Э. М. КЕГЕЯН

ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ В КРУГЕ

I

Пусть D — единичный круг в комплексной плоскости Z , S — единичная окружность, а $H_2(D)$ — класс функций, аналитических в D и интегрируемых с квадратом модулей по площади D .

Известно, что семейство многочленов полно в пространстве $H_2(D)$, т. е. для каждой функции $f(z)$ из класса $H_2(D)$ существует последовательность полиномов $P_n(z)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D |f(z) - P_n(z)|^2 d\sigma = 0.$$

Возникает вопрос, насколько эта аппроксимирующая $f(z)$ последовательность полиномов свободна на границе круга. Эта задача поставлена А. Л. Шагиняном и исследована в работах [1]—[3].

В статье [3] эта задача изучена в следующем виде.

Пусть $f(z) \in H_2(D)$, $E \subset S$ — всюду разрывное замкнутое множество, а $\varphi(\xi)$ — заданная на E непрерывная функция. Спрашивается: при каких ограничениях на E существует последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \iint_D |f(z) - P_n(z)|^2 d\sigma + \sup_{\xi \in E} |\varphi(\xi) - P_n(\xi)| \right\} = 0. \quad (1)$$

Доказано, что, если линейная мера множества E равна нулю, то аппроксимация вида (1) всегда возможна. Если же $\text{mes } E > 0$ и $C_s E = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$, то при условии $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \ln(b_k - a_k) > -\infty$ аппроксимация вида (1) невозможна.

Остался открытым вопрос: существуют ли множества положительной линейной меры, для которых все-таки аппроксимация вида (1) возможна?

В данной работе дается положительный ответ на поставленный вопрос.

Далее на основании этого результата доказывается (теорема 2), что для каждой пары функций $f(z) \in H_2(D)$ и измеримой на S функции $\varphi(\xi)$ (которая может принимать как конечные, так и бесконечные значения) существует последовательность полиномов, аппроксимирующая $f(z)$ в среднем в D , и одновременно стремящаяся к $\varphi(\xi)$ почти всюду на S .

Теорема 3 утверждает, что нельзя „почти всюду“ на S'' заменить на „всюду на S'' “.

II

Теорема 1. Существует на S замкнутое множество A положительной линейной меры, для которого аппроксимация вида (1) возможна для каждой пары функции $f(z) \in H_2(D)$ и $\varphi(\xi) \in C(A)$, где $C(A)$ — класс непрерывных на A функций.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Для каждой пары чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует аналитическая в D и непрерывная вплоть до границы функция $\chi_{\varepsilon, \delta}(z)$ такая, что

$$1. \quad \iint_D |1 - \chi_{\varepsilon, \delta}(z)|^2 d\sigma < \varepsilon,$$

$$2. \quad |\chi_{\varepsilon, \delta}(\xi)| < \varepsilon \quad \text{на некотором замкнутом множестве } E_{\varepsilon, \delta} \subset S \text{ с мерой, большей } 2\pi - \delta.$$

Доказательство. Подберем целые положительные числа n, k и m следующим образом: $n > \ln \frac{1}{\varepsilon}$, $k > \frac{\pi}{\delta}$,

$$m > \frac{ae^{bnk}}{\varepsilon^6},$$

где a и b — абсолютные константы, которые мы подберем позже, и разделим единичную окружность S на m равных частей точками $\exp\{i\xi_t\}$, где $\xi_t = \frac{2\pi t}{m}$ ($t = 0, 1, \dots, m-1$).

Далее каждый из сегментов $[\xi_t, \xi_{t+1}]$ вновь разделим на $2k+1$ равных частей точками $\exp\{i\xi_{t,q}\}$, где $\xi_{t,q} = \xi_t + \frac{2\pi q}{(2k+1)m}$ ($q = 1, 2, \dots, 2k$).

На окружности S рассмотрим функцию $\varphi(\xi) = \varphi(e^{i\xi}) = \varphi(\theta)$:

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 2kn, & \text{при } \xi_{t,k} < \theta < \xi_{t,k+1} \\ -n & \text{в остальных точках окружности.} \end{cases}$$

Пусть

$$u(z) = u(re^{i\tau}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta-\varphi)} d\theta,$$

а $v(z)$ — сопряженная с $u(z)$ гармоническая функция, удовлетворяющая условию $v(0) = 0$.

Покажем, что при подходящем выборе чисел a и b аналитическая в D функция

$$\Phi_{\varepsilon, \delta}(z) = \exp\{\psi(z)\}$$

где

$$\psi(z) = u(z) + iv(z)$$

удовлетворяет условиям 1 и 2 леммы.

Действительно,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{m-1} \int_{\xi_l}^{\xi_{l+1}} \varphi(\theta) P(r, \theta, \varphi) d\theta, \quad (2)$$

где $P(r, \theta, \varphi)$ — ядро Пуассона, а $\xi_m = \xi_0$.

По формуле Лагранжа

$$P(r, \theta, \varphi) = P(r, \xi_l, \varphi) + P'_\theta(r, \bar{\theta}, \varphi) (\theta - \xi_l),$$

$\xi_l < \bar{\theta} < \theta$. Легко видеть, что для всех θ и φ

$$|P'_\theta(r, \theta, \varphi)| < \frac{4}{(1-r)^3}. \quad (3)$$

Из определения функции $\varphi(\theta)$, (2) и (3) получим

$$|u(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{m-1} \int_{\xi_l}^{\xi_{l+1}} |\varphi(\theta) P'_\theta(r, \bar{\theta}, \varphi) (\theta - \xi_l)| d\theta < \frac{C_1}{(1-|z|)^3} \frac{kn}{m}, \quad (4)$$

где C_1 — абсолютная константа ($C_1 = 8\pi$).

Далее по формуле Лузина (см. [4], стр. 214),

$$v(re^{i\theta}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{u(re^{i(\theta+\alpha)}) - u(re^{i(\theta-\alpha)})}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} d\alpha = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi u'_\theta(re^{i\bar{\theta}}) \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} d\alpha$$

$$(\theta - \alpha < \bar{\theta} < \theta + \alpha). \quad (5)$$

Из (2) видно, что

$$u'_\theta(re^{i\bar{\theta}}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{m-1} \int_{\xi_l}^{\xi_{l+1}} \varphi(\theta) \frac{2r(1-r^2) \sin(\theta - \bar{\theta})}{[1+r^2-2r \cos(\theta - \bar{\theta})]^2} d\theta. \quad (6)$$

Обозначив через J_l слагаемые этой суммы, имеем

$$J_l = \frac{2r}{1-r^2} \int_{\xi_l}^{\xi_{l+1}} \varphi(\theta) \sin(\theta - \bar{\theta}) P^2(r, \theta, \bar{\theta}) d\theta = \frac{2r}{1-r^2} \left| \int_{\xi_l}^{\xi_{l+1}} \varphi(\theta) \times \right.$$

$$\times \sin(\xi_l - \bar{\theta}) P^2(r, \xi_l, \bar{\theta}) d\theta + \left. \int_{\xi_l}^{\xi_{l+1}} \varphi(\theta) \frac{d}{d\theta} [\sin(\theta - \bar{\theta}) P^2(r, \theta, \bar{\theta})] \right|_{\theta = \bar{\theta}} (\theta - \xi_l) d\theta$$

$$(\xi_l < \bar{\theta} < \theta).$$

Так что

$$|J_l| \leq \frac{1}{1-r} \int_{\xi_l}^{\xi_{l+1}} |\varphi(\theta) [P^2(r, \bar{\theta}, \bar{\theta}) + 2P(r, \bar{\theta}, \bar{\theta}) |P'_\theta(r, \bar{\theta}, \bar{\theta})|] (\theta - \xi_l) d\theta.$$

Учитывая определение функции $\varphi(\theta)$, неравенство (3) и то, что

$$0 < P(r, \theta, \varphi) \leq \frac{2}{1-r}, \text{ получим}$$

$$|J_i| < \frac{2\pi C_2}{(1-r)^5} \cdot \frac{kn}{m^2}.$$

Здесь C_2 — абсолютная константа ($C_2 = 2^6\pi$).

Отсюда и из (6) имеем

$$|u'_0(re^{i\theta})| < \frac{C_2}{(1-r)^5} \cdot \frac{kn}{m}.$$

Из последнего неравенства и из (5) вытекает, что

$$|v(z)| < \frac{2C_2}{(1-|z|)^5} \cdot \frac{kn}{m},$$

$$|(v(z))'| < \frac{2C_2}{(1-|z|)^5} \cdot \frac{kn}{m},$$

а это совместно с (4) приведет к оценке

$$|\psi(z)| < \frac{C_3}{(1-|z|)^5} \cdot \frac{kn}{m} \quad (7)$$

(здесь $C_3 = C_1 + 2C_2$ — абсолютная константа).

При

$$R = 1 - \frac{\varepsilon}{16\pi} e^{-4kn} \quad (8)$$

имеем

$$\iint_D |1 - \Phi_{\varepsilon, \delta}(z)|^2 d\sigma = \iint_{|z| < R} + \iint_{K_R}, \quad (9)$$

где K_R — кольцо $R < |z| < 1$.

Пользуясь определением функции φ (6) и (8), получим

$$\iint_{K_R} |1 - \Phi_{\varepsilon, \delta}(z)|^2 d\sigma < [2e^{2kn}]^2 \text{пл. } K_R < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (10)$$

Легко оценивается и первое слагаемое правой части равенства (9)

$$\begin{aligned} \iint_{|z| < R} |1 - \Phi_{\varepsilon, \delta}(z)|^2 d\sigma &\leq \iint_{|z| < R} |\psi(z)|^2 \left[1 + \frac{|\psi(z)|}{2!} + \dots + \frac{|\psi(z)|^{n-1}}{n!} + \right. \\ &\left. + \dots \right]^2 d\sigma < \pi \frac{C_3^2}{(1-R)^{10}} \cdot \frac{k^2 n^2}{m^2} \exp \left\{ \frac{2C_3}{(1-R)^5} \cdot \frac{kn}{m} \right\}. \end{aligned}$$

Если в условии $m > \frac{ae^{bnk}}{\varepsilon^6}$, наложенном на m в начале доказательства леммы, взять $a = c_3(16\pi)^6$ и $b = 21$, то нетрудно видеть, что

$$\iint_{|z| < R} |1 - \Phi_{\varepsilon, \delta}(z)|^2 d\sigma < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (11)$$

Так что из (9), (10) и (11) следует

$$\iint_D |1 - \Phi_{n, \delta}(z)|^2 d\sigma < \frac{3\varepsilon}{4}. \quad (12)$$

Далее очевидно, что

$$|\Phi_{n, \delta}(\xi)| = e^{-n} < \varepsilon \quad (13)$$

на некотором множестве $E_{n, \delta} \subset S$ с линейной мерой $\frac{2\pi}{m(2k+1)} \cdot m \cdot 2k$.

Так как $k > \frac{\pi}{\delta}$, то

$$\text{mes } E_{n, \delta} > 2\pi - \delta. \quad (14)$$

Методами, используемыми при доказательстве леммы 1 статьи [3], можно построить непрерывную на $\bar{D}$ и аналитическую в D функцию $\Psi(z)$ со следующими свойствами:

$$1. \quad \begin{aligned} \Psi(z) &\neq 0 \text{ в } D, \\ |\Psi(z)| &< 1 \text{ на } \bar{D}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$2. \quad \begin{aligned} \Psi(\xi_{t, k}) &= \Psi(\xi_{t, k+1}) = 0 \\ \text{при } t &= 0, 1, \dots, m-1; \end{aligned}$$

$$3. \quad \iint_D \frac{d\sigma}{|\Psi(z)|^2} < \frac{\varepsilon}{4 \cdot 10^2}. \quad (16)$$

Тогда аналитическая в D функция

$$\chi_{n, \delta}(z) = \Psi(z) \Phi_{n, \delta}(z)$$

будет обладать свойствами

$$1. \quad \chi_{n, \delta}(z) \text{ непрерывна на } \bar{D};$$

2. $|\chi_{n, \delta}(z)| < \varepsilon$ на некотором замкнутом множестве $E_{n, \delta}$ с линейной мерой, большей $2\pi - \delta$;

$$3. \quad \iint_D |1 - \chi_{n, \delta}(z)|^2 d\sigma < \varepsilon.$$

Действительно, так как ограниченная в D функция $\Phi_{n, \delta}(z)$ непрерывна на $\bar{D}$, за исключением точек $\{\xi_{t, k}\}$ и $\{\xi_{t, k+1}\}$ ($t = 0, 1, \dots, m-1$), то функция $\chi_{n, \delta}(z)$ непрерывна на $\bar{D}$. Условие 2, следует из (13), (14) и (15), а последнее условие можно получить из (12), (15) и (16) следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_D |1 - \chi_{n, \delta}|^2 d\sigma &= \iint_D |\Psi|^2 \left| \frac{1}{\Psi} - \Phi_{n, \delta} \right|^2 d\sigma < \iint_D \left| \frac{1}{\Psi} - \Phi_{n, \delta} \right|^2 d\sigma \leq \\ &\leq \left[\sqrt{\iint_D |1 - \Phi_{n, \delta}|^2 d\sigma} + \sqrt{\iint_D \left| \frac{1}{\Psi} - 1 \right|^2 d\sigma} \right]^2. \end{aligned}$$

Но

$$\iint_D \left| \frac{1}{\Psi} - 1 \right|^2 d\sigma < 4 \iint_D \frac{d\sigma}{|\Psi|^2} < \frac{\varepsilon}{10^2}$$

следовательно

$$\iint_D |1 - \lambda_{\varepsilon_k, \delta_k}(z)|^2 d\sigma < \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\varepsilon} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{10} \right)^2 < \varepsilon.$$

Этим и завершается доказательство леммы. Теперь можно перейти к доказательству теоремы 1. С этой целью берем последовательности чисел $\varepsilon_k > 0$ и $\delta_k > 0$ такие, что

1. $\varepsilon_k \rightarrow 0$,
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \pi$. (17)

Для каждой пары ε_k и δ_k построим множество $E_k = E_{\varepsilon_k, \delta_k}$ и функцию $\lambda_k(z) = \lambda_{\varepsilon_k, \delta_k}(z)$ с указанными в лемме свойствами.

Так как функция $\lambda_k(z)$ аналитична в D и непрерывна на $\bar{D}$, то существует полином $P_k(z)$ такой, что

$$|\lambda_k(z) - P_k(z)| < \varepsilon_k \text{ при } z \in \bar{D}.$$

Учитывая неравенства 1 и 2 леммы, которым удовлетворяет $\lambda_k(z)$, получим

$$\begin{aligned} \iint_D |1 - P_k(z)|^2 d\sigma &< 4\pi\varepsilon_k, \\ \sup_{\xi \in E_k} |P_k(\xi)| &< 2\varepsilon_k. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим замкнутое множество $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. Так как $\text{mes } E_k > 2\pi - \delta_k$, то из (17) следует, что $\text{mes } A > \pi$. Кроме того, из (18) вытекает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \iint_D |1 - P_k(z)|^2 d\sigma + \sup_{\xi \in E} |P_k(\xi)| \right\} = 0. \quad (19)$$

Пусть теперь $f(z)$ и $\varphi(\xi)$ — пара функций, упомянутых в теореме 1, и пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число.

По теореме Рунге существует полином $Q_1(z)$ такой, что

$$\iint_D |f(z) - Q_1(z)|^2 d\sigma < \frac{\varepsilon}{5}. \quad (20)$$

Далее, согласно теореме С. Н. Мергеляна (см. [5]), существует многочлен $Q_2(z)$ такой, что

$$|\varphi(\xi) - Q_2(\xi)| < \frac{\varepsilon}{10} \text{ при } \xi \in A. \quad (21)$$

Пусть

$$T(z) = Q_1(z) - Q_2(z) \quad (22)$$

и

$$M = \max \{1; \max_{z \in \bar{D}} |T(z)|\}. \quad (23)$$

Далее из (19) следует существование полинома $Q_3(z)$ такого, что

$$\iint_D |1 - Q_3(z)|^2 d\sigma + \sup_{z \in A} |Q_3(z)| < \frac{\varepsilon}{20M^2}. \quad (24)$$

Беря в качестве $Q_3(z)$ многочлен $[Q_3(z) \cdot T(z)]$ и учитывая (23) и (24), получим

$$\iint_D |T(z) - Q_4(z)|^2 d\sigma + \sup_{z \in E} |Q_4(z)| < \frac{\varepsilon}{20}. \quad (25)$$

Но тогда из (21), (22) и (25) имеем

$$\begin{aligned} \iint_D |Q_1 - [Q_2 + Q_4]|^2 d\sigma + \sup_{z \in A} |\varphi(z) - [Q_2(z) + Q_4(z)]| < \\ < \frac{\varepsilon}{20} + \frac{\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{20} = \frac{\varepsilon}{5}. \end{aligned} \quad (26)$$

Наконец, обозначая $P(z) = Q_2(z) + Q_4(z)$ и учитывая (20) и (26), заключаем, что

$$\begin{aligned} \iint_D |f - P|^2 d\sigma + \sup_{z \in A} |\varphi(z) - P(z)| < \frac{\varepsilon}{5} + \\ + \left\{ \left[\iint_D |f - Q_1|^2 d\sigma \right]^{1/2} + \left[\iint_D |Q_1 - P|^2 d\sigma \right]^{1/2} \right\}^2 < \frac{\varepsilon}{5} + \\ + \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{5}} \right)^2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

и, так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то теорема 1 доказана.

Замечание. В ходе доказательства теоремы 1 множество A пришлось взять в следующем виде: $A = \prod_{k=1}^{\infty} E_k$, однако нетрудно видеть, что в качестве A можно было взять любое из множеств

$$A_m = \prod_{k=m}^{\infty} E_k. \quad (27)$$

Этим мы воспользуемся при доказательстве следующей теоремы.

Пусть $\mathcal{M}(S)$ — класс измеримых на S функций (функции этого класса могут принимать как конечные, так и бесконечные значения).

Теорема 2. Для каждой пары функций $f \in H_2(D)$ и $\varphi \in \mathcal{M}(S)$ можно построить последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$ такую, что

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D |f - P_n|^2 d\sigma = 0,$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\xi) = \varphi(\xi) \text{ почти всюду на } S.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(\xi) = u(\xi) + iv(\xi)$. Обозначим соответственно через $u_m(\xi)$ и $v_m(\xi)$ срезки функций $u(\xi)$ и $v(\xi)$ числом m , т. е.

$$u_m(\xi) = \begin{cases} u(\xi), & \text{если } |u(\xi)| \leq m, \\ m \cdot \text{sign } u(\xi), & \text{если } |u(\xi)| > m, \end{cases}$$

$$v_m(\xi) = \begin{cases} v(\xi), & \text{если } |v(\xi)| \leq m, \\ m \cdot \text{sign } v(\xi), & \text{если } |v(\xi)| > m. \end{cases}$$

Пусть $\varphi_k(\xi) = u_k(\xi) + iv_k(\xi)$ ($k=1, 2, \dots$).

Пусть, далее, $\{\tau_{jk}\}$ — последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau_{jk} < \infty. \quad (28)$$

Ограниченная функция $\varphi_k(\xi)$ измерима на S , следовательно, по теореме Егорова, существует замкнутое множество $e_k \subset S$ такое, что

$$\varphi_k(\xi) \text{ непрерывна на } e_k, \quad \text{mes } e_k > 2\pi - \tau_{jk}. \quad (29)$$

Обозначим через

$$R_m = \prod_{k=m}^{\infty} e_k. \quad (30)$$

Из (30) и (29) следует, что

$$R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R_m \subset \dots$$

и

$$\text{mes } R_m > 2\pi - \sum_{k=m}^{\infty} \tau_{jk}. \quad (31)$$

Рассмотрим затем множества A_m ($m=1, 2, \dots$), определенные соотношением (27). Очевидно

$${}_1A \subset A_2 \subset \dots \subset A_m \subset \dots$$

и

$$\text{mes } A_m > 2\pi - \sum_{k=m}^{\infty} \delta_k. \quad (32)$$

Если теперь обозначить

$$T_m = A_m R_m, \quad T = \bigcap_{m=1}^{\infty} T_m,$$

то из (32), (31), (17) и (28) получим

$$\text{mes } T = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes } T_m \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ 2\pi - \sum_{k=m}^{\infty} (\delta_k + \tau_{jk}) \right\},$$

г. е.

$$\text{mes } T = 2\pi. \quad (33)$$

Пусть $\{a_k\}$ — последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю.

Так как функция $\varphi_m(\xi)$ непрерывна на $R_m \supset T_m$, то она непрерывна и на T_m . Далее $T_m \subset A_m$, следовательно, по теореме 1, существует полином $P_m(z)$ такой, что

$$\iint_D |f - P_m|^2 d\sigma + \sup_{\xi \in T_m} |\varphi_m(\xi) - P_m(\xi)| < \varepsilon_m.$$

Отсюда вытекает, что

1. $\lim_{m \rightarrow \infty} \iint_D |f - P_m|^2 d\sigma = 0,$
2. $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m(\xi) = \varphi(\xi)$ при $\xi \in T.$

Этим и завершается доказательство теоремы 2, так как согласно (33) $\text{mes } T = 2\pi.$

Теорема 3. Если для пары функций $f(z)$ и $\varphi(\xi)$ соответственно из классов $H_2(D)$ и $\mathcal{M}(S)$ (предполагается, что $\varphi(\xi)$ всюду конечна на S) существует последовательность полиномов $P_n(\xi)$ такая, что

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D |f(z) - P_n(z)|^2 d\sigma = 0,$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\xi) = \varphi(\xi)$ всюду на $S,$

то существует всюду плотное на S открытое множество, на котором почти все радиальные граничные значения $f(z)$ совпадают с $\varphi(\xi).$

Доказательство. Предварительно заметим, что если последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$ удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы и кроме того равномерно ограничена на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset S,$ то на этом же интервале почти все радиальные граничные значения функции $f(z)$ совпадают со значениями функции $\varphi(\xi).$

Действительно, из условия 1 теоремы следует, что интегралы квадратов модулей полиномов $\{P_n(z)\}$ по области D равномерно ограничены

$$\iint_D |P_n(z)|^2 d\sigma \leq C.$$

Отсюда следует, что для всех кругов D_1 с центром в z_1 и с радиусом $1 - |z_1|$

$$\iint_{D_1} |P_n(z)|^2 d\sigma \leq C.$$

Из последнего неравенства легко получить оценку

$$|P_n(z_1)| \leq \frac{C_1}{1 - |z_1|}, \quad (34)$$

где C_1 — абсолютная константа.

Теперь рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \exp \left\{ \frac{1}{ze^{-i\alpha} - 1} + \frac{1}{ze^{-i\beta} - 1} \right\}. \quad (35)$$

Очевидно эта функция аналитична в D , непрерывна вплоть до границы и по модулю не превосходит единицы.

Пусть

$$F_n(z) = \Phi(z) P_n(z), \quad (36)$$

а $\Delta_{\alpha\beta}$ — сектор круга D , опирающийся на интервал (α, β) . Из (34), (35) и (36) заключаем, что

$$|F_n(re^{i\alpha})| < \frac{C_1}{1-r} \exp \left\{ -\frac{1}{1-r} \right\}$$

и, так как правая часть этого неравенства достигает своего наибольшего значения на промежутке $0 \leq r \leq 1$ в точке $r=0$, то

$$|F_n(re^{i\alpha})| \leq C_2 \text{ при } 0 \leq r \leq 1, \quad (37)$$

где C_2 — абсолютная константа ($C_2 = \frac{C_1}{e}$).

Аналогичным образом получим, что

$$|F_n(re^{i\beta})| \leq C_2 \text{ при } 0 \leq r \leq 1. \quad (38)$$

Из равномерной ограниченности полиномов $\{P_n(\xi)\}$ на (α, β) , а также из (37) и (38) следует, что

$$|F_n(z)| \leq M \quad (39)$$

на $\overline{\Delta_{\alpha\beta}}$, где M — константа.

Далее, так как в точках интервала (α, β) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\xi) = \varphi(\xi)$, то по теореме Егорова для каждого n существует замкнутое множество $E_n \subset (\alpha, \beta)$ такое, что

$$\text{mes } E_n > \frac{n(\beta - \alpha)}{n + 1}; \quad (40)$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(\xi) = \varphi(\xi)$ равномерно на E_n .

Поскольку почти каждая точка множества E_n является его точкой плотности, то существует замкнутое множество A_n , состоящее только из точек плотности множества E_n и обладающее свойствами (40), т. е.

$$\text{mes } A_n > \frac{n(\beta - \alpha)}{n + 1}; \quad (41)$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(\xi) = \varphi(\xi)$ равномерно на A_n .

Пусть

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n. \text{ Очевидно} \\ \text{mes } A = 3 - \alpha. \quad (42)$$

Покажем, что радиальные граничные значения функции $f(z)$ совпадают с $\varphi(\xi)$ на A .

Действительно, пусть $\xi_0 \in A$ — произвольная точка. Для некоторого номера $n = n_0$ множество A_n содержит точку ξ_0 и, так как функция $\varphi(\xi)$ непрерывна на A_n , то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех точек $\xi \in A_n$, расстояния которых до ξ_0 меньше δ , справедливо неравенство

$$|\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon.$$

На множестве A_n последовательность $\{P_n(\xi)\}$ стремится к $\varphi(\xi)$ равномерно, следовательно, начиная с некоторого номера $k \geq k_0$, будем иметь

$$|P_k(\xi) - \varphi(\xi_0)| < 2\varepsilon \quad (43)$$

для всех $\xi \in E_n$, расстояния которых до ξ_0 меньше δ . Но функция $\Phi(z)$ непрерывна на замкнутом круге $\bar{D}$, следовательно она там равномерно непрерывна. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta_1 > 0$ такое, что для произвольных двух точек z_1 и z_2 из круга $\bar{D}$, находящихся друг от друга на расстоянии меньшем, чем δ_1 , имеем

$$|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)| < \varepsilon. \quad (44)$$

Учитывая неравенства (43), (44) и то, что функция $\Phi(z)$ по модулю ограничена единицей в $\bar{D}$, получим

$$|F_k(\xi) - \varphi(\xi_0) \Phi(\xi_0)| < (2 + |\varphi(\xi_0)|) \varepsilon \quad (45)$$

при $k \geq k_0$ и всех $\xi \in A_n$, расстояние которых до точки ξ_0 меньше $\delta = \min\{\delta, \delta_1\}$.

С другой стороны, так как ξ_0 является точкой плотности множества A_n , то, очевидно, гармоническая мера относительно сектора $\Delta_{\alpha\beta}$ той порции A_n , которая попадает в интервал $(\xi_0 - \bar{\delta}, \xi_0 + \bar{\delta})$ (обозначим эту порцию через $A_n(\bar{\delta})$), стремится к единице при z стремящемся к ξ_0 вдоль радиуса $\arg z = \arg \xi_0 = \theta_0$:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \omega(re^{i\theta_0}, A_n(\bar{\delta}); \Delta_{\alpha\beta}) = 1.$$

Следовательно, для $\varepsilon > 0$ существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\omega(re^{i\theta_0}, A_n(\bar{\delta}); \Delta_{\alpha\beta}) > 1 - \varepsilon, \quad (46)$$

как только $0 < 1 - r < \gamma$.

Применяя теорему о двух константах (см. [6]) к функции $[F_k(z) - \varphi(\xi_0) \Phi(\xi_0)]$ и к области $\Delta_{\alpha\beta}$, а также, учитывая неравенства (39), (45) и (46), получим

$$|F_k(re^{i\theta_0}) - \Phi(e^{i\theta_0}) \varphi(e^{i\theta_0})| < \varepsilon^{1-\gamma} (2 + M + |\varphi(\xi_0)|), \quad (47)$$

как только $k \geq k_0$ и $0 < 1 - r < \gamma$.

Переходя в (47) к пределу и используя условие 1 теоремы будем иметь

$$|f(re^{i\theta_0}) \Phi(re^{i\theta_0}) - \varphi(\xi_0) \Phi(\xi_0)| \leq \varepsilon^{1-\alpha} (2 + M + |\varphi(\xi_0)|) \quad (48)$$

при $0 < 1 - r < \gamma$.

Но $\alpha < \theta_0 < \beta$, так что

$$C_{\theta_0} = \min_{0 < r < 1} |\Phi(re^{i\theta_0})| > 0.$$

Следовательно, при $0 < 1 - r < \gamma$

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta_0}) - \varphi(e^{i\theta_0})| &\leq \frac{1}{C_{\theta_0}} |f(re^{i\theta_0}) \Phi(re^{i\theta_0}) - \Phi(re^{i\theta_0}) \cdot \varphi(e^{i\theta_0})| \leq \\ &\leq \frac{1}{C_{\theta_0}} |f(re^{i\theta_0}) \Phi(re^{i\theta_0}) - \varphi(\xi_0) \Phi(\xi_0)| + \\ &+ \frac{1}{C_{\theta_0}} |\Phi(re^{i\theta_0}) - \Phi(\xi_0)| |\varphi(\xi_0)|. \end{aligned}$$

Если взять $0 < 1 - r < \min\{\gamma, \delta_1\}$, то из (48) и (44) получим

$$|f(re^{i\theta_0}) - \varphi(e^{i\theta_0})| < \frac{1}{C_0} \varepsilon^{1-\alpha} (2 + M + |\varphi(\xi_0)|)^\alpha + \frac{\varepsilon}{C_{\theta_0}} |\varphi(\xi_0)|,$$

то есть

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta_0}) = \varphi(e^{i\theta_0}).$$

Таким образом имеем, что радиальные граничные значения функции $f(z)$ почти всюду на интервале (α, β) окружности S совпадают со значениями функции $\varphi(\xi)$, если только последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$, удовлетворяющая условиям теоремы, равномерно ограничена на (α, β) .

Пусть теперь, вопреки утверждению теоремы, внутри некоторого интервала (a, b) не существует интервала, на котором почти все радиальные граничные значения функции $f(z)$ существуют и равны $\varphi(\xi)$. Согласно вышесказанному последовательность $P_n(z)$ не ограничена равномерно на (a, b) . Следовательно, существует отрезок $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ и такой номер n_1 , что

$$|P_{n_1}(\xi)| > 1 \text{ при } \xi \in [a_1, b_1].$$

Аналогично найдем номер $n_2 > n_1$ и промежуток $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ такой, что

$$|P_{n_2}(\xi)| > 2 \text{ при } \xi \in [a_2, b_2].$$

И вообще, для каждого k , как только найден промежуток $[a_k, b_k]$ и номер n_k , можно построить промежуток $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$, на котором один из полиномов последовательности $\{P_n(z)\}$ (допустим $P_{n_{k+1}}(z)$ ($n_{k+1} > n_k$)) по модулю превосходит $(k+1)$

$$|P_{n_{k+1}}(\xi)| > k + 1 \text{ при } \xi \in [a_{k+1}, b_{k+1}].$$

Если $\bar{\xi} \in \prod_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$, то последовательность $\{P_k(\bar{\xi})\}$ не может

стремиться к $\varphi(\xi)$, вопреки условиям теоремы. Значит внутри всякого интервала существует другой интервал, на котором почти все радиальные граничные значения функции $f(z)$ существуют и совпадают со значениями функции $\varphi(\xi)$.

Ереванский государственный
университет

Поступило 1.III.66

Է. Մ. ՔԵԿԵՅԱՆ

ՄԻԱԺԱՄԱՆԱԿՅԱ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ (ՇՐՋԱՆՈՒՄ)

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիցուկ $f \in H_2(D)$ (այսինքն f -ը D միավոր շրջանում մոդուլի քառակուսով ինտեգրելի ցանկացած անալիտիկ ֆունկցիա է), E -ն՝ միավոր շրջանագծի վրա մի փակ փոշիացած բազմություն է, իսկ $\varphi(\xi)$ -ն՝ E -ի վրա տրված կոմպլեքս արժեքներ ընդունող մի անընդհատ ֆունկցիա է:

Ներկա աշխատանքում փնտրվում է բազմանդամների հաջորդականություն, որը միջին իմաստով մոտարկում է $f(z)$ -ը D -ում և միաժամանակ հավասարաչափ $\varphi(\xi)$ -ն E -ի վրա: Կառուցվում է դրական զծային շափի մի E բազմություն, որի համար այդպիսի մոտարկում հնարավոր է ցանկացած f և φ ֆունկցիաների զույգի համար: Բացի այդ ցույց է տրվում, որ միավոր շրջանագծի վրա տրված ամեն մի շափելի $\psi(\xi)$ ֆունկցիայի համար (որը կարող է հավասարվել ∞ -ի դրական շափի բազմության վրա) և ամեն մի $f(z)$ -ի համար՝ $H_2(D)$ -ից կարելի է գտնել բազմանդամների մի հաջորդականություն, որը միավոր շրջանում միջին իմաստով $f(z)$ -ը մոտարկելով հանդերձ զուգամիտում է $\psi(\xi)$ -ին համարյա ամենուրեք միավոր շրջանագծի վրա: Ընդորում, ցույց է տրվում, որ «համարյա ամենուրեքը» չի կարելի փոխարինել «ամենուրեք»-ով:

E. M. KEHEVAN

ON SIMULTANEOUS APPROXIMATIONS IN THE UNIT CIRCLE

S u m m a r y

Let $H_2(D)$ denote the class of analytic complex-valued functions $f(z)$ in the unit circle D for which $\iint_D |f(z)|^2 dx dy < \infty$ ($z = x + iy$). Let E be a closed set dense on $|z|=1$ and let $\varphi(\xi)$ be a complex-valued continuous function given on E .

The object of the paper is to find a sequence of polynomials for every similar pair of functions f and φ that would average $f(z)$ in D and simultaneously converge to $\varphi(\xi)$ uniformly on E . A closed set of positive measure on $|z|=1$ is constructed where such an approximation is possible. We also prove that for every measurable function $\psi(\xi)$ given on $|\xi|=1$ (which may be equal to ∞ on a set of positive linear measure) and for each function $f \in H_2(D)$ there exists a sequence of polynomials which approximates $f(z)$ in the mean over D and simulta-

neously converges to $\psi(z)$ almost everywhere on $|z|=1$. It is shown, however, that „almost everywhere on $|z|=1$ “ should not be replaced by „everywhere on $|z|=1$ “.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Л. Шапнян. К вопросу о весовом приближении средними квадратичными в области комплексного аргумента, ДАН Арм.ССР, XVI, № 1 (1953).
2. А. А. Талалян и Э. М. Кегелян. О средней полиномиальной аппроксимации в единичном круге, ДАН Арм.ССР, XXXI, № 1 (1960).
3. Э. М. Кегелян. О смешанной полиномиальной аппроксимации, ДАН Арм.ССР, XXXI, № 3 (1960).
4. Н. Н. Лузин. Интеграл и тригонометрический ряд, Изд. 2, М. (1951).
5. С. Н. Мергелян. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2 (1952).
6. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М.-Л. (1941).