + l(x, t) - 1 = -2 \sin^2 \left\{ \frac{1}{4} \int_{x-t}^x [p(\tau) + r(\tau)] d\tau \right\}.$$

Поэтому из (6.27) мы получим

$$\int_0^{\lambda} \beta_1(x, \nu) d\nu = -2 \int_{-x}^x \sin^2 \left\{ \frac{1}{4} \int_{x-t}^x [p(\tau) + r(\tau)] d\tau \right\} f_1(x-t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt,$$

откуда и следует равенство (6.26) для функции $\beta_1(x, \nu)$ на основании леммы Римана-Лебега. Лемма доказана.

Теорема 6.1 (о равносходимости). Пусть $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ — произвольная вектор-функция с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0, \infty)$, т. е. пусть

$$\int_0^{\infty} \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\} dx < +\infty.$$

Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ системы (5.1) + (5.2) суммируемы в каждом конечном интервале, то равномерно в каждом конечном интервале имеют место равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{[S_1(x, \lambda) - S_1(x, -\lambda)] - [S_1^*(x, \lambda) - S_1^*(x, -\lambda)]\} = 0, \quad (6.28)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{[S_2(x, \lambda) - S_2(x, -\lambda)] - [S_2^*(x, \lambda) - S_2^*(x, -\lambda)]\} = 0, \quad (6.29)$$

т. е. разность между разложением произвольной вектор-функции

$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in L^2(0, \infty)$ в обобщенный интеграл Фурье по собственным

вектор-функциям одномерной системы Дирака и разложением в обычный интеграл Фурье по косинусам и синусам стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. В силу оценок (6.22) и равенств (6.18), (6.19) применима тауберова теорема В. А. Марченко [5], на основании которой при любом фиксированном x

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{R_i(x, \lambda) - R_i(x, -\lambda)\} = 0 \quad (i = 1, 2),$$

т. е. согласно равенствам (6.20) и (6.21)

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{[S_1(x, \lambda) - S_1(x, -\lambda)] - [S_1^*(x, \lambda) - S_1^*(x, -\lambda)]\} = \\ & = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \{\beta_1(x, \nu) + \beta_2(x, \nu) + \frac{1}{2}[z_1(x, \nu) + z_2(x, \nu)]\} d\nu, \quad (6.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{[S_2(x, \lambda) - S_2(x, -\lambda)] - [S_2^*(x, \lambda) - S_2^*(x, -\lambda)]\} = \\ & = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \{\beta_3(x, \nu) + \beta_4(x, \nu) + \frac{1}{2}[z_3(x, \nu) + z_4(x, \nu)]\} d\nu. \quad (6.31) \end{aligned}$$

Тогда (6.28) и (6.29) следуют из равенств (6.30) и (6.31) в силу лемм 6.3 и 6.4. Теорема доказана.

Теорема 6.1 дает окончательное решение вопроса о сходимости разложения по собственным вектор-функциям одномерной системы Дирака для вектор-функции с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0, \infty)$. В частности, из теоремы 6.1 следует

Теорема 6.2 (о сходимости). Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ суммируемы в каждом конечном интервале, а вектор-функция

$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in L^2(0, \infty)$, то в каждой точке x_0 , где выполняются

локальные условия разложимости вектор-функции $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ в обычный интеграл Фурье, имеют место равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{S_1(x_0, \lambda) - S_1(x_0, -\lambda)\} = f_1(x_0),$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{S_2(x_0, \lambda) - S_2(x_0, -\lambda)\} = f_2(x_0),$$

т. е. разложение вектор-функции $f(x)$ в обобщенный интеграл Фурье по собственным вектор-функциям одномерной системы Дирака в точке x_0 стремится к значению $f(x_0) = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \end{pmatrix}$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 24.IX.1966

Ի. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԴԻՐԱԿԻ ՄԻԱԶԱՓ ՍԻՍՏԵՄԻ ՍՊԵԿՏՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՎԱՐՔԻ ԵՎ ԸՍՏ ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ուսումնասիրվում է Դիրակի ստացիոնար միաչափ սիստեմի՝

$$\frac{dy_2}{dx} + p(x)y_1 = \lambda y_1, \quad (1)$$

$$-\frac{dy_1}{dx} + r(x)y_2 = \lambda y_2, \quad (2)$$

$$y_2(0) - hy_1(0) = 0, \quad (3)$$

ալապես կոչված սպեկտրալ ֆունկցիայի ասիմպտոտիկ վարքը, որը տրվում է $(0, 19)$ բանաձևով (տես հիմնական տեքստի ներածութլունը): Այնուհետև ապացուցվում է թեորեմ՝ ըստ (1)–(3) խնդրի սեփական ֆունկցիաների վերլուծության և ըստ Ֆուրիեի սովորական ինտեգրալների վերլուծության միաժամանակյա գուգամիտութլան մասին:

I. S. SARGSIAN

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR AND EIGENFUNCTION DEVELOPMENT OF THE SPECTRAL FUNCTION FOR THE ONE DIMENSIONAL DIRAC SYSTEM

S u m m a r y

For the one dimensional Dirac system

$$\frac{dy_2}{dx} + p(x) y_1 = i y_1, \quad (1)$$

$$-\frac{dy_1}{dx} + r(x) y_2 = i y_2, \quad (2)$$

$$y_2(0) - h y_1(0) = 0 \quad (3)$$

the asymptotic behaviour given in (0.19) of the so called spectral function is studied. A theorem concerning the simultaneous convergence of the corresponding to (1)–(3) problem eigenfunction development and of the usual Fourier integral development is proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *N. F. Mott and I. N. Sneddon.* Wave mechanics and its applications, Oxford, 1948.
2. *E. C. Titchmarsh.* Some eigenfunction expansion formulæ, Proc. London Math. Soc. (3), 11, 1961, 159–168.
3. *Б. М. Левитан.* Приложение III к книге Э. Ч. Титчмарша. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. I, ИЛ, М., 1960.
4. *В. А. Марченко.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I, Труды Моск. матем. об-ва, 1, 1952, 327–420.
5. *В. А. Марченко.* Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов, Изв. АН СССР, серия матем., 19, 1955, 381–422.
6. *И. С. Саргсян.* Асимптотическое поведение спектральной матрицы одномерной системы Дирака, ДАН СССР, 166, № 5, 1966, 1058–1061.
7. *И. С. Саргсян.* Разложение по собственным функциям одномерной системы Дирака, ДАН СССР, 166, № 6, 1966, 1292–1295.
8. *Б. М. Левитан и И. С. Саргсян.* О продолжении решений одномерной системы Дирака, ДАН СССР, 165, № 6, 1965, 1241–1244.
9. *И. С. Саргсян.* О решении задачи Коши для одномерной системы Дирака, Известия АН Арм.ССР, Математика, I, № 6, 1966, 392–436.