ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, 1966, № 2 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОКРУЖНОСТИ*

§ 3. Формула типа Кристоффеля. Рекуррентные формулы

3.1. Согласно лемме 5, для ядер

$$S_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(\zeta)}\, \varphi_k(z) \quad (n \geqslant 0) \tag{3.1}$$

системы Мальмквиста справедливо представление:

$$S_n(\zeta; z) = \frac{1 - \overline{B_{n+1}(\zeta)}\, B_{n+1}(z)}{1 - \bar{\zeta} z}. \tag{3.2}$$

Преобразуем правую часть формулы (3.2). С этой целью заметим сначала, что

$$\varphi_{n+1}(z) = \frac{(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\alpha}_{n+1} z} \prod_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} =$$

$$= \frac{(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\alpha}_{n+1} z} B_{n+1}(z) = \frac{|\alpha_{n+1}|}{\alpha_{n+1}} \frac{(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}}{\alpha_{n+1} - z} B_{n+2}(z).$$

Отсюда следует, во-первых, что

$$\overline{B_{n+1}(\zeta)}\, B_{n+1}(z) = \frac{(1 - \alpha_{n+1} \bar{\zeta})(1 - \bar{\alpha}_{n+1} z)}{1 - |\alpha_{n+1}|^2} \overline{\varphi_{n+1}(\zeta)}\, \varphi_{n+1}(z) \tag{3.3}$$

и, во-вторых, так как

$$\bar{B}_{n+2}\left(\frac{1}{z}\right) = B_{n+2}^{-1}(z),$$

то

$$1 \equiv \frac{(1 - \alpha_{n+1} \bar{\zeta})(1 - \bar{\alpha}_{n+1} z)}{1 - |\alpha_{n+1}|^2} \left\{ \overline{\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta} \bar{\varphi}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \right\} \frac{B_{n+2}(z)}{z} \bar{\varphi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{3.4}$$

Подставляя значения (3.3) и (3.4) в правую часть формулы (3.2), будем иметь:

---

* Окончание. Начало статьи см. в № 1, 1966 г.

$$S_n(\zeta; z) = \frac{\overline{(1-\alpha_{n+1}\zeta)}\,(1-\bar{\alpha}_{n+1} z)}{1-|\alpha_{n+1}|^2} \times$$

$$\times \frac{\overline{\left[\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\bar{\varphi}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]}\frac{B_{n+2}(z)}{z}\bar{\varphi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) - \overline{\varphi_{n+1}(\zeta)}\,\varphi_{n+1}(z)}{1-\bar{\zeta} z}. \tag{3.5}$$

3.2. Докажем теперь, что формула (3.5) остается справедливой и для ядер $S_n(\zeta; z)$ произвольного распределения $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$.

Теорема 2. *При любом $n \geqslant 0$, z и ζ для ядра $S_n(\zeta; z)$ любого распределения $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$ справедлива формула:*

$$S_n(\zeta; z) = \frac{\overline{(1-\alpha_{n+1}\zeta)}\,(1-\bar{\alpha}_{n+1} z)}{1-|\alpha_{n+1}|^2} \times$$

$$\times \frac{\overline{\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\frac{B_{n+2}(z)}{z}\bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) - \overline{\Phi_{n+1}(\zeta)}\,\Phi_{n+1}(z)}{1-\bar{\zeta} z}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Заметим сначала, что, в силу формулы (2.40),

$$\frac{B_{n+2}(z)}{z}\bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) = -\{k_{n+1}\varphi_0^{(n+1)}(z) + \cdots + \bar{l}_{n+1}\varphi_{n+1}^{(n+1)}(z)\}, \tag{3.7}$$

где $\{\varphi_k^{(n+1)}(z)\}_0^{n+1}$ есть система Мальмквиста, ассоциированная с упорядоченной группой чисел $\{\alpha_{n+1}, \alpha_n, \cdots, \alpha_0\}$.

Из (3.7), ввиду определения системы функций $\{\varphi_k^{(n+1)}(z)\}_0^{n+1}$ (см. формулы (2.21)), очевидно, вытекает, что рациональная функция

$$\frac{B_{n+2}(z)}{z}\bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)$$

имеет полюсы лишь для значений $z = 1/\bar{\alpha}_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n+1)$, лежащих вне единичного круга.

Обозначая

$$U_n(\zeta; z) = \overline{(1-\alpha_{n+1}\zeta)}\,(1-\bar{\alpha}_{n+1} z) \times$$

$$\times \left\{\overline{\left[\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]}\frac{B_{n+2}(z)}{z}\bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) - \overline{\Phi_{n+1}(\zeta)}\,\Phi_{n+1}(z)\right\}, \tag{3.8}$$

можем утверждать, что рациональная функция $U_n(\zeta; z)$ непрерывна на единичной окружности $z = e^{ix}$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$, если на параметр ζ наложить ограничения:

$$|\zeta| \neq 1 \quad \zeta \neq 1/\bar{\alpha}_k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n). \tag{3.9}$$

В предположении (3.9) обозначим, далее;

$$V_n(\zeta; g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{U_n(\zeta; g)}{1-\bar{\zeta} z} g(z)\, d\alpha(x), \quad z = e^{ix}, \tag{3.10}$$

где

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(z) \tag{3.11}$$

—произвольный „полином порядка n“ от функций Мальмквиста.

Однако, при $z = e^{ix}$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ справедливо тождество:

$$\overline{g(z)} = \frac{\overline{g(\zeta)}}{1-\bar{\zeta} z} + \left\{\overline{\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}}\right\}\bar{z},$$

откуда для функций $V_n(\zeta; g)$ получим представление:

$$V_n(\zeta; g) = \overline{g(\zeta)}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{U_n(\zeta; z)}{1-\bar{\zeta} z}\, d\alpha(x) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U_n(\zeta; z)\left\{\overline{\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}}\right\}\bar{z}\, d\alpha(x) \equiv V_n^{(1)}(\zeta; g) + V_n^{(2)}(\zeta; g). \tag{3.10'}$$

Отсюда, во-первых, видно, что

$$V_n^{(1)}(\zeta; g) = C_n^{(1)}(\zeta)\,\overline{g(\zeta)}, \tag{3.12}$$

где $C_n^{(1)}(\zeta)$ не зависит от функции $g(\zeta)$*. Далее, ввиду определения (3.8) функции $U_n(\zeta; z)$ имеем:

$$V_n^{(2)}(\zeta; g) = \left\{\overline{(1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta)\,\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\,\Phi_{n+1}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}\right\} \times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\bar{\alpha}_{n+1} z)\,\frac{B_{n+2}(z)}{z}\,\bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)\left\{\overline{\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}}\right\} d\alpha(x) -$$

$$-\left\{\overline{(1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta)\,\Phi_{n+1}(\zeta)}\right\}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{n+1}(z)\left\{\overline{(z-\alpha_{n+1})\,\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}}\right\} d\alpha(x) \equiv$$

$$\equiv V_n^{(3)}(\zeta; g) + V_n^{(4)}(\zeta; g). \tag{3.13}$$

Ради упрощения дальнейших этапов доказательства на время будем полагать, что в группе $\{\alpha_k\}_0^n$ все числа отличны друг от друга и от нуля.

При этом предположении из (3.11) следует, что функции $g(z)$ представляются в виде

---

* В дальнейшем такого рода функции от ζ будут обозначены через $C_n^{(j)}(\zeta)$ $(j=1, 2, \cdots)$.

$$g(z)=\frac{P_n(z)}{\prod_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)}, \tag{3.14}$$

где $P_n(z)$ — обычный полином степени не выше, чем n.

Полагая вновь, что параметр ζ удовлетворяет условию (3.9), из представления (3.14) будем иметь:

$$\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}=\frac{P_n(z)\prod_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k\zeta)-P_n(\zeta)\prod_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)}{(z-\zeta)\prod_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)(1-\bar{\alpha}_k\zeta)}, \tag{3.15}$$

причем, очевидно, что числитель дроби, стоящей справа, без остатка делится на $z-\zeta$.

Однако, при нашем предположении о совокупности чисел $\{\alpha_k\}_0^n$ числитель дроби (3.15) есть полином степени $n+1$ от z вида

$$\left[(-1)^n\prod_{k=0}^{n}\bar{\alpha}_k\right]P_n(\zeta)\,z^{n+1}+b_n z^n+\cdots+b_0.$$

Поэтому, разделив его на $z-\zeta$, из (3.14′) будем иметь:

$$\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}=\frac{Q_n(z)}{\prod_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)(1-\bar{\alpha}_k\zeta)}, \tag{3.16}$$

где $Q_n(z)$—полином степени n вида

$$Q_n(z)=\left[(-1)^n\prod_{k=0}^{n}\bar{\alpha}_k\right]P_n(\zeta)\,z^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_0. \tag{3.16′}$$

Из (3.16) и (3.16′) следует, что

$$(z-\alpha_{n+1})\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}=-\frac{P_n(\zeta)}{\prod_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k\zeta)}+\frac{\Omega_n(z;\zeta)}{\prod_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)}, \tag{3.17}$$

где $\Omega_n(z,\zeta)$—некоторый полином от z степени не выше, чем n.

Заметим теперь, что правильная рациональная дробь

$$\Omega_n(z;\zeta)\prod_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)^{-1}$$

разлагается на простые дроби вида

$$\frac{\Omega_n(z;\zeta)}{\prod_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k(\zeta)}{1-\bar{\alpha}_k z}. \tag{3.18}$$

С другой стороны, система функций $\{\Phi_k(z)\}_0^n$ представляет собой результат ортогонализации упорядоченной системы функций $\left\{\dfrac{1}{1-\bar{\alpha}_k z}\right\}_0^n$ на единичной окружности с весом $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$. Поэтому, очевидно, что вместе с (3.18) справедливо также представление:

$$\frac{\Omega_n(z;\zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)}=\sum_{k=0}^{n}B_k(\zeta)\,\Phi_k(z). \tag{3.18'}$$

Из (3.14), (3.18') и (3.17), наконец, следует представление:

$$(z-\alpha_{n+1})\,\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}=-g(\zeta)+\sum_{k=0}^{n}B_k(\zeta)\,\Phi_k(z). \tag{3.17'}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{n+1}(z)\overline{\Phi_k(z)}\,d\alpha(x)=0 \qquad (k=0,\,1,\cdots,\,n),$$

то, подставляя значение (3.17') в выражение для функции $V_n^{(4)}(\zeta;g)$, получим:

$$V_n^{(4)}(\zeta;g)=\overline{g(\zeta)}\;\overline{\{(1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta)\,\Phi_{n+1}(\zeta)\}}\;\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{n+1}(z)\,d\alpha(x).$$

Итак, имеем:

$$V_n^{(4)}(\zeta;g)=C_n^{(2)}(\zeta)\,\overline{g(\zeta)}\,. \tag{3.19}$$

Займемся, наконец, функцией $V_n^{(3)}(\zeta;g)$.

С этой целью сначала заметим, что при $z=e^{ix}$

$$(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)\,\frac{B_{n+2}(z)}{z}=-\frac{|\alpha_{n+1}|}{\alpha_{n+1}}(1-\alpha_{n+1}\bar{z})\,B_{n+2}(z),$$

откуда следует, что

$$V_n^{(3)}(\zeta;g)=C_n^{(3)}(\zeta)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\Phi_{n+1}(z)}\,B_{n+2}(z)\,\bar{z}\times$$

$$\times\left\{(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)\,\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}\right\}d\alpha(x). \tag{3.20}$$

Однако, из (3.16) и (3.16') имеем:

$$(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)\,\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}=\bar{\alpha}_{n+1}\,\frac{P_n(\zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k\zeta)}+\frac{\omega_n(z;\zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)},$$

где $\omega_n(z;\zeta)$—полином от z степени не выше, чем n.

Поэтому, с учетом (3.14), при $z = e^{ix}$ мы имеем:

$$\left\{(1 - \bar{\alpha}_{n+1} z) \frac{g(z) - g(\zeta)}{z - \zeta}\right\} = \alpha_{n+1} \overline{g(\zeta)} - \frac{z r_n(z; \zeta)}{\prod_{k=0}^{n} (\alpha_k - z)}, \qquad (3.21)$$

где $r_n(z; \zeta) = (-1)^{n+1} z^n \bar{\omega}_n \left(\frac{1}{z}; \bar{\zeta}\right)$ есть полином от z степени не выше, чем n.

Подставляя значение (3.21) в интеграл (3.20), получим:

$$V_n^{(3)}(\zeta; g) = C_n^{(4)}(\zeta) \overline{g(\zeta)} +$$

$$+ C_n^{(3)}(\zeta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\Phi_{n+1}(z)} B_{n+1}(z) \frac{r_n(z; \zeta)}{\prod_{k=0}^{n} (\alpha_k - z)} d\alpha(x). \qquad (3.22)$$

Далее, очевидно, что

$$B_{n+1}(z) \frac{r_n(z; \zeta)}{\prod_{k=0}^{n} (\alpha_k - z)} = \frac{\gamma_n(z; \zeta)}{\prod_{k=0}^{n} (1 - \bar{\alpha}_k z)},$$

где $\gamma_n(z; \zeta)$—полином степени не выше, чем n относительно z.

Поэтому имеем представление:

$$V_n^{(3)}(\zeta; g) = C_n^{(4)}(\zeta) \overline{g(\zeta)}. \qquad (3.23)$$

Наконец, принимая во внимание формулы (3.10′) и (3.13), в силу (3.12), (3.19) и (3.23), окончательно получим:

$$V_n(\zeta; g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{U_n(\zeta; z)}{1 - \bar{\zeta} z} \overline{g(z)} d\alpha(x) = C_n(\zeta) \overline{g(\zeta)}, \qquad (3.24)$$

где функция $C_n(\zeta)$ конечна для значений параметра ζ, удовлетворяющих условиям (3.9), и не зависит от функции $g(\zeta)$.

Докажем теперь, что $C_n(\zeta) \not\equiv 0$.

С этой целью отметим сначала, что

$$(1 - \bar{\alpha}_{n+1} z) \Phi_{n+1}(z) = \frac{\tau_{n+1}(z)}{\prod_{k=0}^{n} (1 - \bar{\alpha}_k z)}$$

и

$$(1 - \bar{\alpha}_{n+1} z) \frac{B_{n+2}(z)}{z} \bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\varkappa_{n+1}(z)}{\prod_{k=0}^{n} (1 - \bar{\alpha}_k z)},$$

в результате чего имеем представление:

$$U_n(\zeta; z) = \frac{u_{n+1}(z; \zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)}, \tag{3.25}$$

где $\tau_{n+1}(z)$, $\varkappa_{n+1}(z)$ и $u_{n+1}(z; \zeta)$ суть полиномы от z степени не выше, чем $n+1$.

С другой стороны, так как

$$\overline{B_{n+2}(\zeta)}\, B_{n+2}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \equiv 1,$$

то из определения (3.8) самой функции $U_n(\zeta; z)$ следует, что $U_n\left(\zeta; \frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \equiv 0$.

Это значит, что при любом ζ рациональная дробь (3.25) без остатка делится на $1-\bar{\zeta}z$, поэтому будем иметь:

$$\frac{U_n(\zeta; z)}{1-\bar{\zeta}z} = \frac{v_n(z; \zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)} = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(\zeta)\, \Phi_k(z), \tag{3.26}$$

где $v_n(z; \zeta)$—полином от z степени не выше, чем n.

Полагая, что $C_n(\zeta) \equiv 0$, и применяя формулу (3.24) последовательно к функциям

$$g(z) = \Phi_k(z) \qquad (k = 0, 1, \cdots, n),$$

будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{U_n(\zeta; z)}{1-\bar{\zeta}z}\, \overline{\Phi_k(z)}\, d\alpha(x) \equiv 0 \qquad (k = 0, 1, \cdots, n).$$

Отсюда и из представления (3.26) вытекает, что $\gamma_k(\zeta) = 0$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$, и, следовательно, $U_n(\zeta; z) \equiv 0$.

Но тогда, ввиду определения (3.8) функции $U_n(\zeta; z)$, получим, что тождественно относительно переменных z и ζ

$$\overline{\left[\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\, \overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]}\, \frac{B_{n+2}(z)}{z}\, \overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \overline{\Phi_{n+1}(\zeta)}\, \Phi_{n+1}(z).$$

Следовательно, положив в частности $\zeta = z$, будем иметь:

$$\left|\frac{B_{n+2}(z)}{z}\, \overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)\right|^2 = |\Phi_{n+1}(z)|^2. \tag{3.27}$$

Заметим теперь, что из формул (2.34) и (2.34′) леммы 6 вытекает, что

$$\lim_{z\to\alpha_{n+1}} \left|\frac{B_{n+2}(z)}{z}\, \overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)\right|^2 = S_{n+1}^2(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1})\, \frac{1-|\alpha_{n+1}|^2}{k_{n+1}^2} =$$

$$= S_{n+1}(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}). \tag{3.28}$$

Поэтому, переходя к пределу в тождестве (3.27) при $z \to \alpha_{n+1}$, получим:

$$S_{n+1}(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) = |\Phi_{n+1}(\alpha_{n+1})|^2,$$

откуда следует, что

$$S_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} |\Phi_k(\alpha_{n+1})|^2 = 0. \qquad (3.29)$$

Однако, по (1.9) и (1.10)

$$\Phi_0(z) = \frac{\varphi_0(z)}{\sqrt{D_0}} = (\varphi_0, \varphi_0)^{-1/2} \frac{(1-|\alpha_0|^2)^{1/2}}{1-\overline{\alpha}_0 z},$$

ввиду чего $|\Phi_0(\alpha_{n+1})|^2 > 0$, т. е. $S_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) > 0$, что противоречит равенству (3.29).

Итак, предположение $C_n(\zeta) \equiv 0$ приводит нас к противоречию.

С другой стороны, из определения (3.8) функции $U_n(\zeta, z)$ следует также, что выражение

$$\frac{U_n(\zeta; z)}{1-\overline{\zeta} z}$$

является рациональной функцией от $\overline{\zeta}$ с полюсами в точках $\overline{\zeta} = 1/\alpha_k$ $(k=0, 1, \cdots, n)$ при $|z| = 1$.

Поэтому из интегральной формулы (3.24) вытекает также, что произведение $C_n(\zeta)\overline{g(\zeta)}$ является рациональной функцией от $\overline{\zeta}$ с полюсами быть может лишь в точках $\overline{\zeta} = 1/\alpha_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$.

Так как $C_n(\zeta) \not\equiv 0$, то всюду, за исключением не более чем конечного числа точек, $C_n(\zeta) \neq 0$, для таких ζ формула (3.24) может быть записана в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{U_n(\zeta; z)}{C_n(\zeta)(1-\overline{\zeta} z)} \overline{g(z)}\, d\alpha(x) \equiv \overline{g(\zeta)}.$$

Но тогда, согласно лемме 4, будем иметь:

$$\frac{U_n(\zeta; z)}{1-\overline{\zeta} z} \equiv C_n(\zeta) S_n(\zeta; z), \qquad (3.30)$$

тождественно относительно z и ζ.

Убедимся теперь, что $C_n(\zeta)$ от ζ не зависит.

С этой целью, заметив, что

$$\overline{S_n(\zeta; z)} = S_n(z; \zeta), \quad \overline{U_n(\zeta; z)} = U_n(z; \zeta),$$

и переходя в (3.30) к сопряженным величинам, будем иметь:

$$\frac{U_n(z; \zeta)}{1-z\overline{\zeta}} \equiv \overline{C_n(\zeta)}\, S_n(z; \zeta).$$

Поменяв в этом тождестве переменные z и ζ местами, приходим к тождеству:

$$\frac{U_n(\zeta; z)}{1-\bar{\zeta} z} \equiv \overline{C_n(z)}\, S_n(\zeta; z). \tag{3.31}$$

Сравнивая тождества (3.30) и (3.31), получим:

$$C_n(\zeta) \equiv \overline{C_n(z)},$$

откуда вытекает, что $C_n(\zeta) \equiv c_n = \text{const}$.

Итак, из (3.30) имеем

$$\frac{U_n(\zeta; z)}{1-\bar{\zeta} z} \equiv c_n\, S_n(\zeta; z), \tag{3.30'}$$

где c_n не зависит от z и ζ.

Чтобы определить значение постоянной c_n, заметим, что в силу определения (3.8) функции $U_n(\zeta; z)$ и ввиду формулы (3.28), имеем:

$$U_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) = \lim_{z\to\alpha_{n+1}} U_n(z; z) = (1-|\alpha_{n+1}|^2)^2 \{S_{n+1}(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) -$$

$$- |\Phi_{n+1}(\alpha_{n+1})|^2\} = (1-|\alpha_{n+1}|^2)^2 S_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}).$$

Поэтому, положив в (3.30′) $\zeta = z$, при $z \to \alpha_{n+1}$ получим:

$$(1-|\alpha_{n+1}|^2)\, S_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) = c_n\, S_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}).$$

Отсюда, поскольку

$$S_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) \geqslant |\Phi_0(\alpha_{n+1})|^2 > 0,$$

получим:

$$c_n = (1-|\alpha_{n+1}|^2). \tag{3.32}$$

Подставляя значение (3.32) в (3.30′) и имея в виду значение (3.8) функции $U_n(\zeta; z)$ мы приходим к формуле (3.6) теоремы, однако пока лишь при условии, что все числа группы $\{\alpha_k\}_0^n$ отличны друг от друга и от нуля.

Освободимся, наконец, от этого ограничения. С этой целью поступим так же, как это уже было сделано в ходе доказательства теоремы 1. Именно: имея произвольную группу чисел $\{\alpha_k\}_0^{n+1}$, рассмотрим новую группу $\{\tilde{\alpha}_k\}_0^{n+1}$ $(0<|\tilde{\alpha}_k|<1)$, удовлетворяющую поставленным выше ограничениям.

Пусть $\{\tilde{\varphi}_k(z)\}_0^{n+1}$ — система Мальмквиста, ассоциированная с упорядоченной группой чисел $\{\tilde{\alpha}_k\}_0^{n+1}$, а $\{\tilde{\Phi}_k(z)\}_0^{n+1}$ — результат ортогонализации этой системы на единичной окружности с весом $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$.

Наконец, пусть

$$\tilde{S}_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\tilde{\Phi}_k(\zeta)}\, \tilde{\Phi}_k(z)$$

есть ядро системы $\{\tilde{\Phi}_k(z)\}_0^n$.

Так как все числа группы $\{\tilde{\alpha}_k\}_0^{n+1}$ отличны друг от друга и от нуля, то формула (3.6) теоремы справедлива для ядра $\tilde{S}_n(\zeta; z)$, т. е.

$$\tilde{S}_n(\zeta; z) = \frac{(1-\tilde{\alpha}_{n+1}\bar{\zeta})(1-\overline{\tilde{\alpha}}_{n+1}z)}{1-|\tilde{\alpha}_{n+1}|^2}\times$$

$$\times\frac{\overline{\left[\frac{\tilde{B}_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\bar{\tilde{\Phi}}_{n+1}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right]}\frac{\tilde{B}_{n+2}(z)}{z}\bar{\tilde{\Phi}}_{n+1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)-\overline{\tilde{\Phi}_{n+1}(\zeta)}\,\tilde{\Phi}_{n+1}(z)}{1-\bar{\zeta}z}, \tag{3.6'}$$

где

$$\tilde{B}_{n+2}(z)=\prod_{k=0}^{n+1}\frac{\tilde{\alpha}_k-z}{1-\overline{\tilde{\alpha}}_k z}\,\frac{|\tilde{\alpha}_k|}{\tilde{\alpha}_k}.$$

Однако, если*

$$\lim\tilde{\alpha}_k=\alpha_k\qquad(k=0,\ 1,\cdots,\ n+1),$$

то, как легко видеть,

$$\lim\tilde{\varphi}_k(z)=\varphi_k(z)\qquad(k=0,\ 1,\cdots,\ n+1),$$

$$\lim\tilde{B}_{n+2}(z)=B_{n+2}(z),$$

и поэтому

$$\lim\tilde{\Phi}_k(z)=\Phi_k(z)\qquad(k=0,\ 1,\cdots,\ n+1).$$

Следовательно, переходя к пределу в тождестве (3.6′), получим требуемую формулу (3.6) теоремы уже без каких-либо ограничений на совокупность чисел $\{\alpha_k\}_0^{n+1}$. Итак, теорема полностью доказана.

Из этой теоремы при $\alpha_k=0$ $(k=0,\ 1,\cdots)$, в частности, следует известная формула Г. Сеге.

Следствие. *Для ядра $S_n(\zeta; z)$ системы полиномов Г. Сеге $\{P_k(z)\}_0^\infty$ справедлива формула:*

$$S_n(\zeta; z)=\frac{\overline{\zeta^{n+1}\bar{P}_{n+1}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}\,z^{n+1}\bar{P}_{n+1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)-\overline{P_{n+1}(\zeta)}\,P_{n+1}(z)}{1-\bar{\zeta}z}. \tag{3.33}$$

---

* Отметим, что с самого начала мы могли взять $\tilde{\alpha}_{n+1}=\alpha_{n+1}$.

§ 4. Рекуррентное соотношение, важный пример распределения

4.1. Выведем теперь рекуррентные формулы для ортогональной системы $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$.

С этой целью запишем тождество (3.6) теоремы в виде

$$R_n(\zeta; z) = \overline{\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\,\Phi_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,\frac{B_{n+2}(z)}{z}\,\overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{\bar z}\right) - \overline{\Phi_{n+1}(\zeta)}\,\Phi_{n+1}(z) =$$

$$= (1 - |\alpha_{n+1}|^2)\frac{1 - \bar\zeta z}{(1 - \alpha_{n+1}\bar\zeta)(1 - \bar\alpha_{n+1} z)}\,S_n(\zeta; z). \tag{4.1}$$

Рассмотрим интеграл:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_n(\zeta; z)\,\varphi_{n+1}(\zeta)\,dt, \quad \zeta = e^{it} \tag{4.2}$$

и вычислим его двумя способами, пользуясь тождеством (4.1).

Заметим сначала, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\Phi_{n+1}(\zeta)}\,\varphi_{n+1}(\zeta)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\{k_{n+1}\varphi_{n+1}(\zeta) + \cdots + l_{n+1}\varphi_0(\zeta)\}}\,\varphi_{n+1}(\zeta)\,dt = k_{n+1}, \tag{4.3}$$

ввиду ортонормальности системы Мальмквиста.

Далее, заметим еще, что при $\zeta = e^{it}$

$$\overline{\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\,\overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)}\,\varphi_{n+1}(\zeta) = \zeta\,\overline{B_{n+2}(\zeta)}\,\Phi_{n+1}(\zeta)\,\varphi_{n+1}(\zeta) =$$

$$= \frac{\zeta(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}}{1 - \bar\alpha_{n+1}\zeta}\,\overline{B_{n+2}(\zeta)}\,B_{n+1}(\zeta)\,\Phi_{n+1}(\zeta) =$$

$$= -\zeta\frac{|\alpha_{n+1}|}{\bar\alpha_{n+1}}(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}\frac{\Phi_{n+1}(\zeta)}{\zeta - \alpha_{n+1}},$$

и поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\,\overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)}\,\varphi_{n+1}(\zeta)\,dt =$$

$$= -\frac{|\alpha_{n+1}|}{\bar\alpha_{n+1}}(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\Phi_{n+1}(\zeta)}{\zeta - \alpha_{n+1}}\,d\zeta =$$

$$= -\frac{|\alpha_{n+1}|}{\bar\alpha_{n+1}}(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}\,\Phi_{n+1}(\alpha_{n+1}). \tag{4.4}$$

Имея в виду значение интегралов (4.3) и (4.4) и пользуясь правой частью формулы (4.1), будем иметь:

$$J_n(z) = -\frac{|\alpha_{n+1}|}{\bar{\alpha}_{n+1}}(1-|\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}\Phi_{n+1}(\alpha_{n+1})\frac{B_{n+2}(z)}{z}\overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)-$$

$$-k_{n+1}\Phi_{n+1}(z). \qquad (4.4')$$

Чтобы вычислить тот же интеграл вторым способом, положим пока, что $\alpha_{n+1} \neq 0$. Тогда, ввиду тождества

$$\frac{1-\bar{\zeta}z}{1-\alpha_{n+1}\bar{\zeta}} = \frac{1}{\alpha_{n+1}}\left\{z + \frac{\alpha_{n+1}-z}{1-\alpha_{n+1}\bar{\zeta}}\right\},$$

из (4.1) будем иметь:

$$R_n(\zeta; z) = (1-|\alpha_{n+1}|^2)\frac{z}{\alpha_{n+1}(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)}S_n(\zeta; z)+$$

$$+(1-|\alpha_{n+1}|^2)\frac{\alpha_{n+1}-z}{\alpha_{n+1}(1-\alpha_{n+1}\bar{\zeta})(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)}S_n(\zeta; z)\equiv$$

$$\equiv R_n^{(1)}(\zeta; z)+R_n^{(2)}(\zeta; z). \qquad (4.5)$$

Так как, очевидно, справедливо представление:

$$S_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{n} d_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)},$$

то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_n^{(1)}(\zeta; z)\varphi_{n+1}(\zeta)\,dt = 0, \qquad \zeta = e^{it}. \qquad (4.6)$$

Далее, заметив, что при $\zeta = e^{it}$

$$\overline{\left(\frac{B_{n+1}(\zeta)}{\zeta}\right)}\varphi_{n+1}(\zeta) = \zeta\frac{(1-|\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta},$$

и пользуясь тождеством (2.14) теоремы 1, из определения (4.5) функции $R_n^{(2)}(\zeta; z)$ мы получим:

$$R_n^{(2)}(\zeta; z)\varphi_{n+1}(\zeta) = (1-|\alpha_{n+1}|^2)^{3/2}\frac{B_{n+2}(z)}{|\alpha_{n+1}|z}\frac{\zeta S_n\left(\frac{1}{\bar{z}}; \zeta\right)}{(1-\alpha_{n+1}\zeta)(1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta)}.$$

Следовательно, с учетом (4.6) из (4.2) и (4.5) будем иметь:

$$J_n(z) = \frac{(1-|\alpha_{n+1}|^2)^{3/2}}{|\alpha_{n+1}|}\frac{B_{n+2}(z)}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta S_n\left(\frac{1}{\bar{z}}; \zeta\right)}{1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta-\alpha_{n+1}} =$$

$$= \frac{|\alpha_{n+1}|}{\bar{\alpha}_{n+1}}(1-|\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}\frac{B_{n+2}(z)}{z}S_n\left(\frac{1}{\bar{z}}; \alpha_{n+1}\right), \qquad (4.7)$$

причем от ограничения $\alpha_{n+1}\neq 0$ и здесь можно освободиться путем обычного предельного перехода.

Сравнивая два представления (4.4) и (4.7) функции $J_n(z)$ приходим к следующей формуле для системы функций $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$:

$$-\frac{|\alpha_{n+1}|}{\alpha_{n+1}}\frac{k_{n+1}}{(1-|\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}}\Phi_{n+1}(z)=$$

$$=\frac{B_{n+2}(z)}{z}\left\{\Phi_{n+1}(\alpha_{n+1})\overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)+\sum_{k=0}^{n}\Phi_k(\alpha_{n+1})\overline{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{4.8}$$

Если $\alpha_{n+1}\neq 0$, то формулу (4.7) можно видоизменить, пользуясь функциональным тождеством (2.14) для ядра $S_n(\zeta;\ z)$.

Таким образом, после соответствующих преобразований будем иметь также при $\alpha_{n+1}\neq 0$:

$$-\frac{|\alpha_{n+1}|}{\alpha_{n+1}}\frac{k_{n+1}}{(1-|\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}}\Phi_{n+1}(z)=\Phi_{n+1}(\alpha_{n+1})\frac{B_{n+2}(z)}{z}\overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)+$$

$$+\frac{|\alpha_{n+1}|}{\alpha_{n+1}}\frac{B_{n+1}(\alpha_{n+1})}{\alpha_{n+1}}\frac{\alpha_{n+1}-z}{1-\overline{\alpha}_{n+1}z}\sum_{k=0}^{n}\overline{\Phi}_k\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)\Phi_k(z)$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{4.9}$$

В предельном случае, когда $\alpha_k=0$ $(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$, для системы полиномов Г. Сеге $\{P_k(z)\}_0^\infty$ из (4.8) будем иметь:

$$k_{n+1}P_{n+1}(z)=z^{n+1}\left\{P_{n+1}(0)\overline{P}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)+\sum_{k=0}^{n}P_k(0)\overline{P}_k\left(\frac{1}{z}\right)\right\}. \tag{4.10}$$

Однако, пользуясь первой из формул (2.44), получим:

$$\sum_{k=0}^{n}P_k(0)\overline{P}_k\left(\frac{1}{z}\right)=S_n\left(0,\ \frac{1}{z}\right)=k_n z^{-n}P_n(z).$$

Но по определению чисел l_k в рассматриваемом случае $P_{n+1}(0)=l_{n+1}$, поэтому из (4.10) приходим к первой рекуррентной формуле Г. Сеге

$$k_{n+1}P_{n+1}(z)=l_{n+1}z^{n+1}\overline{P}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)+k_n zP_n(z)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{4.11}$$

Заменив в (4.11) z на $\frac{1}{z}$ и переходя к сопряженным величинам, после исключения $z^{n+1}\overline{P}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)$ получим вторую рекуррентную формулу Г. Сеге:

$$k_{n+1}P_{n+1}(z)=k_{n+1}zP_n(z)+l_{n+1}z^n\overline{P}_n\left(\frac{1}{z}\right)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{4.11'}$$

Можно записать также аналог этой формулы для общей ортогональной системы рациональных функций $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$, что, однако, мы приводить не будем.

4.2. В заключение установим явные формулы для ортогональной системы $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ и для соответствующих ядер $S_n(\zeta; z)$ в случае некоторых частных, но важных классов функций распределения.

Полагая, что при данном $p \geqslant 0$ постоянные

$$A_p > 0 \quad \text{и} \quad \{\gamma_k\}_0^p \quad (0 \leqslant \gamma_k < 1) \tag{4.12}$$

произвольны, введем в рассмотрение функции:

$$\omega_p(z) = A_p^{-1/2} \prod_{k=0}^{p} \frac{z-\gamma_k}{1-\bar{\alpha}_k z}, \qquad D_p(z) = A_p^{1/2} \prod_{k=0}^{p} \frac{1-\bar{\alpha}_k z}{1-\bar{\gamma}_k z}, \tag{4.13}$$

а также функцию распределения $d\alpha(x) = w_p(x)\,dx$, где

$$w_p(x) = |D_p(e^{ix})|^2 \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi). \tag{4.14}$$

Докажем теорему.

Теорема 3. 1°. *Ортогональная система рациональных функций $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$, ассоциированная с последовательностью $\{\alpha_k\}_0^\infty$ $(|\alpha_k| < 1)$ и с распределением $(2\pi)^{-1} w_p(x)\,dx$, допускает представление:*

$$\Phi_n(z) = e^{i\varkappa_n} \omega_p(z) \frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_n z} \prod_{k=p+1}^{n-1} \frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}$$

$$(n = p+1,\ p+2, \cdots), \tag{4.15}$$

где $\varkappa_n$ $(\operatorname{Im} \varkappa_n = 0)$ — постоянные.

2°. *Справедливы формулы:*

$$S_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\Phi_k(\zeta)}\, \Phi_k(z) =$$

$$= \frac{1}{(1-\bar{\zeta} z)\overline{D_p(\zeta)}\, D_p(z)} - \frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}\, B_{n+1}(z)}{(1-\bar{\zeta} z)\overline{D}_p\!\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{D}_p\!\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$$(n = p,\ p+1, \cdots). \tag{4.16}$$

Доказательство. 1°. Заметим, что согласно (4.13) и (4.14)

$$w_p(x)\,|\omega_p(z)|^2 \equiv 1 \qquad (z = e^{ix},\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi). \tag{4.17}$$

Поэтому, обозначая

$$\tilde{\Phi}_n(z) = \omega_p(z) \frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_n z} \prod_{k=p+1}^{n-1} \frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \quad (n = p+1,\ p+2, \cdots), \tag{4.18}$$

при $n, m \geqslant p+1$ будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w_p(x)\tilde{\Phi}_n(z)\overline{\tilde{\Phi}_m(z)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=p+1}^{n-1}\frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right\}\times$$

$$\times\overline{\left\{\frac{(1-|\alpha_m|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_m z}\prod_{k=p+1}^{n-1}\frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right\}}\,dx = \delta_{n,m} \quad (z = e^{ix}), \qquad (4.19)$$

ввиду ортонормальности системы Мальмквиста, ассоциированной с последовательностью $\{\alpha_k\}_{p+1}^{\infty}$.

Итак, система функции $\{\tilde{\Phi}_k(z)\}_{p+1}^{\infty}$ ортонормальна на единичной окружности с весом $(2\pi)^{-1}w_p(x)\,dx$.

Покажем теперь, что при любом $n \geqslant p+1$ и $0 \leqslant m \leqslant n-1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w_p(x)\tilde{\Phi}_n(z)\overline{\Phi_m(z)}\,dx = 0, \qquad z = e^{ix}. \qquad (4.20)$$

В самом деле, из (4.17) и (4.18) при $n \geqslant p+1$ имеем:

$$J_m^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w_p(x)\tilde{\Phi}_n(x)\overline{\Phi_m(x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=p+1}^{n-1}\frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\overline{\left\{z\frac{\Phi_m(z)}{\omega_p(z)}\right\}}\,dz. \qquad (4.21)$$

С другой стороны, так как справедливы представления:

$$\Phi_m(z) = \sum_{k=0}^{m} c_{k,m}\varphi_k(z), \qquad c_{m,m} > 0, \qquad (4.22)$$

где $\{\varphi_k(z)\}_0^{\infty}$—система функций Мальмквиста, то имеем также:

$$\Phi_m(z) = \frac{P_m(z)}{\prod_{k=0}^{m}(1-\bar{\alpha}_k z)},$$

причем $P_m(z)$—полином степени не выше, чем m.

Поскольку при $|z|=1$

$$\overline{\left\{z\frac{\Phi_m(z)}{\omega_p(z)}\right\}} = A_p^{1/2} z^m \bar{P}_m\left(\frac{1}{z}\right)\prod_{k=0}^{m}(z-\alpha_k)^{-1}\prod_{k=0}^{p}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\gamma}_k z},$$

то при $0 \leqslant m \leqslant n-1$ функция, стоящая под вторым из интегралов (4.21), представима в виде

$$Q_m(z) \prod_{k=p+1}^{n} (1-\bar{\alpha}_k z)^{-1} \prod_{k=0}^{p} (1-\bar{\gamma}_k z)^{-1} \prod_{k=m+1}^{n-1} (z-\alpha_k), \qquad (4.23)$$

где $Q_m(z)$—полином степени не выше, чем m (при этом и здесь для $m=n-1$ символ $\prod\limits_{k=m+1}^{n-1}$ следует заменить единицей).

Однако, функция (4.23) голоморфна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, и поэтому из (4.21) следует справедливость формул (4.20).

Наконец, из очевидного представления:

$$\tilde{\Phi}_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} \Phi_k(z) \qquad (n \geqslant p+1),$$

ввиду условий (4.19), заключаем, что

$$a_{k,n} = 0 \qquad (k=0, 1, \cdots, n-1).$$

Итак, при $n \geqslant p+1$

$$\tilde{\Phi}_n(z) = a_{n,n} \Phi_n(z),$$

откуда, ввиду равенства:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w_p(x) |\Phi_p(z)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w_p(x) |\tilde{\Phi}_p(z)|^2 dx = 1,$$

получим, что $|a_{n,n}| = 1$.

Отсюда следует, что

$$\Phi_n(z) = e^{i\varkappa_n} \tilde{\Phi}_n(z) \qquad (n \geqslant p+1),$$

где вещественная постоянная $\varkappa_n$ определяется из условия, что в представлении (4.22) $c_{n,n} > 0$. Таким образом, формулы (4.15) установлены.

2°. Согласно формулам (4.15), в частности, имеем:

$$\Phi_{p+1}(z) = e^{i\varkappa_{p+1}} \omega_p(z) \frac{(1-|\alpha_{p+1}|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_{p+1} z},$$

и поэтому

$$\bar{\Phi}_{p+1}\left(\frac{1}{z}\right) = e^{-i\varkappa_{p+1}} z\, \bar{\omega}_p\left(\frac{1}{z}\right) \frac{(1-|\alpha_{p+1}|^2)^{1/2}}{z-\alpha_{p+1}}.$$

Из этих формул следуют тождества:

$$\frac{\overline{(1-\bar{\alpha}_{p+1}\zeta)}(1-\bar{\alpha}_{p+1} z)}{1-|\alpha_{p+1}|^2} \overline{\Phi_{p+1}(\zeta)}\, \Phi_{p+1}(z) = \overline{\omega_p(\zeta)}\, \omega_p(z), \qquad (4.24)$$

$$\frac{\overline{(1-\bar{\alpha}_{p+1}\zeta)}(1-\bar{\alpha}_{p+1} z)}{1-|\alpha_{p+1}|^2} \overline{\left\{\frac{B_{p+2}(\zeta)}{\zeta} \bar{\Phi}_{p+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right\}} \frac{B_{p+2}(\zeta)}{z} \bar{\Phi}_{p+1}\left(\frac{1}{z}\right) =$$

$$=\overline{\left\{\bar{\omega}_p\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)B_{p+1}(\zeta)\right\}}\,\bar{\omega}_p\left(\frac{1}{z}\right)B_{p+1}(z). \tag{4.25}$$

Заметив теперь, что, согласно теореме 2,

$$S_p(\zeta;z)=\frac{\overline{(1-\bar{\alpha}_{p+1}\zeta)}(1-\bar{\alpha}_{p+1}z)}{1-|\alpha_{p+1}|^2}\times$$

$$\times\frac{\overline{\left\{\frac{B_{p+2}(\zeta)}{\zeta}\bar{\Phi}_{p+1}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right\}}\frac{B_{p+2}(z)}{z}\bar{\Phi}_{p+1}\left(\frac{1}{z}\right)-\overline{\Phi_{p+1}(\zeta)}\,\Phi_{p+1}(z)}{1-\bar{\zeta}z},$$

из тождеств (4.24) и (4.25) получим:

$$S_p(\zeta;z)=\frac{\overline{\left\{\bar{\omega}_p\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)B_{p+1}(\zeta)\right\}}\,\bar{\omega}_p\left(\frac{1}{z}\right)B_{p+1}(z)-\overline{\omega_p(\zeta)}\,\omega_p(z)}{1-\bar{\zeta}z}. \tag{4.26}$$

Обозначим, далее,

$$\beta_j=\alpha_{p+1+j}\qquad(j=0,1,2,\cdots)$$

и введем в рассмотрение систему $\{\psi_k(z)\}_0^\infty$, ассоциированную с последовательностью комплексных чисел $\{\beta_k\}_0^\infty$:

$$\psi_k(z)=\frac{(1-|\beta_k|^2)^{1/2}}{1-\bar{\beta}_k z}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\beta_j-z}{1-\bar{\beta}_j z}\frac{|\beta_j|}{\beta_j}\qquad(k=0,1,2,\cdots).$$

Тогда, согласно (4.15),

$$\Phi_{p+1+k}(z)=e^{i\kappa_{p+1+k}}\omega_p(z)\psi_k(z)\qquad(k=0,1,2,\cdots),$$

и поэтому

$$\sum_{k=p+1}^{p+n}\overline{\Phi_k(\zeta)}\,\Phi_k(z)=\overline{\omega_p(\zeta)}\,\omega_p(z)\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\psi_k(\zeta)}\,\psi_k(z). \tag{4.27}$$

Однако, согласно лемме 5, для системы функций $\{\psi_k(z)\}_0^\infty$ имеет место формула:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\psi_k(\zeta)}\,\psi_k(z)=\frac{1-\overline{\tilde{B}_n(\zeta)}\tilde{B}_n(z)}{1-\bar{\zeta}z},$$

где

$$\tilde{B}_n(z)=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\beta_j-z}{1-\bar{\beta}_j z}\frac{|\beta_j|}{\beta_j}=\frac{B_{n+p+1}(z)}{B_{p+1}(z)}.$$

Следовательно, формулу (4.27) можно записать в виде

$$S_{n+p}(\zeta;z)-S_p(\zeta;z)=\overline{\omega_p(\zeta)}\,\omega_p(z)\frac{1-\overline{\left\{\frac{B_{n+p+1}(\zeta)}{B_{p+1}(\zeta)}\right\}}\frac{B_{n+p+1}(z)}{B_{p+1}(z)}}{1-\bar{\zeta}z}. \tag{4.28}$$

Наконец, из (4.24) и (4.28) будем иметь для всех $n = 0, 1, 2, \cdots$:

$$S_{n+p}(\zeta; z) = \frac{\overline{\left\{B_{p+1}(\zeta)\,\overline{\omega}_p\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right\}}\,B_{p+1}(z)\,\overline{\omega}_p\left(\frac{1}{z}\right) - \overline{\left\{\omega_p(\zeta)\,\frac{B_{n+p+1}(\zeta)}{B_{p+1}(\zeta)}\right\}}\,\omega_p(z)\,\frac{B_{n+p-1}(z)}{B_{p+1}(z)}}{1-\overline{\zeta}z}. \tag{4.29}$$

Заметим теперь, что из определения (4.13) функций $\omega_p(z)$ и $D_p(z)$ будем иметь:

$$B_{p+1}(z)\,\overline{\omega}_p\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{c_p}{D_p(z)} \qquad (|c_p| = 1), \tag{4.30}$$

откуда, в силу очевидного тождества $B_{p+1}(z)\,\overline{B}_{p+1}\left(\frac{1}{z}\right) \equiv 1$, имеем также:

$$\omega_p(z) = \frac{\overline{c}_p}{\overline{D}_p\left(\frac{1}{z}\right)}\,B_{p+1}(z). \tag{4.31}$$

Пользуясь, наконец, тождествами (4.30) и (4.31), формулы (4.24) и (4.29) можно объединить и записать в виде

$$S_{n+p}(\zeta; z) = \frac{1}{(1-\overline{\zeta}z)\,\overline{D_p(\zeta)}\,D_p(z)} - \frac{\overline{B_{n+p+1}(\zeta)}\,B_{n+p+1}(z)}{(1-\overline{\zeta}z)\,\overline{\overline{D}_p\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,\overline{D}_p\left(\frac{1}{z}\right)}$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots),$$

что эквивалентно формуле (4.16) теоремы.

4.3. Из предыдущей теоремы следует, далее,

Теорема 4. *Если*

$$\mathrm{B} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) = +\infty, \tag{4.32}$$

то при любых z и ζ ($|z| < 1$ и $|\zeta| < 1$) справедлива формула:

$$S_n(\zeta; z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\Phi_k(\zeta)}\,\Phi_k(z) = \frac{1}{(1-\overline{\zeta}z)\,\overline{D_p(\zeta)}\,D_p(z)}. \tag{4.33}$$

2°. *Если*

$$\mathrm{B} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) < +\infty, \tag{4.34}$$

то при любых z и ζ ($|z| \neq 1$ и $|\zeta| \neq 1$), отличных от чисел последовательности $\{1/\overline{\alpha}_k\}_0^{\infty}$, справедлива формула:

$$S_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\Phi_k(\zeta)}\,\Phi_k(z) =$$

$$=\frac{1}{(1-\bar{\zeta}z)\,\overline{D_p(\zeta)}\,D_p(z)}-\frac{\overline{B(\zeta)}\,B(z)}{(1-\bar{\zeta}z)\overline{D}_p\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\overline{D}_p\left(\frac{1}{z}\right)}, \tag{4.35}$$

где

$$B(z)=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \tag{4.36}$$

—сходящееся произведение Бляшке.

В самом деле, чтобы получить утверждения 1° и 2° теоремы достаточно совершить предельный переход в формуле (4.16) при $n\to+\infty$. При этом надо лишь учитывать то обстоятельство, что при $\mathrm{B}=+\infty$

$$\lim_{n\to\infty}B_n(z)=0 \qquad (|z|<1),$$

а при условии $\mathrm{B}<+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}B_n(z)=B(z) \qquad (|z|\neq 1,\ z=1/\bar{\alpha}_k,\ k=0,1,\cdots).$$

На рассмотренном примере распределения $(2\pi)^{-1}w_p(x)\,dx$ становится ясным принципиальное различие как между множествами точек сходимости, так и в значениях суммы билинейного ряда

$$S(\zeta;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\Phi_k(\zeta)}\,\Phi_k(z)$$

в зависимости от расходимости или сходимости ряда

$$\mathrm{B}=\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|).$$

Оказывается, что в общем случае произвольного распределения $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$ природа сходимости и значение суммы ряда $S(\zeta;z)$ существенно зависят от того, конечны или нет значения

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\log\alpha'(x)\,dx \quad \text{и} \quad \mathrm{B}=\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|).$$

На этом, однако, мы здесь останавливаться не будем и этому вопросу в последующем посвятим отдельную статью.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 30. XII. 1965

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԸ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՎՐԱ

Ամփոփում

Ներկա հոդվածում ստացված են ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմների հանրահաշվական հատկությունները, որոնց բոլոր հնարավոր բևեռները գըտնըվում են միավոր շրջանից դուրս տված հաջորդականության կետերում և օրթոնորմալ են միավոր շրջանագծի վրա $(2\pi)^{-1}\, d\alpha(x)$ *կշռով։*

Սահմանային դեպքում, երբ դիտարկվող սիստեմի բոլոր բևեռները համընկնում են անվերջ հեռու կետի հետ, այստեղ ստացված թեորեմները համապատասխանաբար հանգում են միավոր շրջանագծի վրա կշռով օրթոգոնալ բազմանդամների տեսության լավ հայտնի պնդումներին, որոնք ժամանակին զարգացվել էին Սեգյոի [2], [3] աշխատանքներում։

M. M. DŽRBAŠIAN

ORTHONORMAL SETS OF RATIONAL FUNCTIONS ON THE UNIT CIRCLE

Summary

This paper reveals the algebraic properties of sets of rational functions which are orthonormal on the unit circle with respect to the weight $(2\pi)^{-1}\, d\alpha(x)$, and their poles lie on a given sequence of points situated outside the unit circle.

In case when all the poles of the set under consideration coincide with the point at infinity, the theorems proved here concur with the well known assertions of the theory of orthogonal (with respect to the weight function) polynomials developed by Szegö [2], [3].