УДК 521.131

А. А. БЕГЛАРЯН

ПОЛУГРУППОВОЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ N ТЕЛ

Развит полугрупповой подход к исследованию задачи N тел. Выведены дифференциальные уравнения в частных производных для семейств задач с различными начальными условиями. На основе физических соображений получены инвариантные преобразования для радиус-векторов, которые с привлечением соотношений полугруппы позволяют получить решения задачи N тел при специальных начальных условиях. Дополнительное использование принципа инвариантности Амбарцумяна позволяет составить диф. уравнение для семейств задач трех тел с различными начальными условиями. Рассматривается возможность общего решения этого уравнения. Приводятся примеры механических систем, для которых удается описать их дальнейшую эволюцию.

1. Введение

В последние годы Мнацаканяном [1] был развит полугрупповой подход в теории переноса. Впоследствие выяснилось, что и некоторые задачи из других областей естествознания при этом подходе допускают аналогичное математическое описание [1, 2]. Подобная универсальность метода была подмечена Ширковым [3, 4], который выяснил, однако, что не во всех случаях полугруппа эффективна [5], как, в частности, в задачах динамики. И тем не менее мы в этой работе покажем, что с использованием полугруппового подхода в задаче N тел можно получить ряд новых результатов. Применимость этого метода отнюдь не случайна, поскольку многие физические величины находятся в причинной связи с некоторыми первичными величинами, причем эти связи (или преобразования) обычно образуют группы или полугруппы и, как правило, удовлетворяют определенным законам композиции. Такие преобразования позволяют в ряде случаев получать дифференциальные уравнения (уравнения Ли) для конкретной физической задачи. Так, с использованием соотношений полугруппы (п. г.), найденной в работе Мнацаканяна [2, 6] можно получить дифференциальные уравнения в частных производных для семейств задач (например, задача N тел) с различными начальными условиями. Кроме того, из простых физических соображений можно получить преобразования, относительно которых радиус-вектор остается инвариантным. Эти преобразования, образующие группы [7], позволяют получить дифференциальные уравнения, которые будем называть уравнениями инвариантных преобразований (и. п.). Уравнения п. г. и и. п., будучи записаны для семейств задач с различными начальными значениями, дают возможность получать решения задач N тел при конкретных начальных условиях.

Решение частной задачи трех тел можно несколько упростить, если воспользоваться принципом инвариантности Амбарцумяна [8]. Полученные при этом дифференциальные уравнения представляют собой характеристики соответствующих уравнений п. г. и и. п. В настоящей работе методом полугрупп показана возможность решения задачи N тел при конкретных начальных условиях. Более подробно рассматривается задача трех тел и приводятся некоторые примеры механических систем, для которых удается найти их дальнейшую эволюцию.

2. Уравнения для семейств начальных условий

Для нахождения уравнений п. г. и н. п. использованы соотношения: полугруппы (3), принципа подобия (6), а также преобразования инерциальных систем (9), (13), (11).

А. Соотношение полугруппы. Пусть в некоторой инерциальной системе O находятся N материальных частиц, и движение задается ньютоновским взаимодействием. Тогда для радиус-векторов будем иметь

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\gamma \sum_{k\neq i}^{N} \frac{\overline{m}_k}{|r_i - r_k|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \qquad (1)$$

с начальными значениями

$$(\vec{r}_{01}, \vec{r}_{02}, \ldots, \vec{r}_{0N}) = \vec{r}_0, \ (\dot{\vec{r}}_{01}, \dot{\vec{r}}_{02}, \ldots, \dot{\vec{r}}_{0N}) = \dot{\vec{r}}_0, \ (\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_N) = \overline{m}.$$

Движение i-ой частицы можно представить как некую функцию $\vec{r}_{it}$, зависящую от времени t, от совокупности всех начальных координат $\vec{r}_0$, скоростей $\dot{\vec{r}}_0$ и масс $\overline{m}$.

$$\vec{r}_{it} = \vec{r}_i\,(t, \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \overline{m}), \ (\vec{r}_{t1}, \vec{r}_{t2}, \ldots, \vec{r}_{tN}) = \vec{r}_t, \ (\dot{\vec{r}}_{t1}, \dot{\vec{r}}_{t2}, \ldots, \dot{\vec{r}}_{tN}) = \dot{\vec{r}}_t. \qquad (2)$$

Возможность определения п. г. для механической системы состоит в том, что для любого момента времени t_0 значения совокупностей $\vec{r}_{t_0}$ $\dot{\vec{r}}_{t_0}$ можно считать начальными значениями для определения движения этих же частиц. Из сказанного следует, что соотношение п. г. запишется в виде:

$$\vec{r}_i = \overline{r}_{i1} \cdot \vec{i} + \overline{r}_{i2} \cdot \vec{j} + \overline{r}_{i3}\vec{k}$$

$$\vec{r}_i(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}_0, \overline{m}) = \vec{r}_i(t - t_0, \vec{r}_{t_0}, \dot{\vec{r}}_{t_0}, \overline{m}), \qquad (3)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$—единичные векторы инерциальной системы 0. В соотношении п. г. устремив t_0 к нулю получим дифференциальные уравнения в частных производных для семейств задач с различными начальными значениями

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{\alpha,j}\left(\dot{X}_{0\alpha j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial X_{0\alpha l}} + G_{0\alpha j}\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{X}_{0\alpha j}}\right), \ i, j = 1, 2, \ldots, N, \ \alpha = 1, 2, 3, \qquad (4)$$

в котором

$$\vec{r}_{0i} = X_{01i}\vec{i} + X_{02i}\vec{j} + X_{03i}\vec{k}, \quad \dot{\vec{r}}_{0i} = \dot{X}_{01i}\vec{i} + \dot{X}_{02i}\vec{j} + \dot{X}_{03i}\vec{k},$$

$$\ddot{\vec{r}}_i(t=0) = G_{01i}\vec{i} + G_{02i}\vec{j} + G_{03i}\vec{k}.$$

Если же устремить $t - t_0 \to 0$, то получится тождество.

Б. Соотношение подобия. Легко убедиться, что соотношение подобия или соотношение сохранения единиц измерения, можно характеризовать некоторыми преобразованиями, а именно

$$t \to t' = C_2^{-1} \cdot t, \ \vec{r}_0 \to \vec{r}_0{}' = C_1 \cdot \vec{r}_0,$$

и соответственно

$$\dot{\vec{r}}_0 \to \dot{\vec{r}}_0{}' = C_1 \cdot C_2 \cdot \dot{\vec{r}}_0, \ \overline{m} \to \overline{m}' = C_1^3 \cdot C_2^2 \cdot \overline{m}, \tag{5}$$

при которых преобразующийся радиус-вектор остается инвариантным

$$C_1 \cdot \vec{r}_i(t, \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \overline{m}) = \vec{r}_i(t', \vec{r}_0{}', \dot{\vec{r}}_0{}', \overline{m}'), \tag{6}$$

где C_1 и C_2 любые конечные числа.

Устремив в (6) параметры C_1 и C_2 к единице, так чтобы величина $C_1^3 C_2^2$ оставалась равной единице, получим уравнения подобия

$$3t \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} - 2\vec{r}_i = \sum_{\alpha, j} \left(\dot{X}_{0\alpha j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{X}_{0\alpha j}} - 2 \ X_{0\alpha j} \frac{\partial \vec{r}^i}{\partial X_{0\alpha j}} \right). \tag{7}$$

В. Инвариантные преобразования. Если система K инерциальна относительно системы 0 и в момент времени $t=0$ начальные значения рассматриваемой механической системы преобразуются как

$$\vec{r}_{0i}{}' = L_{01} \vec{r}_{0i}, \ \dot{\vec{r}}_{0i} = L_{02} \dot{\vec{r}}_{0i}, \ \vec{r}_i{}' = L \vec{r}_i,$$

где L_{01}, L_{02}, L—операторы преобразования от одной системы к другой и L_{01}^-, L_{02}^-, L^-—соответствующие им обратные операторы, тогда из инвариантности формы радиус-вектора при переходе от одной инерциальной системы к другой, следует, что

$$\vec{r}_i(t, \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \overline{m}) = L\vec{r}_i(t, L_{01}^- \vec{r}_0, L_{02}^- \dot{\vec{r}}_0, \overline{m}). \tag{8}$$

Выбирая систему K различными способами и устремляя ее к системе 0 (т. е. устремляя L к единичному оператору I), мы получим независимые линейные дифференциальные уравнения в частных производных. Чтобы найти эти уравнения рассмотрим частные случаи.

а) Система K сдвинута параллельно относительно системы 0 на расстояние $\vec{r}_1$. В этом случае преобразования примут вид

$$L\vec{r}_i = \vec{r}_i + \vec{r}_1, \ L_{01}^- \vec{r}_{0i} = \vec{r}_{0i} - \vec{r}_1, \ L_{02} = L_{02}^- = I, \tag{9}$$

где $\vec{r}_1 = X_1 \vec{i} + X_2 \vec{i} + X_3 \vec{k}$, X_1, X_2, X_3 произвольные постоянные. Подставляя преобразование (9) в соотношение (8) и последовательно устремляя к нулю величины X_1, X_2, X_3 получим соответствующие уравнения

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_{\beta i}}{\partial X_{0\alpha j}} = \delta_{\alpha\beta} \qquad \alpha, \beta = 1,2,3, \tag{10}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$—символ Кронекера.

б) Пусть система K повернута на бесконечно малый угол $\vec{\omega} \cdot \Delta t$ ($\vec{\omega}$ произвольный вектор), без сдвига, тогда

$$L\vec{r}_i = \vec{r}_i + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] \cdot \Delta t, \ L_{01}^- \vec{r}_{0i} = \vec{r}_{0i} - [\vec{\omega} \times \vec{r}_{0i}] \cdot \Delta t,$$

$$L_{\overline{02}}\vec{r}_{0i}=\dot{\vec{r}}_{0i}-[\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{0i}]\cdot\Delta t. \qquad (11)$$

Далее, устремляя Δt к нулю, получим уравнения

$$[\vec{\omega}\times\vec{r}_i]=\sum_{\alpha,j}\left\{[\vec{\omega}\times\vec{r}_{0j}]_\alpha\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial X_{0\alpha j}}+[\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{0j}]_\alpha\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial\dot{X}_{0\alpha j}}\right\}, \qquad (12)$$

которых $[\vec{\omega}\times\vec{r}]_\alpha$ значение проекции вектора $[\vec{\omega}\times\vec{r}]$ на ось X_α ($X_1=X,\ X_2=Y,\ X_3=Z$) в инерциальной системе 0.

в) Система К в момент $t=0$ начинает прямолинейное и равномерное движение от начала системы 0 и остается параллельна ей, тогда

$$L\vec{r}_i=\vec{r}_i+\dot{\vec{r}}_1\cdot t,\ L_{\overline{02}}\dot{\vec{r}}_{0i}=\dot{\vec{r}}_{0i}-\dot{\vec{r}}_1,\ L_{01}=L_{\overline{01}}=I,\ \dot{\vec{r}}_1=P_1\vec{i}+P_2\vec{j}+P_3\vec{k}. \qquad (13)$$

Подставляя (13) в (8) и поочередно устремляя величины P_α к нулю, соответственно получим

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\dot{\vec{r}}_{\beta i}}{\partial X_{0\alpha j}}=t\cdot\delta_{\alpha\beta}. \qquad (14)$$

3. Совместное решение уравнений (4), (7), (10), (12), (14) при конкретных начальных условиях

Пусть начальные значения $\vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}}_0$, $\overline{m}$ механической системы и параметры t_0, $\vec{r}_1$, $\dot{\vec{r}}_1$, $\vec{\omega}$ удовлетворяют следующим условиям

$$t_0\cdot\dot{\vec{r}}_{0i}-[\vec{\omega}\times\vec{r}_{0i}]\cdot t_0-2\vec{r}_{0i}=\vec{r}_1,\ \vec{G}_{0i}\cdot t_0-[\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{0i}]\cdot t_0+\dot{\vec{r}}_{0i}=\dot{\vec{r}}_1. \qquad (15)$$

Тогда уравнения (10), (14) умножая на X_α, P_α и суммируя по α, а уравнения (12), (4) умножая на t_0 и складывая их с уравнениями (7), получим раздельные обыкновенные дифференциальные уравнения для каждой частицы.

$$(3t+t_0)\frac{d\vec{r}_i}{dt}=2\vec{r}_i-[\vec{\omega}\times\vec{r}_i]\cdot t_0-\dot{\vec{r}}_1-r_1t_0 \qquad (16)$$

начальными условиями $\vec{r}_i(t=0)=\vec{r}_{0i}$.

Пусть начало системы 0 совпадает с центром инерции механической системы и ось X_3 направлена по $\vec{\omega}$ (т. е. $\vec{r}_1=0$, $\dot{\vec{r}}_1=0$, $\vec{\omega}=\omega\cdot\vec{k}$). Тогда решение уравнения (16) в полярных координатах r, φ, Ψ примет вид

$$r_i=r_{0i}\left(1+\frac{3t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}};\quad \psi_i=\psi_{0i}$$

$$\varphi_i=\varphi_{0i}+\frac{1}{3}\,\omega t_0\ln\left(1+\frac{3t}{t_0}\right). \qquad (17)$$

Из (17) видно, что движение частиц с начальными условиями (15) происходит по конической поверхности, при этом конфигурация системы остается подобной начальной конфигурации. При $t_0<0$ возможно лишь N кратное соударение через промежуток времени—$t_0/3$, а при $t_0 \sim \infty$ движение круговое. Для задачи трех тел решения (17), в частном случае, совпадают с решениями Лагранжа, т. е. три тела образуют равносторонний треугольник [9].

4. Получение диф. уравнений для задачи трех тел методом полугрупп

Рассмотрим задачу трех тел. В общем случае частицы в некоторой инерциальной системе 0 в начальный момент могут иметь любые значения координат и скоростей. Однако, если известно движение частиц для частного семейства начальных условий (семейства K), например,

$$\vec{r}_{01}=0,\ \vec{r}_{02}=k_1\vec{i},\ \vec{r}_{03}=k_2\vec{i}+k_3\vec{j},\ \dot{\vec{r}}_{01}=0,\ \dot{\vec{r}}_{02}=k_4\vec{i}+k_5\vec{j}+k_6\vec{k},$$
$$\dot{\vec{r}}_{03}=k_7\vec{i}+k_8\vec{j}+k_9\vec{k},$$

то в общем случае движение частиц, очевидно, можно найти; поскольку всегда можно указать такую инерциальную систему, в которой начальные условия принадлежат семейству K. В этом случае радиус-вектор зависит от $t,\ K,\ \overline{m},\ (k_1,\ k_2,\ldots,\ k_9)=K$.

Пусть в момент $t=0$ значения координат и скоростей частиц принадлежат семейству K. Ясно, что при описании той же задачи с начальными значениями, выбранными в момент t_1, последние, вообще говоря, могут уже не принадлежать семейству K, поэтому для величины $\vec{r}_i$ соотношение п. г. в форме (3) уже не будет иметь места. Для получения аналогичного соотношения, для каждого момента времени t_0 выберем такую инерциальную систему OK (например, систему, приведенную на рис. 1), по отношению к которой преобразованные координаты и скорости принадлежали бы семейству K. Тогда через бесконечно малый промежуток времени Δt величины семейства K соответственно преобразятся к виду

$$t \to t_1+\Delta t \qquad\qquad k^l \to k^l + k_l\omega_l\Delta t,$$

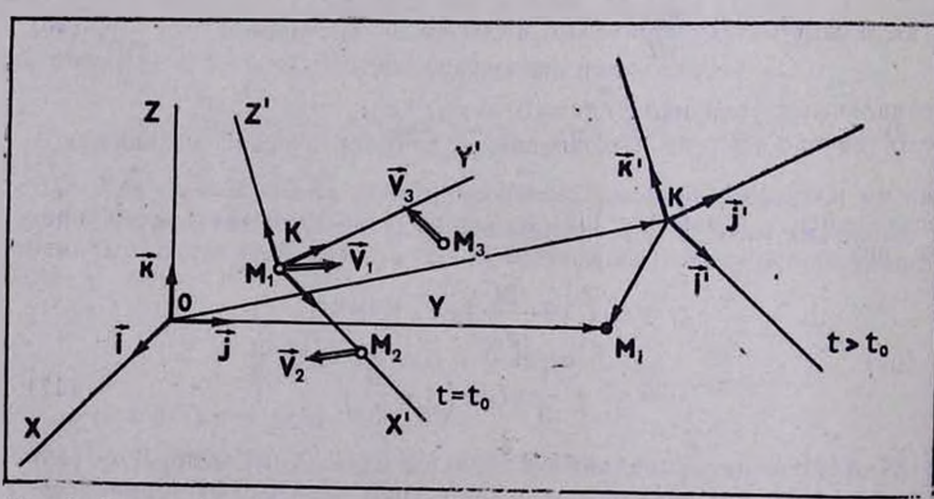

Рис. 1. Система K движется прямолинейно и равномерно по направлению V_1, частица M_3 находится на плоскости X′KY′ в момент времени $t=t_0$

где
$$
\begin{gathered}
\omega_1 k_1 = k_4, \quad \omega_2 k_1 k_2 = k_1 k_7 + k_2 k_5, \quad \omega_3 k_2 k_3 = k_1 k_8 - k_2 k_5 \\
\omega_4 k_1 k_4 = (G_{12} - G_{11})\, k_1 + k_5^2 k_6^2, \quad k_2 k_6 - k_1 k_4 = \tau, \\
\omega_5 k_1 k_3 k_5 = (G_{22} - G_{21}) k_1 k_3 - k_1 k_4 k_5 - \tau k_6, \quad \omega_6 k_1 k_3 k_6 = \tau k_5 - k_3 k_4 k_6 \\
\omega_7 k_1 k_7 = (G_{13} - G_{11}) k_1 + k_5 k_8 + k_6 k_9, \quad \omega_9 k_1 k_3 k_9 = \tau k_8 - k_3 k_6 k_7 \\
\omega_8 k_1 k_3 k_8 = (G_{23} - G_{21}) k_1 k_2 - k_2 k_5 k_8 - \tau k_9,
\end{gathered}
\tag{18}
$$

а система ОК будет ориентирована по закону

$$
\vec{i}' = \vec{i} + \frac{k_5 \vec{i} + k_6 \vec{k}}{k_1} \Delta t, \quad \vec{j}' = \vec{j} + \frac{-\tau \vec{k} - k_3 k_5 \vec{i}}{k_1 k_3} \Delta t, \tag{19}
$$

т. е. система ОК повернется на малый угол

$$
\vec{\omega} \Delta t, \quad \vec{\omega} = \frac{k_5}{k_1} \vec{k} - \frac{\tau}{k_1 k_3} \vec{i} - \frac{k_6}{k_1} \vec{j}. \tag{19а}
$$

По прошествии времени t начало координат системы ОК будет двигаться по отношению к системе О по закону

$$
\vec{OK} = \vec{r}_1(t_1 + \Delta t) + \dot{\vec{r}}_1(t_1 + \Delta t) \cdot t \tag{19б}
$$

и согласно инвариантности формы радиус-векторов, для каждой частицы в системе ОК, можно записать

$$
\vec{KM}_l = \vec{r}_l{}'(t, K, \overline{m}) = r_{1l} \cdot \vec{i}' + r_{2l} \vec{j}' + r_{3l} \vec{k}'. \tag{20}
$$

Из рис. 1 видно, что имеет место выражение $\vec{OM}_l = \vec{OK} + \vec{KM}_l$, которое с учетом (18)—(20) переходит в соотношение п. г. для радиус-векторов. Далее, устремляя Δt к нулю при $t_1 = 0$, получим следующее уравнение

$$
\frac{\partial \vec{r}_l}{\partial t} = t \cdot \vec{G}_{01} + [\vec{\omega} \times \vec{r}_l] + \sum_{\alpha=1}^{9} \omega_\alpha k_\alpha \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial k_\alpha}. \tag{21}
$$

Если записать уравнение (7) для случая начальных условий, принадлежащих семейству K, то с учетом (21) окончательно получим

$$
(3t + t_0) \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial t} = 2\vec{r}_l + [\vec{\omega} \times \vec{r}_l] \cdot t_0 + \vec{G}_{01} \cdot t_0 \cdot t + \vec{S}_l,
$$

$$
\vec{S}_l = \sum_{\alpha=1}^{9} n_\alpha k_\alpha \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial k_\alpha}, \qquad n_\alpha = \begin{cases} \omega_\alpha t_0 - 2, & \alpha \leqslant 3, \\ \omega_\alpha t_0 + 1, & \alpha \geqslant 4, \end{cases} \tag{22}
$$

уравнение, обобщающее уравнения п. г. и и. п.

5. Обсуждение результатов

Рассмотрим некоторые возможности решения уравнения (22), описывающего задачу трех тел. Поскольку уравнение (22) получено из независимых уравнений (21) и (7), то при конечных значениях $\omega_\alpha k_\alpha$ (конечность которых предполагается всюду), t_0 можно выбрать таким образом, чтобы одна из величин n_α стала равной нулю (т. е. исключить одно из слагаемых величины S_l). Если семейство K таково, что величины S_l равны нулю, то решением уравнения (22) будет (17), поскольку выбранные начальные значения будут удовлетворять условиям (15).

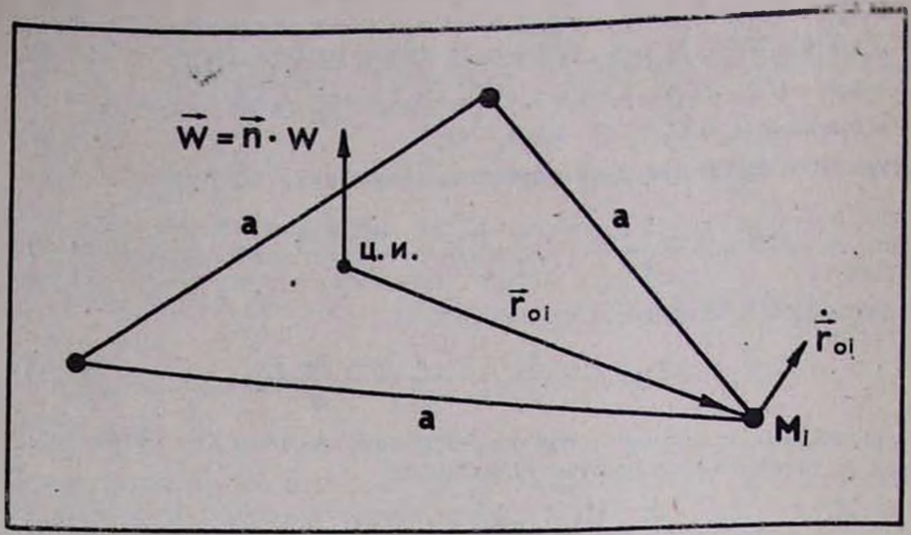

Рис. 2. Частицы образуют равносторонний треугольник, а перпендикуляр $\vec{n}$ (восстановленный в ц. и., в который можно поместить частицу) совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$

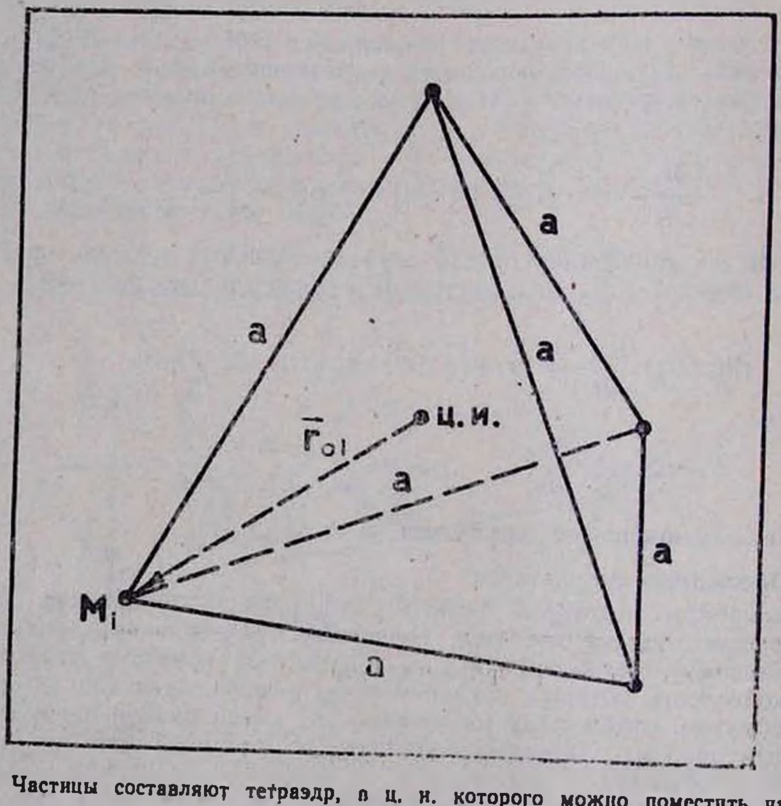

Рис. 3. Частицы составляют тетраэдр, в ц. и. которого можно поместить частицу

•Если семейство К выбрано так, что независимо от других значе-
α только одна величина (α=h) не равна нулю, то последний член

уравнении (22) можно преобразовать к виду $\vec{S} = n_h k_h \dfrac{\partial \vec{r}_l}{\partial k_h}$.

Таким образом, выбирая определенные начальные значения мож-
достичь понижения порядка уравнения (22) и соответственно упро-
ть его аналитическое или численное решение. Нужно отметить, что
общих начальных значений семейства К, нет необходимости в
нении уравнений (22), поскольку преобразования (18) в дифферен-
льном виде (т. е. $\dot{k}_\alpha = \omega_\alpha k_\alpha$) представляют собой характеристики
внений (21). Кроме того, при известных k_α задачу можно считать
бщих чертах решенной. При решении уравнения (22), можно счи-
ь, что в предельных точках $k_\alpha \sim \infty$ значения $\vec{r}_l$ определенны. В
естве иллюстраций приведены простые механические системы,
влетворяющие условиям (15) на рис. 2, 3, 4.

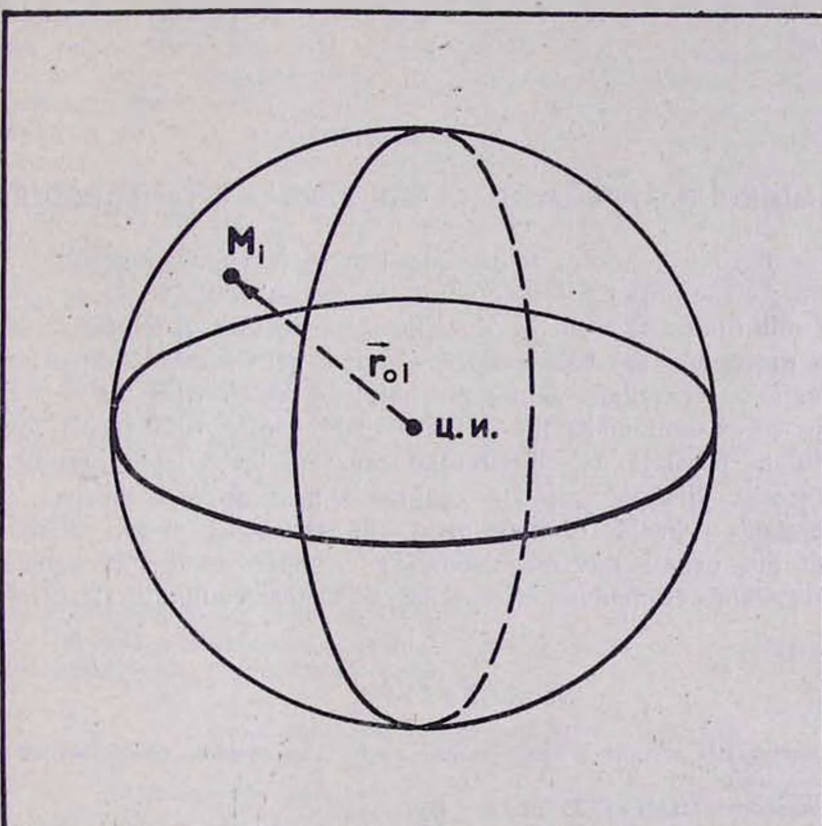

Рис. 4. Частицы распределены в шаре равномерно

В заключение автор выражает благодарность М. А. Мнацаканя
за полезные советы и обсуждение настоящей работы.

30 июля 1987 г.

Ա. Ա. ԲԵԳԼԱՐՅԱՆ

ԿԻՍԱԽՄԲԱԿԱՅԻՆ ՄՈՏԵՑՈՒՄ N-ՄԱՐՄՆԻ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Զարգացվել է կիսախմբային մոտեցում N-մարմնի խնդրի ուսումնասիրման համար։ Արտածված են մասնակի ածանցյալներով դիֆֆերենցիալ հավասարումներ տարբեր սկզբնական պայմաններով խնդրի ընտանիքի համար։ Ֆիզիկական գաղափարների հիման վրա ստացված են ինվարիանտ ձևափոխություններ շառավիղ վեկտորի համար, որոնք կիսախմբի կիրառման հետ միասին, թույլ են տալիս լուծել N-մարմնի խնդիրը մասնակի սկզբնական պայմանների դեպքում։

Համբարձումյանի ինվարիանտության սկզբունքի մասնակի օգտագործումը թույլ է տալիս գրել դիֆ-հավասարում երեք մարմնի խնդրի սկզբնական պայմանների ընտանիքի համար։ Քննարկվում է այդ հավասարման ընդհանուր տեսքով լուծման հնարավորությունը։ Բերվում են մեխանիկական համակարգերի օրինակներ, որոնց համար հաջողվում է նկարագրել համակարգի էվոլյուցիան։

A. A. BEGLARIAN

THE SEMIGROUP APPROACH TO THE PROBLEM OF N BODIES

The semigroup approach to the problem of N bodies investigation is developed. The differential equation in partial differences for the problems multitudes problem of N bodies with different initial conditions are given. On the basis of the physical considerations invariant transformations for radius-vectors are obtained which with the help of semigroup correlation make the problem of N bodies with special initial conditions possible. The differential equation for 3 bodies problem multitudes with different initial conditions is possible with the help of Ambartsumian's principle of invariance. The possibility of the common solving of this equation is discussed. The examples of the mechanical systems for which we manage to describe the further evolution are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Мнацаканян,* Новый аппарат теории переноса в плоском слое, Докт. дис., Ереван, 1983.
2. *М. А. Мнацаканян,* ДАН СССР, *262*, 4, с. 856, 1982.
3. *Д. В. Ширков,* Теор. и мат. физ., *60*, 2, с. 218, 1984.
4. *Д. В. Ширков,* Препринт ОИЯИ, Дубна, Е2-83-790, 1983.
5. *Д. В. Ширков,* ДАН СССР, *263*, 1. с. 64. 67. 1982.
6. *М. А. Мнацаканян,* Сообщ. Бюраканской обс., *50*, 59, 1978.
7. *Л. В. Овсянников,* Групповые свойства дифференциальных уравнений, АН СССР, Сибирское отделение, Новосибирск, 1962.
8. *В. А. Амбарцумян,* Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
9. *Г. Н. Дубошин,* Небесная механика, Основные задачи и методы, М.: Наука, 1968.