М. Б. БАЛК

ЦЕЛЫЕ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ НУЛЕЙ

1. Функция $f(z)$ называется *целой полианалитической порядка n* или *целой n -аналитической*, если она представима в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \cdot f_k(z), \quad (1)$$

где все $f_k(z)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) — целые аналитические функции комплексного переменного z , а $\bar{z}$ комплексно сопряжено z . Можно считать, что $f_{n-1}(z) \not\equiv 0$. Если все функции $f_k(z)$ являются полиномами относительно z , то $f(z)$ называют n -аналитическим полиномом.

Целая n -аналитическая функция $F(z)$ называется *приведенной*, если она представима в виде

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z|^{2k} \cdot \varphi_k(z), \quad (2)$$

где все $\varphi_k(z)$ — целые аналитические функции. Примером такой функции может служить приведенный полианалитический полином, т. е. полином $\Pi(z, |z|^2)$ относительно пары переменных z и $|z|^2$.

Здесь мы намерены, используя аппарат мероморфных кривых, выяснить каков общий вид целой полианалитической функции, имеющей ограниченное (но не обязательно конечное) множество нулей (см. теорему 2).

От весьма стеснительных ограничений, при которых были установлены теоремы 1 и 2 в первоначальном рукописном варианте данной статьи, нам удалось освободиться, благодаря ценным советам А. А. Гольдберга. А. А. Гольдберг внимательно прочитал рукопись и сделал ряд очень полезных и важных замечаний, которые были мною учтены. Пользуюсь случаем, чтобы выразить ему свою глубокую признательность.

2. Нам потребуется следующее

Замечание 1. Всякую целую приведенную n -аналитическую функцию (2) возможно представить в виде

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^s p_{\nu}(|z|^2) \cdot \psi_{\nu}(z), \quad (3)$$

где: 1) все $\psi_{\nu}(z)$ ($\nu=1, 2, \dots, s$) — линейно независимые целые функции; 2) каждая из функций $\psi_{\nu}(z)$ совпадает с одной из функций $\varphi_k(z)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$); $\psi_s(z) \equiv \varphi_{n-1}(z)$, $\psi_{\nu}(z) \not\equiv 0$ ($\nu=1, \dots, s$); 3) функции $p_{\nu}(t)$ — полиномы (от переменного t), степени которых α_{ν} монотонно возрастают с ростом ν :

$$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s = n-1. \quad (3a)$$

Действительно, будем последовательно перебирать функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z), \dots, \varphi_{n-1}(z)$ и каждый раз, когда окажется, что какая-либо из них ($\varphi_k(z)$) является линейной комбинацией следующих за ней функций ($\varphi_{k+1}(z), \varphi_{k+2}(z), \dots, \varphi_{n-1}(z)$), мы ее заменим этой комбинацией, раскроем скобки и приведем подобные члены (случай, когда все коэффициенты такой комбинации окажутся нулями, мы не исключаем). Очевидно, что после конечного числа шагов мы представим $F(z)$ в виде (3), причем функции $\psi_\nu(z)$ и $p_\nu(t)$ будут удовлетворять всем условиям замечания 1.

Не нарушая общности, мы будем в дальнейшем полагать, что при $\nu = 1, 2, \dots, s$

$$\tau(\psi_\nu) = 1, \quad (36)$$

где $\tau(\psi_\nu)$ — первый из неравных нулю тейлоровых коэффициентов разложения функции $\psi_\nu(z)$ по степеням z .

3. Каждой целой приведенной полианалитической функции, записанной в виде (3), мы можем сопоставить мероморфную (точнее говоря — целую) кривую

$$B \equiv B(z) = \{\psi_1(z), \dots, \psi_s(z)\}. \quad (4)$$

Через $T(r, B)$ обозначим следующую ее характеристику:

$$T(r, B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}) d\varphi, \quad (5)$$

где

$$u(z) \equiv u(z, B) = \max \{ \ln |\psi_\nu(z)| \}. \quad (6)$$

Величина $T(r, B)$ несущественно отличается от характеристики, введенной для мероморфных кривых А. Картаном (сравните [1] или [2]).

Приведем некоторые вспомогательные формулы, которые потребуются нам ниже.

В дальнейшем мы воспользуемся формулой Иенсена в следующем виде (сравните [3], стр. 166, формула (2''')):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi = N(r, 0, f) - N(r, \infty, f) + \ln |\tau(f)|, \quad (7)$$

где $f(z)$ — функция, мероморфная в круге $|z| \leq r$, $\tau(f)$ — ее первый (по порядку роста номеров) отличный от нуля коэффициент разложения Лорана в окрестности точки $z = 0$, $N(r, a, f)$ — известная характеристика Р. Неванлинны

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \ln r. \quad (8)$$

(Здесь $n(t, a)$ означает, как обычно, число a -точек функции $f(z)$ в замкнутом круге $|z| \leq t$; при $a = \infty$ под a -точками понимаются полюсы.)

Для функции $\psi(z)$, голоморфной в круге $|z| \leq r$, имеем $N(r, \infty, \psi) = 0$, и формула Иенсена (7) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\psi'(re^{i\varphi})| d\varphi = N(r, 0, \psi) + \ln |\tau(\psi)|. \quad (9)$$

Пусть $\psi_k(z)$ и $\psi_s(z)$ — целые функции, которые, вообще говоря, могут иметь общие нули.

Мероморфной функции

$$f_{ks}(z) = \frac{\psi_k(z)}{\psi_s(z)} \quad (10)$$

естественно сопоставляется мероморфная кривая

$$B_{ks} = \{\psi_k, \psi_s\}. \quad (11)$$

Легко написать соотношение между характеристикой $T(r, B_{ks})$ этой кривой и характеристикой Неванлинны $T(r, f_{ks})$.

Применяя формулу (6), получим для кривой (11)

$$u_{ks}(z) \equiv u(z, B_{ks}) = \ln^+ |f_{ks}(z)| + \ln |\psi_s(z)|. \quad (12)$$

Как известно, характеристика Неванлинны $T(r, f)$ для мероморфной функции $f(z)$ определяется формулой

$$T(r, f) = m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f), \quad (13)$$

где

$$m(r, \infty, f) \equiv m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi. \quad (14)$$

Если еще учесть (12) и (9), то найдем

$$\begin{aligned} T(r, f_{ks}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{ks}(re^{i\varphi}) d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\psi_s(re^{i\varphi})| d\varphi + N(r, \infty, f_{ks}) = \\ &= T(r, B_{ks}) + N(r, \infty, f_{ks}) - N(r, 0, \psi_s) - \ln |\tau(\psi_s)|. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим через $\psi_{ks}(z)$ наибольший общий делитель функций $\psi_k(z)$ и $\psi_s(z)$, то есть такую целую функцию, что $\psi_k(z)$ и $\psi_s(z)$ представимы в виде

$$\psi_k(z) = \sigma_k(z) \cdot \psi_{ks}(z), \quad \psi_s(z) = \sigma_s(z) \cdot \psi_{ks}(z),$$

где $\sigma_k(z)$ и $\sigma_s(z)$ — некоторые целые функции, но уже без общих нулей. Будем еще полагать, что $\psi_{ks}(z)$ так нормирована, что $\tau(\psi_{ks}) = 1$.

Легко видеть, отправляясь от формулы (10), что

$$N(r, 0, \psi_s) = N(r, \infty, f_{ks}) + N(r, 0, \psi_{ks}). \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует

$$T(r, f_{ks}) \leq T(r, B_{ks}) - N(r, 0, \psi_{ks}) - \ln |\tau(\psi_s)|. \quad (17)$$

Отметим еще очевидное следствие из формулы (6)

$$u(z, B_{ks}) \leq u(z, B), \quad (18)$$

откуда

$$T(r, B_{ks}) \leq T(r, B). \quad (19)$$

При $r > 1$ из (17) и (19) следует неравенство, которым мы воспользуемся ниже (п. 13)

$$T\left(r, \frac{\psi_k}{\phi_s}\right) \leq T(r, B). \quad (20)$$

4. Справедлива следующая

Теорема 1. Если целая приведенная n -аналитическая функция

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z|^{2k} \cdot F_k(z) \quad (21)$$

имеет ограниченное множество нулей, то она представима в виде произведения приведенного аналитического полинома $\Pi(z, |z|^2)$ на целую аналитическую функцию без нулей $e^{g(z)}$, то есть

$$F(z) = \Pi(z, |z|^2) \cdot e^{g(z)}. \quad (22)$$

Доказательство будет дано в пп. 5—13.

5. Прежде всего заметим, что если функция $F_{n-1}(z)$ имеет бесконечное множество нулей, то множество нулей функции $F(z)$ должно быть неограниченным. В [4] (стр. 159, лемма 1) этот факт установлен для бианалитических функций (двумя способами), но приведенное там доказательство тривиальным образом переносится на случай полианалитических функций произвольного порядка; поэтому мы его здесь приводить не будем.

Так как, по условию, множество нулей функции $F(z)$ ограничено, то $F_{n-1}(z)$ имеет вид

$$F_{n-1}(z) = \varphi_{n-1}(z) \cdot e^{g(z)}, \quad (23)$$

где $\varphi_{n-1}(z)$ — полином относительно z , а $g(z)$ — целая функция. По-ложим

$$e^{-g(z)} \cdot F_k(z) = \varphi_k(z) \quad (k=0, 1, \dots, n-2), \quad (24)$$

$$e^{-g(z)} \cdot F(z) = \Psi(z). \quad (25)$$

Тогда функция

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z|^{2k} \cdot \varphi_k(z) \quad (26)$$

также имеет ограниченное множество нулей.

Функцию (26) можно, согласно замечанию 1, представить в виде

$$\Psi(z) = \sum_{k=1}^s p_k(|z|^2) \cdot \psi_k(z), \quad (3)$$

причем $\psi_k(z)$ и $p_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, s$) удовлетворяют всем условиям этого замечания.

Допустим, что среди функций $\psi_k(z)$ хотя бы одна не является полиномом, и покажем, что это приводит к противоречию. В силу формул (3) и (25) мы тем самым и докажем теорему 1.

Интересующее нас противоречие мы легко выведем из того факта, что при больших положительных s (за исключением, быть может,,

множества ограниченной меры) характеристика $T(c, B)$ (см. (5)) удовлетворяет неравенству вида

$$T(c, B) < A \ln T(c, B) + A \ln c \quad (27)$$

(здесь и всюду в дальнейшем буквой A обозначаются положительные константы, не зависящие от параметра c ; даже в одной и той же формуле эти константы могут быть различными).

Рассуждения немного упрощаются, если предварительно вместо целой кривой (5) рассмотреть вспомогательную целую кривую

$$G(z) \equiv G(z; c) = \{g_1(z), g_2(z), \dots, g_s(z)\}, \quad (28)$$

где

$$g_k \equiv g_k(z) \equiv g_k(z; c) = p_k(c^2) \cdot \psi_k(z) \quad (k=1, 2, \dots, s). \quad (29)$$

Нетрудно убедиться, что при больших c

$$T(c, B) < T(c, G) + A. \quad (30)$$

Действительно, положим

$$U(z) = \max \{ \ln |g_v(z)| \}. \quad (31)$$

Тогда

$$T(r, G) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (32)$$

Учитывая (6), легко получим, что

$$u(z) = \max \{ \ln |\psi_v(z)| \} = \max \{ \ln |g_v(z)| - \ln |p_v(c^2)| \} < \max \ln |g_v(z)| + A$$

(при достаточно больших c), то есть

$$u(z) < U(z) + A,$$

откуда следует (30).

Чтобы получить (27), остается показать, что при больших c (кроме, возможно, множества положительной меры)

$$T(c, G) < A \ln T(c, B) + A \ln c. \quad (33)$$

Целью рассуждений в пунктах 6—13 и будет получение неравенства (33).

6. В силу условия теоремы 1 можно выбрать настолько большую окружность $\gamma \{ |z| = \rho \}$, что функция $\Psi(z)$ отлична от нуля при $|z| > \rho$.

Будем понимать под *вращением функции $\Psi(z)$ на контуре γ* величину

$$B_{p_\gamma} \Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg \Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma d \arg \Psi(z). \quad (34)$$

Пусть

$$B_{p_\gamma} \Psi(z) = h.$$

Тогда при любом $c > \rho$ на окружности $\Gamma \{ |z| = c \}$

$$B_{p_\Gamma} \Psi(z) = h. \quad (35)$$

На Γ функция $\Psi(z)$ совпадает с аналитической функцией

$$\Phi(z) \equiv \Phi(z, c^2) = \sum_{k=1}^s p_k(c^2) \cdot \psi_k(z), \quad (36)$$

так что

$$B_{p_r} \Phi(z) = h, \quad (37)$$

то есть $\Phi(z)$ имеет внутри Γ в точности h нулей (с учетом их кратности).

7. Выше (см. замечание 1) мы обозначили через α_k точную степень полинома $p_k(t)$ ($k = 1, \dots, s$); числа α_k удовлетворяют условию (3а).

Рассмотрим матрицу

$$M = \begin{vmatrix} a_1^{\alpha_1} & a_1^{\alpha_2} & \dots & a_1^{\alpha_s} \\ a_2^{\alpha_1} & a_2^{\alpha_2} & \dots & a_2^{\alpha_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_s^{\alpha_1} & a_s^{\alpha_2} & \dots & a_s^{\alpha_s} \\ a_{s+1}^{\alpha_1} & a_{s+1}^{\alpha_2} & \dots & a_{s+1}^{\alpha_s} \end{vmatrix}, \quad (38)$$

где $a_1, \dots, a_s, a_{s+1}$ — какие-либо положительные числа, причем

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_s < a_{s+1}.$$

Вычеркивая из матрицы M любую из $s+1$ строк и оставляя строки с номерами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, мы можем образовать определитель порядка s

$$\sigma[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s] = \begin{vmatrix} a_{\beta_1}^{\alpha_1} & a_{\beta_1}^{\alpha_2} & \dots & a_{\beta_1}^{\alpha_s} \\ a_{\beta_2}^{\alpha_1} & a_{\beta_2}^{\alpha_2} & \dots & a_{\beta_2}^{\alpha_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\beta_s}^{\alpha_1} & a_{\beta_s}^{\alpha_2} & \dots & a_{\beta_s}^{\alpha_s} \end{vmatrix}. \quad (39)$$

Нетрудно убедиться, что определитель (39) отличен от нуля. Для этого удобно воспользоваться известной из высшей алгебры теоремой Декарта: число положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами либо равно числу перемен знака в ряду его коэффициентов, либо меньше этого числа (на четное число).

Будем (39) рассматривать как полином относительно переменного a_{β_i} (при фиксированных $a_{\beta_1}, \dots, a_{\beta_s}$).

Тогда у него не более, чем s коэффициентов, отличных от нуля (это очевидно из формулы (39)) и он, в силу теоремы Декарта, имеет не более, чем $s-1$ положительных корней. Но их и не менее, чем $s-1$: каждое из чисел $a_{\beta_1}, \dots, a_{\beta_s}$ — корень этого полинома. Следовательно, если положительное число a_{β_i} отлично от чисел $a_{\beta_1}, \dots, a_{\beta_s}$, то определитель (39) не равен нулю.

Нами позднее (в п. 12) будет использовано число

$$R = \max \left\{ \frac{1}{|\sigma[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s]|} \right\}. \quad (40)$$

Ясно, что $0 < R < \infty$.

Построим затем $s + 1$ функций

$$\Phi_\nu(z) \equiv \Phi(z, c^2 a_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \dots, s, s + 1). \quad (41)$$

Каждая из них имеет в круге $d\{|z| \leq c\}$ не более, чем h нулей.

8. Проводя рассуждения, почти не отличающиеся от соответствующих рассуждений А. Картана [1] (см. также [2], стр. 295; следует положить $p = s, q = s + 1$), можно без труда убедиться, что функции $T(r, G)$ и

$$v(z) = \max_{1 \leq \beta \leq s+1} \{\ln |\Phi_\beta(z)|\} \quad (42)$$

связаны неравенством

$$T(c, G) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(ce^{i\tau}) d\tau + \ln K, \quad (43)$$

где K — константа, зависящая только от s (но не от c и не от функций $\psi_k(z)$).

Согласно (33), нам теперь следует оценить интеграл в правой части формулы (43). Предварительно мы его преобразуем.

Выберем из $s + 1$ чисел $1, 2, \dots, s, s + 1$ каким-либо образом s не равных между собой номеров $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$. Тогда имеет место следующая зависимость между вронскианами:

$$w[\Phi_{\beta_1}, \Phi_{\beta_2}, \dots, \Phi_{\beta_s}] \equiv C[\beta_1, \dots, \beta_s; c] \cdot w[g_1, \dots, g_s], \quad (44)$$

где

$$C[\beta_1, \dots, \beta_s; c] = \begin{vmatrix} \frac{p_1(c^2 a_{\beta_1})}{p_1(c^2)} & \dots & \frac{p_s(c^2 a_{\beta_1})}{p_s(c^2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{p_1(c^2 a_{\beta_s})}{p_1(c^2)} & \dots & \frac{p_s(c^2 a_{\beta_s})}{p_s(c^2)} \end{vmatrix}. \quad (45)$$

Если вспомнить, что сказано о полиномах $p_k(t)$ в замечании 1, то легко убедиться, что определитель (45) при $c \rightarrow \infty$ имеет конечный и отличный от нуля предел $\sigma[\beta_1, \dots, \beta_s]$ (см. (39)):

$$\lim_{c \rightarrow \infty} C[\beta_1, \dots, \beta_s; c] = \sigma[\beta_1, \dots, \beta_s]. \quad (46)$$

Введем обозначения

$$H(z) \equiv H(z, c) = \frac{\Phi_1(z) \cdot \Phi_2(z) \cdots \Phi_{s+1}(z)}{w[g_1, g_2, \dots, g_s]}, \quad (47)$$

$$\theta(z; \beta_1, \dots, \beta_s; c) = \frac{1}{C[\beta_1, \dots, \beta_s; c]} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{\Phi'_{\beta_1}}{\Phi_{\beta_1}} & \frac{\Phi'_{\beta_2}}{\Phi_{\beta_2}} & \dots & \frac{\Phi'_{\beta_s}}{\Phi_{\beta_s}} \\ \frac{\Phi''_{\beta_1}}{\Phi_{\beta_1}} & \frac{\Phi''_{\beta_2}}{\Phi_{\beta_2}} & \dots & \frac{\Phi''_{\beta_s}}{\Phi_{\beta_s}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\Phi^{(s-1)}_{\beta_1}}{\Phi_{\beta_1}} & \frac{\Phi^{(s-1)}_{\beta_2}}{\Phi_{\beta_2}} & \dots & \frac{\Phi^{(s-1)}_{\beta_s}}{\Phi_{\beta_s}} \end{vmatrix}. \quad (48)$$

Если β — тот из $s+1$ номеров $1, 2, \dots, s, s+1$, который не оказался среди чисел $\beta_1, \dots, \beta_s$, то

$$\Phi_{\beta}(z) = \Theta(z; \beta_1, \dots, \beta_s; c) \cdot H(z). \quad (49)$$

Положим

$$W(z) = \max \{ \ln |\Theta(z; \beta_1, \dots, \beta_s; c)| \} \quad (50)$$

(максимум берется при фиксированных z и c по всевозможным допустимым комбинациям $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$).

Тогда, как показал Картан (см. [1] или [2], стр. 296),

$$v(z) = \ln |H(z)| + W(z). \quad (51)$$

Из (43) и (51) видно, что нам теперь предстоит оценить сверху интегралы

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |H(ce^{i\tau})| d\tau \quad (52)$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(ce^{i\tau}) d\tau \quad (53)$$

при больших c .

9. Предварительно выясним, как располагаются нули функций $\Phi_s(z)$ в окрестности точки $z=0$ при больших c .

Пусть функция $\psi_s(z)$ имеет в точке $z=0$ нуль порядка λ ($\lambda > 0$), так что

$$\psi_s(z) = z^{\lambda} \gamma(z), \quad \gamma(0) = 1. \quad (54)$$

Можно выбрать затем r_0 настолько малым, чтобы всюду в круге $\delta \{ |z| \leq r_0 \}$ функция $\gamma(z)$ была отлична от нуля.

Применяя теорему Руше к функциям

$$p_s(c^2) \psi_s(z) \text{ и } \sum_{k=0}^{s-1} p_k(c^2) \psi_k(z),$$

легко убедиться, что при достаточно больших c их сумма, то есть функция $\Phi(z; c^2)$, имеет в δ в точности λ нулей (с учетом их кратности).

Не исключено, что $\Phi(z; c^2)$ обращается в нуль и в точке $z=0$. Обозначим кратность нуля функции Φ в точке $z=0$ через μ . С изменением c может, вообще говоря, меняться и μ . Покажем, что при достаточно больших c порядок μ не зависит от c . Действительно, пусть для какой-либо последовательности чисел c_m ($c_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$), функция $\Phi(z; c_m^2)$ имеет в точке $z=0$ нуль порядка $\mu_1 = \text{const} \leq \lambda$, так что для каждого c_m

$$\Phi(z; c_m^2) = z^{\mu_1} \cdot E(z; c_m^2), \quad (55)$$

причем $E(z; c_m^2)$ регулярна и отлична от нуля в точке $z=0$. Тогда равенство (36) перепишем так:

$$\frac{z^{\mu_1} \cdot E(z; c_m^2) - z^{\lambda} \gamma(z) \cdot p_s(c_m^2)}{p_{s-1}(c_m^2)} = \psi_{s-1}(z) + \sum_{k=1}^{s-2} \frac{p_k(c_m^2)}{p_{s-1}(c_m^2)} \psi_k(z), \quad (56)$$

причем $\psi_{s-1}(z) \neq 0$. При $c_m \rightarrow \infty$ правая часть формулы (56) сходится в δ равномерно к $\psi_{s-1}(z)$. Поэтому при больших c_m правая часть формулы (56) должна иметь в точке $z=0$ нуль порядка не выше, чем $\psi_{s-1}(z)$; с другой стороны, правая часть равенства (56) при любых c_m имеет в точке $z=0$ нуль порядка не ниже μ_1 . Следовательно, $\psi_{s-1}(z)$ имеет в точке $z=0$ нуль порядка не ниже μ_1 . Повторяя затем сходные рассуждения, легко убедиться, что все функции $\psi_k(z)$ ($k=s, s-1, s-2, \dots, 1$) делятся на z^{μ_1} . Но тогда, как ясно из (36), $\Phi(z; c^2)$ делится на z^{μ_1} при всех c (а не только для c из последовательности $\{c_m\}$).

Отсюда, очевидно следует, что порядок μ нуля функции $\Phi(z; c^2)$ в точке $z=0$ при больших c не зависит от c .

10. Могут представиться два случая:

I) $\mu = \lambda$ или II) $\mu < \lambda$.

Если $\mu = \lambda$, то $\Phi(z; c^2)$ (при больших c) не имеет, очевидно, нулей в кольце $0 < |z| \leq r_0$; то же остается в силе и для функций $\Phi_\nu(z)$ ($\nu=1, 2, \dots, s, s+1$).

При $\mu < \lambda$ этого уже утверждать нельзя. Однако мы докажем следующее:

если $\mu < \lambda$, то существуют такие положительные константы A и α , не зависящие от c , что при достаточно больших c функции $\Phi(z; c^2)$ не имеют нулей в кольце

$$0 < |z| \leq A \cdot c^{-\alpha}; \quad (57)$$

то же остается в силе для функций $\Phi_\nu(z)$.

Действительно, из (36) видно, что все нули функции $\Phi(z; c^2)$, лежащие в кольце

$$0 < |z| \leq r_0,$$

удовлетворяют уравнению

$$z^{\lambda-\mu} + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{p_k(c^2)}{p_s(c^2)} \gamma_k(z) = 0, \quad (58)$$

где $\gamma_k(z) \equiv \psi_k(z)/(\psi_s(z))$, причем все $\gamma_k(z)$ ($k=1, \dots, s-1$) регулярны в δ и хотя бы одна из них отлична от 0 в точке $z=0$.

Введем новое вспомогательное переменное $\zeta = c^{-2}$; рассмотрим функции $\pi_k(\zeta) = \frac{p_k(c^2)}{p_s(c^2)}$ и доопределим их при $\zeta=0$ по непрерывности. Тогда очевидно, что $\pi_k(0) = 0$ при $k=1, 2, \dots, s-1$.

Уравнение (58) переписется следующим образом:

$$z^{\lambda-\mu} + \sum_{k=1}^{s-1} \pi_k(\zeta) \cdot \gamma_k(z) = 0. \quad (59)$$

В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса (см. [5], стр. 352) это уравнение (относительно переменного z) равносильно некоторому уравнению вида

$$A_0(\zeta) + A_1(\zeta) \cdot z + A_2(\zeta) \cdot z^2 + \dots + A_{\lambda-\mu-1}(\zeta) z^{\lambda-\mu-1} + z^{\lambda-\mu} = 0, \quad (60)$$

где все $A_k(\zeta)$ — аналитические функции в точке $\zeta=0$, причем $A_k(0)=0$.

Разлагая, если это возможно, левую часть уравнения (60) на неприводимые псевдополиномы (в окрестности точки $(0,0)$) и применяя известную теорему о явном задании аналитической поверхности (см. [6], стр. 88—89, теорема 4.12), мы приходим к выводу, что уравнение (59) определяет в окрестности точки $z=0$ конечное число функций вида

$$z = d_{1,j} \zeta^{\frac{1}{m_j}} + d_{2,j} \zeta^{\frac{2}{m_j}} + \dots$$

(здесь m_j — натуральные числа, $\sum m_j = \lambda - \mu$).

Отсюда ясно, что при достаточно больших c нули функции $\Phi(z; c^2)$, лежащие в кольце $0 < |z| \leq r_0$, удовлетворяют неравенству вида

$$|z| > \frac{A}{c^\alpha}, \quad (61)$$

где A и α — положительные константы, не зависящие от c .

То же верно, очевидно, и для нулей каждой функции $\Phi_\nu(z)$ ($\nu = 1, \dots, s, s+1$). Так как таких функций конечное число, то можно выбрать A таким, чтобы неравенство (61) имело место одновременно для всех ν .

Очевидно, оба случая I и II можно охватить одной формулой (57); при этом, в случае I можно брать $\alpha = 0$, $A = r_0$.

Итак, если $\psi_s(z)$ имеет в точке $z=0$ нуль порядка λ , то существует такое целое число μ ($0 \leq \mu \leq \lambda$) и такие константы $A > 0$ и $\alpha \geq 0$, что при всех достаточно больших c все функции $\Phi_\nu(z)$ ($\nu = 1, 2, \dots, s, s+1$) имеют в точке $z=0$ нуль порядка μ , а все остальные нули этих функций удовлетворяют неравенству (61).

Этим фактом воспользуемся в п. 11.

11. Вернемся теперь к оценке интеграла (52).

В силу формулы Иенсена (7)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |H(c e^{i\varphi})| d\varphi = N(c, 0, H) - N(c, \infty, H) + \ln |\tau(H)|,$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |H(c e^{i\varphi})| d\varphi \leq \ln |\tau(H)| + N(c, 0, H). \quad (62)$$

Но

$$|\tau(H)| = \frac{|\tau(\Phi_1)| \cdots |\tau(\Phi_{s+1})|}{|\tau(w[\psi_1, \dots, \psi_s])| \cdot |p_1(c^2) \cdots p_s(c^2)|} < A c^{(2s+2) \tau_s}.$$

Поэтому (при достаточно больших c)

$$\ln |\tau(H)| \leq A \ln c. \quad (63)$$

Теперь нужно оценить $N(c, 0, H)$. Будем придерживаться следующих обозначений: $\bar{n}_\nu(r, 0)$ обозначает число нулей функции $\Phi_\nu(z)$ в круге $|z| \leq r$, причем каждый нуль засчитывается столько раз, каково наименьшее из двух чисел: порядок этого нуля и число $s-1$;

под $\bar{N}_v(r, 0)$ понимается величина

$$\int_0^r \frac{\bar{n}_v(t, 0) - \bar{n}_v(0, 0)}{t} dt + \bar{n}_v(0, 0) \ln r. \quad (64)$$

Картан показал (см. [1], или [2], стр. 296), что

$$N(r, 0, H) \leq \sum_{v=1}^s \bar{N}_v(r, 0). \quad (65)$$

Но $\bar{N}_v(r, 0)$ легко оценивается, если использовать (64) и то, что $\Phi_v(z)$ имеет в $d = \{|z| \leq c\}$ не более, чем h нулей (см. конец п. 6).

Действительно, при достаточно больших c

$$\bar{N}_v(c, 0) \leq \int_{Ac^{-\alpha}}^c \frac{\bar{n}_v(t, 0)}{t} dt + \mu \ln c \leq h \ln \frac{c}{A \cdot c^{-\alpha}} + \lambda \ln c \leq A \ln c.$$

Поэтому (см. (65))

$$N(c, 0, H) \leq A \ln c. \quad (66)$$

Из (62), (63) и (66) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |H(ce^{i\varphi})| d\varphi < A \ln c. \quad (67)$$

12. Теперь обратимся к оценке интеграла (53).

Мы сумеем его оценить, если воспользуемся „функцией приближения“ Неваляинны $m(r, f)$ (см. (14)). Из (46), (50), (48) и (14) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{W}(ce^{i\varphi}) d\varphi < A + \sum_{v=1}^{s+1} \left[m\left(c, \frac{\Phi_v'}{\Phi_v}\right) + m\left(c, \frac{\Phi_v''}{\Phi_v}\right) + \dots + m\left(c, \frac{\Phi_v^{(s-1)}}{\Phi_v}\right) \right]. \quad (68)$$

Но при любых r, v и k

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{\Phi_v^{(k)}}{\Phi_v}\right) &= m\left(r, \frac{\Phi_v'}{\Phi_v} \cdot \frac{\Phi_v''}{\Phi_v} \dots \frac{\Phi_v^{(k)}}{\Phi_v^{(k-1)}}\right) \leq \\ &\leq m\left(r, \frac{\Phi_v'}{\Phi_v}\right) + m\left(r, \frac{\Phi_v''}{\Phi_v}\right) + \dots + m\left(r, \frac{\Phi_v^{(k)}}{\Phi_v^{(k-1)}}\right). \end{aligned} \quad (69)$$

Таким образом, оценка интересующего нас интеграла (53) сводится к оценке (сверху) величин вида

$$m\left(r, \frac{\Phi_v^{(k)}}{\Phi_v^{(k-1)}}\right) \quad (v=1, \dots, s+1; k=1, \dots, s-1). \quad (70)$$

Приведем два неравенства, которые будут использованы для оценки величин (70) (см. ниже неравенства а) и б)).

а) (см. [7], стр. 61, сноска, формула (5')): если для мероморфной функции $f(z)$ имеем $\tau(f) = c_\lambda$, то при $0 < r < \rho$

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) &< 34 + 5 \ln^+ |\lambda| + 3 \ln^+ \frac{1}{|c_\lambda|} + 7 \ln^+ \frac{1}{r} + 4 \ln^+ \rho + 3 \ln^+ \frac{1}{\rho - r} + \\ &+ 4 \ln^+ T(\rho, f). \end{aligned} \quad (71)$$

Ниже мы применим формулу (71) при следующих дополнительных предположениях: функция $f(z)$ будет зависеть от некоторого параметра $c > 0$ (это будет функция $\Phi^{(k)}(z)$); нас будет интересовать случай больших c , при этом условии $|\tau(f)|$ будет больше некоторой положительной константы, а число $|\lambda|$ ограничено; число r будет большим.

При таких предположениях формулу (71) можно записать немного проще:

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < A + 4 \ln \rho + 3 \ln^+ \frac{1}{\rho - r} + 4 \ln^+ T(\rho, f); \quad (72)$$

б)

$$T(r, f') \leq 2 T(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right). \quad (73)$$

Чтобы убедиться в справедливости этого неравенства, достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} T(r, f') &= N(r, f') + m(r, f') = 2N(r, f) - N_1(r, f) + m\left(r, f \cdot \frac{f'}{f}\right) \leq \\ &\leq N(r, f) + [N(r, f) + m(r, f)] + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq 2 T(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right). \end{aligned}$$

(Здесь, как это принято в теории распределения значений мероморфных функций (см. [8], стр. 14), под $N_1(r, f)$ мы понимаем величину

$$\int_0^r \frac{n_1(t, a) - n_1(0, a)}{t} dt + n_1(0, a) \ln r,$$

а $n_1(t, a)$ означает число a -точек функции $f(z)$ в круге $|z| \leq t$, причем каждая a -точка порядка λ засчитывается $\lambda - 1$ раз.)

В сочетании с (72) формула (73) дает:

$$T(r, f') < A + 4 \ln \rho + 3 \ln^+ \frac{1}{\rho - r} + 2 T(r, f) + 4 \ln^+ T(\rho, f). \quad (74)$$

Следовательно,

$$T(r, f') < A + 4 \ln \rho + 3 \ln^+ \frac{1}{\rho - r} + 6 T(\rho, f). \quad (75)$$

Заметим попутно, что вместо неравенства (75) можно было бы с таким же успехом воспользоваться одним неравенством Чжуан Цзи-тая ([8], теорема 8).

Положим

$$f(z) = \Phi^{(k-1)}(z).$$

Пусть далее числа $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_s$ таковы, что

$$1 < c = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_s.$$

Выбор этих чисел мы уточним позднее. Воспользуемся неравенствами (71), (75) и соотношениями $\ln x < x$ (для всякого $x > 0$), $T(\rho_k) \leq T(\rho_s)$ при $\rho_k \leq \rho_s$,

а также известными свойствами плюс-логарифма (см. [3] или [8]).

Имеем

$$m\left(c, \frac{\Phi_v^{(k)}}{\Phi_v^{(k-1)}}\right) < A + A \ln \rho_1 + A \ln^+ \frac{1}{\rho_1 - \rho_0} + A \ln^+ T(\rho_1, \Phi_v^{(k-1)}), \quad (76)$$

$$T(\rho_1, \Phi_v^{(k-1)}) < A + A \ln \rho_2 + A \ln^+ \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} + A T(\rho_2, \Phi_v^{(k-2)}),$$

$$T(\rho_2, \Phi_v^{(k-2)}) < A + A \ln \rho_3 + A \ln^+ \frac{1}{\rho_3 - \rho_2} + A T(\rho_3, \Phi_v^{(k-3)}),$$

.....

$$T(\rho_{k-1}, \Phi_v) < A + A \ln \rho_{k-1} + A \ln^+ \frac{1}{\rho_k - \rho_{k-1}} + A T(\rho_{k-1}, \Phi_v).$$

Поэтому

$$T(\rho_1, \Phi_v^{(k-1)}) < A + A \ln \rho_s + A \sum_{j=0}^{s-1} \ln^+ \frac{1}{\rho_{j+1} - \rho_j} + A T(\rho_s, \Phi_v),$$

$$m\left(c, \frac{\Phi_v^{(k)}}{\Phi_v^{(k-1)}}\right) < A + A \ln \rho_s + A \sum_{j=0}^{s-1} \ln^+ \frac{1}{\rho_{j+1} - \rho_j} + A \ln^+ T(\rho_s, \Phi_v). \quad (77)$$

Вспомнив выражение для Φ_v (41), (36), из (77) выводим

$$m\left(c, \frac{\Phi_v^{(k)}}{\Phi_v^{(k-1)}}\right) < A + A \ln \rho_s + A \sum_{j=1}^s \ln^+ \frac{1}{\rho_j - \rho_{j-1}} + A \ln c + \\ + \sum_{v=1}^s \ln^+ T(\rho_s, \psi_v). \quad (78)$$

Из (68), (69) и (78) заключаем, что при всех достаточно больших c имеем неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(c e^{i\varphi}) d\varphi < A + A \ln c + A \ln \rho_s + A \sum_{v=1}^s \ln^+ T(\rho_s, \psi_v) + \\ + A \sum_{j=1}^s \ln^+ \frac{1}{\rho_j - \rho_{j-1}}. \quad (79)$$

Можно, очевидно, считать, что $T(c, \psi_v) \geq 1$ для $v = 1, \dots, s$.

Теперь уточним выбор чисел ρ_k . Положим

$$\rho_k = c + \frac{k}{s \cdot [T(c, \psi_1) + \dots + T(c, \psi_s)]} \quad (k = 0, 1, \dots, s). \quad (80)$$

Если $0 \leq k \leq s$, то, очевидно,

$$\rho_s \leq c + \frac{1}{T(c, \psi_k)}. \quad (81)$$

Формулы (79) и (80) приводят к неравенству

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(c e^{i\varphi}) d\varphi < A + A \ln c + A \sum_{k=1}^s \ln^+ T(c, \psi_k) +$$

$$+ A \sum_{k=1}^s \ln T \left(c + \frac{1}{T(c, \psi_k)}, \psi_k \right). \quad (82)$$

Воспользуемся теперь следующим свойством монотонно возрастающих функций (см. [10], гл. II, лемма 2.4): если функция $h(c)$ монотонно возрастает при $c > 0$, то

$$h \left(c + \frac{1}{h(c)} \right) < 2h(c) \quad (83)$$

для всех c кроме, возможно, множества конечной меры.

Полагая в нашем случае $h(c) = T(c, \psi_k)$, мы можем заключить из (82), что для всех положительных c вне множества конечной меры

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(ce^{i\varphi}) d\varphi < A + A \ln c + A \sum_{k=1}^s \ln T(c, \psi_k). \quad (84)$$

13. Сопоставляя формулы (43), (50)–(53), (67), (84) найдем, что при всех $c > 0$ (кроме, возможно, множества конечной меры)

$$T(c, G) < A \ln c + A \sum_{k=1}^s \ln T(c, \psi_k). \quad (85)$$

Но

$$T(c, \psi_k) = T \left(c, \frac{\psi_k}{\psi_s} \cdot \psi_s \right) \leq T \left(c, \frac{\psi_k}{\psi_s} \right) + T(c, \psi_s).$$

Учитывая (20) и то, что ψ_s — полином, получим

$$T(c, G) < A \ln T(c, B) + A \ln c,$$

то есть формулу (33) (см. конец п. 5). Из (30) и (33) следует (как мы уже отметили в п. 5) неравенство

$$T(c, B) < A \ln T(c, B) + A \ln c, \quad (27)$$

то есть

$$1 < A \frac{\ln T(c, B)}{T(c, B)} + A \frac{\ln c}{T(c, B)} \quad (86)$$

для всех c , кроме, быть может, множества конечной меры.

Допустим теперь, что хотя бы при одном k ($k = 1, 2, \dots, s-1$) функция $f_{ks} = \psi_k/\psi_s$ трансцендентна. Тогда, как известно (см. [8], стр. 35),

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\ln c}{T(c, f_{ks})} = 0,$$

и, в силу формулы (20),

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\ln c}{T(c, B)} = 0. \quad (87)$$

Так как $T(c, B)$ неограниченно возрастает с ростом c (это видно, в частности, из (20)), то при $c \rightarrow \infty$

$$\lim \frac{\ln T(c, B)}{T(c, B)} = 0.$$

Переходя затем в неравенстве (86) к пределу, когда s неограниченно возрастает (оставаясь вне исключительных интервалов конечной суммарной меры), приходим к противоречию.

Следовательно, все функции f_{ks} — рациональные, и, так как ψ_s — полином, то и все функции ψ_k ($k = 1, 2, \dots, s-1$) — также полиномы. Теорема 1 доказана.

14. Простым следствием из теоремы 1 является следующая

Теорема 2. *Всякая целая полианалитическая функция порядка n*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k f_k(z), \quad (1)$$

имеющая ограниченное множество нулей, представима в виде

$$f(z) \equiv e^{g(z)} P(z, \bar{z}), \quad (88)$$

где $g(z)$ — целая аналитическая функция, а $P(z, \bar{z})$ — n -аналитический полином.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(z) = z^{n-1} f(z). \quad (89)$$

Она, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 1 и поэтому представима в виде (22), так что

$$F(z) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(z) \cdot \bar{z}^k \right) \cdot e^{g(z)}, \quad (90)$$

где $\varphi_k(z)$ — полиномы от z ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Из (89) и (90) видно, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k z^{n-1} f_k(z) e^{-g(z)} = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z),$$

и поэтому имеем n тождеств

$$z^{n-1} f_k(z) e^{-g(z)} = \varphi_k(z) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (91)$$

Таким образом, полином $\varphi_k(z)$ делится на z^{n-1} , то есть

$$\varphi_k(z) = z^{n-1} \cdot Q_k(z),$$

где $Q_k(z)$ — полином ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Из (89) и (90) видно, что $f(z)$ допускает представление

$$f(z) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} Q_k(z) \cdot \bar{z}^k \right) \cdot e^{g(z)},$$

что и требовалось доказать.

Մ. Բ. ԲԱԼԿ

ԶՐՈՆԵՐԻ ՄԱՆՄԱՆԱՓԱԿ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՄԲ ԱՄԲՈՂՋ ՊՈԼԻԱՆԱԼԻՏԻԿ
ՖՈՒՆԿՅԻՍՆԵՐ՝

Ա մ փ ո փ ու մ

$f(z)$ ֆունկցիան կոչվում է պոլիանալիտիկ ամբողջ եթե նա ամբողջ
կոմպլեքս հարթության վրա ներկայացվում է հետևյալ տեսքով

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k f_k(z), \quad (1)$$

որտեղ բոլոր $f_k(z)$ -երը ամբողջ անալիտիկ ֆունկցիաներ են z -ից, իսկ $\bar{z}$ -ը
 z -ի կոմպլեքս համալուծն է:

Մերոմորֆ կորերի ապարատի և մերոմորֆ ֆունկցիաների արժեքների
բաշխման թեորիայի որոշ զնահատականների օգնությամբ ապացուցվում է
հետևյալ թեորեմը.

Յուրաքանչյուր (1) տեսքի ամբողջ պոլիանալիտիկ ֆունկցիա, որի գրոնե-
րի բազմությունը սահմանափակ է, կարելի է ներկայացնել երկու ֆունկցիա-
ների արտադրյալի տեսքով, որոնցից մեկը զրոներ չունեցող ամբողջ անալի-
տիկ ֆունկցիա է z -ից, իսկ մյուսը բազմանդամ է z և $\bar{z}$ փոփոխականներից:

M. B. BALK

ENTIRE POLYANALYTIC FUNCTIONS WITH A LIMITED
SET OF ZEROS

S u m m a r y

A function $f(z)$ is called an entire polyanalytic function if it may
be presented in the form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k f_k(z) \quad (1)$$

where all $f_k(z)$ are entire analytic functions in z , and $\bar{z}$ is the complex
conjugate to z .

Using some results about meromorphic curves and some ine-
qualities from the Nevanlinna value distribution theory, it is possible
to prove the following theorem:

Every entire polyanalytic function (1) with a limited set of zeros
may be presented as a product of an entire analytic function in z without
zeroes ($e^g(z)$) and a polynomial ($P(z, \bar{z})$) in the conjugate variables z
and $\bar{z}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *H. Cartan*. Sur les zéros des combinaisons des p fonctions holomorphes données, „Mathematica“, Cluj, 7 (1933), 5—31.
2. *А. А. Гольдберг*. Некоторые вопросы теории распределения значений, Дополнение к книге Г. Виттиха „Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям“, Физматгиз М. (1960), 289—300.
3. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л. (1941).
4. *М. Б. Балк*. Большая теорема Пикара для целых бивалентических функций, УМН, 20, вып. 2 (1965), 157—167.
5. *А. И. Маркушевич*. Теория аналитических функций, М., ГИТТЛ (1950).
6. *Б. А. Фукс*. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, М., (1962).
7. *R. Nevanlinna*. Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris (1929).
8. *Г. Виттих*. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, Физматгиз, М. (1960).
9. *Chuang Chi tai*. Sur la comparaison de la croissance d'une fonction méromorphe et de celle de sa dérivée, Bulletin des sciences mathématiques, 75 (1951), 171—190.
10. *W. Hayman*. Meromorphic functions, L. (1964).