АСТРОФИЗИКА

ТОМ 47 НОЯБРЬ, 2004 ВЫПУСК 4

УДК: 524.728

ЭВОЛЮЦИЯ ПОЛИТРОПНЫХ ДИСКОВ РИМАНА ВНУТРИ ГАЛО

М.Г.АБРАМЯН
Поступила 5 мая 2004
Принята к печати 7 июля 2004

Исследованы равновесие эллиптических дисков Римана с политропным уравнением состояния и их эволюция, вызванная эффектами вязкости и гравитационной радиации, внутри сфероидального гало с относительной поверхностной плотностью массы κ. Эволюционная картина диска внутри гало с $\kappa < 0.5$, аналогичная эволюции одиночного диска, отличается от эволюционной картины диска внутри более плотного гало.

1. *Введение.* Проблема эллипсоидальных фигур равновесия вращающейся гравитирующей массы в наиболее общем виде была поставлена в работах Дирихле и Римана [1,2]. С точки зрения астрофизических приложений привлекательна теория вложенных фигур, учитывающая составную структуру звездных систем [3-8], в частности, SB-галактик, перемычки и балджи которых имеют форму сильно сплюснутых вдоль оси вращения трехосных эллипсоидов [9]. В рамках теории вложенных фигур нами были построены и исследованы "жидкие" и бесстолкновительные составные модели SB-галактик, которые обладают некоторыми основными наблюдаемыми свойствами этих объектов [10-12].

Для описания динамики дисков вокруг планет или плоских подсистем спиральных галактик часто используют двухмерные модели, поверхностные плотности масс которых представляют проекцию масс соответствующих трехмерных образований в плоскость их вращения. Пионерской в этой области является работа [13], в которой была исследована устойчивость холодных круговых дисков. Стабилизирующее действие гало на возмущения такого диска было установлено в работе [14]. Устойчивость дисков Маклорена и их бесстолкновительных аналогов была исследована в [15-19]. "Горячие" двухмерные аналоги S-эллипсоидов Римана с политропным уравнением состояния были рассмотрены в [20], где усмотрены их связи с дисками Маклорена, Якоби, Дедекинда, а также вопросы их эволюции. Устойчивость этих дисков исследована в работе [21].

Интерес к эллиптическим дискам Римана вызван в связи с наблюдаемым плоским характером баров и балджей SB-галактик [9]. С этой точки зрения представляется важным построение составных моделей, которые включают эллиптические диски Римана.

В настоящей работе исследованы свойства эллиптических дисков с политропным уравнением состояния с учетом гравитации сфероидального гало.

2. *Равновесие вложенного политропного диска.* Рассмотрим эллиптический диск с полуосями $a \geq b$, расположенными вдоль декартовых осей X, Y, вложенный внутри сфероидального гало. Их поверхностные плотности масс выражаются формулами

$$\sigma = \sigma_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}; \quad \sigma_* = \sigma_{0*}\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)^{1/2}, \tag{1}$$

а гравитационные потенциалы внутри них-

$$V = -\frac{\pi G \sigma_0}{a}\left[A(e)x^2 + B(e)y^2\right], \quad V_* = -\frac{\pi^2 G \sigma_{0*}}{4a}\left[x^2 + y^2\right], \tag{2}$$

где

$$A(e) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^2}\left[F(e) - E(e)\right], \quad B(e) = \frac{E(e) - \left(1-e^2\right)F(e)}{e^2\sqrt{1-e^2}}, \tag{3}$$

$e^2 = 1 - b^2/a^2$ - эксцентриситет вложенного диска,

$$F(e) = \int_0^{\pi/2}\left(1 - e^2\sin^2\varphi\right)^{-1/2} d\varphi, \quad E(e) = \int_0^{\pi/2}\left(1 - e^2\sin^2\varphi\right)^{1/2} d\varphi$$

- полные эллиптические интегралы.

Внутри вложенного диска, вращающегося с угловой скоростью Ω, вещество циркулирует по подобным к граничному эллипсу линиям тока:

$$u_x = -\frac{a}{b}\lambda\Omega y; \quad u_y = \frac{b}{a}\lambda\Omega x, \tag{4}$$

с завихренностью

$$\xi = \frac{2-e^2}{\sqrt{1-e^2}}\lambda\Omega, \tag{4'}$$

где λ есть частота циркуляций в единицах Ω. При $\lambda > 0$ вещество циркулирует в сторону вращения диска, а при $\lambda < 0$ - в обратном направлении. Случай $\lambda = 0$ соответствует дискам Якоби - эллиптическим дискам без внутренней циркуляции.

Уравнения, описывающие равновесие диска внутри гало, являются эйлерово уравнение во вращающейся системе отсчета и политропное уравнение состояния [12] в виде

$$P = K\sigma^3, \tag{5}$$

которые дают:

$$\left(1+\lambda^2\right)\Omega^2 + \frac{2-e^2}{\sqrt{1-e^2}}\lambda\Omega^2 - \frac{\pi G\sigma_0}{a}\left[A(e) + B(e) + \frac{\pi}{2}\frac{\sigma_{0*}}{\sigma_0}\right] + \frac{3}{2}\frac{K\sigma_0^2}{a^2}\frac{2-e^2}{1-e^2} = 0; \tag{6}$$

$$-\frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\lambda\Omega^2+\frac{\pi G\sigma_0}{a}[B(e)-A(e)]-\frac{3}{2}\frac{K\sigma_0^2}{a^2}\frac{e^2}{1-e^2}=0\,. \tag{7}$$

В пределе холодного диска ($K\to 0$), с помощью этих уравнений можно показать, что холодные диски внутри сфероидального гало могут быть лишь круговыми ($e\to 0$).

Исследуем равновесие системы, считая массу вложенного диска, отношение центральных плотностей гало и эллипсоида

$$M=\frac{2\pi}{3}\sigma_0 a^2\sqrt{1-e^2}\,,\quad \kappa\equiv\sigma_{0*}/\sigma_0\,, \tag{8}$$

а также параметр K, постоянными. С этой целью исключим из (6) и (7) большую полуось системы a и выразим σ_0 через массу эллипсоида M. В результате получим уравнение

$$\lambda^4+\left(2-\frac{\Omega_J^2}{\Omega^2}\right)\lambda^2+\frac{2\Omega_J^2}{\Omega^2}\frac{\left[A-\left(1-e^2\right)B+\frac{\pi}{4}\kappa e^2\right]}{\sqrt{\left(1-e^2\right)}\,(B-A)}\lambda+1-\frac{\Omega_J^2}{\Omega^2}=0\,, \tag{9}$$

где

$$\Omega_J^2(e,\kappa)=\frac{4\pi^2}{3}\frac{1-e^2}{e^4}(B-A)\left[A-\left(1-e^2\right)B+\frac{\pi}{4}\kappa e^2\right] \tag{10}$$

- квадрат угловой скорости вращения вложенного диска Якоби, выраженный в единицах G^2/K. В пределе кругового диска ($e\to 0$) имеем: $B-A=3\pi e^2/16$, $A-\left(1-e^2\right)B=\pi e^2/16$, в результате получаем

$$\Omega_J^2(0,\kappa)=\frac{\pi^4}{64}(1+4\kappa)=\Omega_{Mc}^2(\lambda\to 0), \tag{11}$$

что одновременно является угловой скоростью "горячего" вложенного диска Маклорена в инерциальной системе отсчета.

Большая полуось вложенного эллиптического диска с заданными значениями массы M и эксцентриситета e выражается формулой

$$a=\left(\frac{9MK}{2\pi^2 G}\right)^{1/3}\alpha(e,\lambda), \tag{12}$$

где

$$a(e,\lambda)=\left\{\frac{2\left(1-e^2\right)^{3/2}}{e^2}(B-A)-\frac{4\left(1-e^2\right)}{e^2}\left[A-\left(1-e^2\right)B+\frac{\pi}{4}e^2\kappa\right]\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right\}^{-1/3}\cdot \tag{13}$$

Угловая скорость вращения Ω вложенного диска, с заданными значениями частоты внутренней циркуляции λ и эксцентриситета e, определяется формулой

$$\Omega^2=\frac{2\pi^2}{3a^3}\frac{A-\left(1-e^2\right)B+\frac{\pi}{4}e^2\kappa}{e^2\sqrt{1-e^2}\left(1+\lambda^2\right)}\,, \tag{14}$$

которая для каждого e имеет максимум, $\Omega_{max}(e)$. Уравнение (9), определяющее λ для дисков с заданными Ω и e, при каждом $\Omega < \Omega_{max}$, имеет два реальных корня: $\lambda_-(e,\Omega) < \lambda_+(e,\Omega)$, что указывает на существование двух ветвей вложенных эллиптических дисков Римана (назовем их λ_+ и λ_- дисками). Диски у этих ветвей, при одинаковых значениях эксцентриситета e характеризуются разными кинематическими и динамическими свойствами. Ветвь λ_- состоит из дисков с обратной к вращению циркуляцией вещества ($\lambda_- < 0$), в то время как среди дисков ветви λ_+, наряду с дисками с $\lambda > 0$, имеется небольшая область дисков с $\lambda_- < 0$. С ростом относительной плотности гало κ эта область расширяется.

Полная энергия вложенного диска в единицах $\left(6\pi^2 G^4 M^5/125\,K\right)^{1/3}$ определяется формулой

$$E = W + T + U = -\frac{F}{a} - \frac{\pi}{4a}\frac{2-e^2}{\sqrt{1-e^2}}\kappa + \frac{3a^2}{4\pi^2}\left[\left(2-e^2\right)\left(1+\lambda^2\right) + 4\lambda\sqrt{1-e^2}\right]\Omega^2 + \frac{a^{-4}}{4\left(1-e^2\right)}, \quad (15)$$

где W - гравитационная энергия диска внутри гало (первые два члена в правой части (15)), T - полная кинетическая энергия, U - внутренняя энергия (последний член). E всегда отрицательна. Однако в дальнейшем через E обозначим ее абсолютную величину, т.е. росту E будет соответствовать убывание энергии.

Полный угловой момент диска в единицах $\left(81\,GM^5K^{1/2}/500\pi^4\right)^{1/3}$ выражается формулой

$$L = a^2\,\Omega\left[2 - e^2 + 2\sqrt{1-e^2}\,\lambda\right]. \quad (16)$$

Циркуляция скорости по периметру вложенного диска в инерциальной системе отсчета, в единицах $\left(81\,GM^5K^{1/2}/4\pi\right)^{1/3}$, равна

$$C = a^2\,\Omega\left[2\sqrt{1-e^2} + \left(2-e^2\right)\lambda\right]. \quad (16')$$

Как и следовало ожидать, угловой момент и циркуляция скорости обращаются в нуль для невращающегося диска Маклорена ($e = 0, \lambda = -1$).

Параметр устойчивости Пиблза-Острайкера для вложенного диска имеет вид

$$t = \frac{T}{|W|} = \frac{\left[\left(2-e^2\right)\left(1+\lambda^2\right) + 4\lambda\sqrt{1-e^2}\right]\left[A - \left(1-e^2\right)B + \frac{\pi}{4}e^2\kappa\right]}{2e^2\left[\sqrt{1-e^2}\,F + \frac{\pi}{4}\left(2-e^2\right)\kappa\right]\left(1+\lambda^2\right)}. \quad (17)$$

Теорема вириала ограничивает значения параметра: $t \le 1/2$, а критерий Пиблза-Острайкера гласит [22], что устойчивым сильно сплюснутым гравитирующим системам соответствуют значения $t \le 0.14 \pm 0.03$. Однако мы заметили [5,23], что этот критерий может быть нарушен при учете стабилизирующего влияния гало. В дальнейшем данный результат был получен и Дуризеном [24].

3. *Вложенные круговые диски.* В пределе кругового диска вложенные диски Римана переходят во вложенные диски Маклорена. Из (4) и (4') следует, что во вращающейся с угловой скоростью Ω системе отсчета диск Маклорена будет казаться имеющим внутренние стационарные течения с завихренностью [1]

$$\xi = 2\left(\Omega_{Mc} - \Omega\right), \tag{18}$$

где Ω_{Mc} - угловая скорость вращения вложенного диска Маклорена. С учетом (4') и (14) и тем, что в пределе кругового диска

$$a^{-3}(0,\lambda) = \frac{\pi}{4}\left[\frac{3}{2} - (1+4\kappa)\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right], \tag{19}$$

находим

$$\Omega_{Mc} = (1+\lambda)\Omega = (1+\lambda)\sqrt{\frac{\pi^3(1+4\kappa)}{24a^3\left(1+\lambda^2\right)}} = \frac{\pi^2}{8}(1+4\kappa)^{1/2}\frac{\left[1+\lambda^2 - \frac{2}{3}(1+4\kappa)\lambda\right]^{-1/2}(1+\lambda)}{1+\lambda^2}. \tag{20}$$

В пределе $\lambda \to 0$ полученная формула переходит в (11). Зависимости Ω_{Mc} от λ для значений $\kappa = 0; 0.25; 0.5; 0.75$ представлены на рис.1a. График зависимости угловой скорости (14) от λ, представленный на рис.1b, является более информативным, т.к. максимумы на этих кривых разделяют две ветви вложенных эллиптических дисков. А именно, диски с $\lambda > \lambda_\kappa$ представляют ветвь λ_+ - дисков, а диски с $\lambda < \lambda_\kappa$ - ветвь λ_- - дисков, где λ_κ - зависящее от относительной плотности гало κ значение λ, соответствующее максимуму Ω^2:

$$\lambda_\kappa = \frac{1+4\kappa}{3} + \frac{18 - 72\kappa - 144\kappa^2}{136^{1/3}\beta} - \frac{\beta}{3},$$
$$\beta^3 = 8 + 24\kappa - 48\kappa^2 - 64\kappa^3 + 6\sqrt{2 + 8\kappa - 64\kappa^3 - 64\kappa^4}. \tag{21}$$

Ниже, в табл.1 приведены несколько значений λ_κ и Ω_m^2, а также квадраты некоторых характерных угловых скоростей вращения вложенного диска Маклорена:

Заметим также, что внутри гало с $\kappa > 0.5$ не могут существовать λ_+ диски с $\lambda_1 < \lambda_+ < \lambda_2$, где

Таблица 1

ХАРАКТЕРНЫЕ УГЛОВЫЕ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ДЛЯ ВЛОЖЕННОГО ДИСКА МАКЛОРЕНА

κ	0	0.25	0.5	0.75
λ_κ	-0.2531	-0.3603	-0.4142	-0.4466
Ω_m^2	1.6572	3.8399	6.6532	10.1154
Ω_J^2	1.5220	3.0440	4.5651	6.0881
Ω_-^2	1.0147	2.5367	4.5661	7.1028
Ω_+^2	0.5073	0.5073	0	-

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{3}\left[1 + 4\kappa\sqrt{2(\kappa+1)(2\kappa-1)}\right] \tag{22}$$

- корни подкоренного выражения в числителе (20). Им соответствуют отрицательные значения параметра a (следовательно, положительная полная энергия, мнимый угловой момент и мнимая циркуляция скорости (см. ниже формулы (23))).

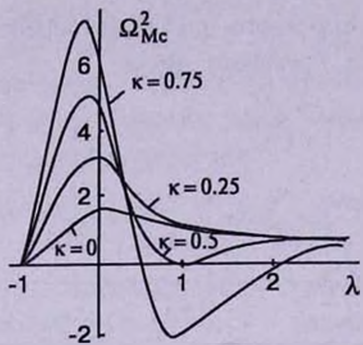

Рис.1а. Зависимость $\Omega^2_{Mc}(\lambda)$ для дисков с $\lambda = 0; 0.25; 0.5; 0.75$.

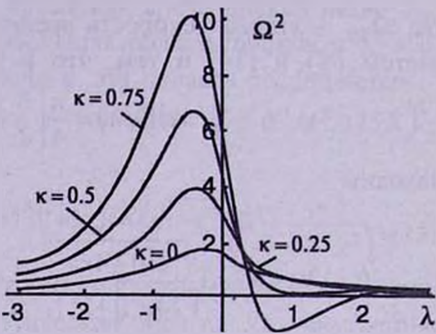

Рис.1b. Зависимость $\Omega^2(\lambda)$ для дисков с $\lambda = 0; 0.25; 0.5; 0.75$.

Формулы (15)-(17) для вложенного диска Маклорена принимают вид:

$$E = \frac{\pi}{32a}\left[11 + 8\kappa - 2(1+4\kappa)\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right]; \quad L = C = (1+\lambda)\sqrt{\frac{\pi^3(1+4\kappa)}{6(1+\lambda^2)}a}\,;$$

$$t_{Mc} = \frac{1+4\kappa}{8(1+\kappa)}\frac{(1+\lambda)^2}{1+\lambda^2}, \tag{23}$$

где a определяется формулой (19).

В пределах $\infty > \lambda > -\infty$ параметр t_{Mc} принимает значения от нуля (при $\lambda = -1$) до максимального значения $t_+ = (1+4\kappa)/4(1+\kappa)$, при $\lambda = 1$.

С помощью (14) и (23), с учетом (19) можно получить зависимость угловой скорости вращения вложенного диска от t_{Mc} в аналитическом виде:

$$\Omega^2(t_{Mc}) = \frac{\pi^4}{96}\frac{[8(\kappa+1)t_{Mc} - 4\kappa - 1]^2(\kappa+1)(1-2t_{Mc})}{4\kappa + 1 \pm 4\sqrt{(\kappa+1)[4\kappa+1-4(\kappa+1)t_{Mc}]t_{Mc}}}. \tag{24}$$

Для угловой скорости диска Маклорена с $\lambda = \pm 1$ из (15) получим соответственно:

$$\Omega^2_+(\kappa) = \frac{\pi^4}{192}(1+4\kappa)(1-2\kappa) \quad \text{и} \quad \Omega^2_-(\kappa) = \frac{\pi^4}{96}(1+\kappa)(1+4\kappa), \tag{25}$$

некоторые значения которых представлены в табл.1.

На графике рис.2 кривые представляют зависимость $\Omega^2(t_{Mc})$ для маклореновских дисков внутри гало с $\kappa = 0; 0.25; 0.5; 0.75$. Кривые для λ_- дисков соприкасаются с осью ординат в точках $\Omega^2_-(\kappa)$, а с осью абсцисс - в точках $t_0 = (4\kappa+1)/8(\kappa+1)$. Наибольшее значение, равное

t_+, параметр t_{Mc} принимает у λ_+ дисков, вращающихся с угловой скоросью Ω_+.

Полная энергия вложенного диска по абсолютной величине принимает максимальное значение у невращающегося ($\lambda = -1$) вложенного диска Маклорена:

$$E_m = \frac{3}{4}\left[\frac{\pi}{2}(1+\kappa)\right]^{4/3}. \qquad (26)$$

Для этих λ_- дисков имеем: $L_- = C_- = t_- = 0$. Характеристиками вложенных дисков Римана являются также значения энергии, углового момента, циркуляции скорости и параметра устойчивости Пиблза-Острайкера t_{Mc} диска Маклорена с $\lambda = +1$ и $\lambda = 0$:

$$E_+ = 0.181(5+2\kappa)(1-2\kappa)^{1/3}, \quad L_+ = C_+ = 3.347(1+4\kappa)^{1/3}(1-2\kappa)^{-1/6},$$
$$t_+ = (1+4\kappa)/4(1+\kappa), \quad E_0 = 0.104(11+4\kappa), \qquad (27)$$
$$L_0 = C_0 = 2.212(1+2\kappa)^{1/2}, \quad t_0 = (4\kappa+1)/8(\kappa+1).$$

4. *Диски, вращающиеся с угловой скоростью* Ω_J. Для вложенных дисков, вращающихся с угловой скоростью дисков Якоби (10), уравнение (9) расщепляется на

$$\lambda \equiv 0; \quad \lambda^3 + \lambda + 2\frac{\left[A - \left(1-e^2\right)B + \frac{\pi}{4}\kappa e^2\right]}{\sqrt{\left(1-e^2\right)(B-A)}} = 0. \qquad (28)$$

Первое из них представляет вложенные диски Якоби, а второе - эллиптические диски с внутренней циркуляцией вещества, но вращающиеся с угловой скоростью вложенных дисков Якоби. Зависимость $\Omega_J^2(b/a)$ для дисков (графически, более выразительными представляются зависимости параметров от отношения полуосей диска - $b/a = \sqrt{1-e^2}$) внутри гало с разными значениями относительной плотности κ представлена на рис.3а.

Для каждого значения e и κ второе уравнение (28) имеет одно действительное отрицательное решение. При этом, чем больше κ и b/a, тем больше по модулю частота циркуляции λ (см. рис.3b). Следовательно, как одиночные, так и вложенные диски, вращающиеся с угловой скоростью Якоби, либо не имеют внутренней циркуляции вещества ($\lambda \equiv 0$ - собственно, эллиптические диски Якоби), либо вещество внутри них циркулирует против их вращения. Однако полный угловой момент Ω_J-дисков положителен внутри гало с $\kappa \le 1/2$. При больших относительных плотностях гало, начиная с некоторого значения b/a, зависящего от κ, появляются Ω_J-диски, угловой момент которых направлен противоположно их вращению (рис.3с). На графике рис.3d кривые представляют зависимость параметра устойчивости Пиблза-Острайкера от b/a для Ω_J-дисков внутри гало разных плотностей.

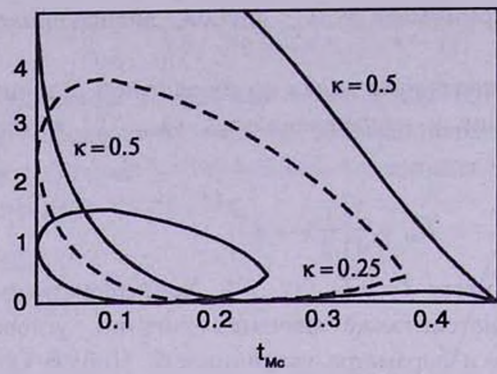

Рис.2. Зависимость $\Omega^2(t_{Mc})$.

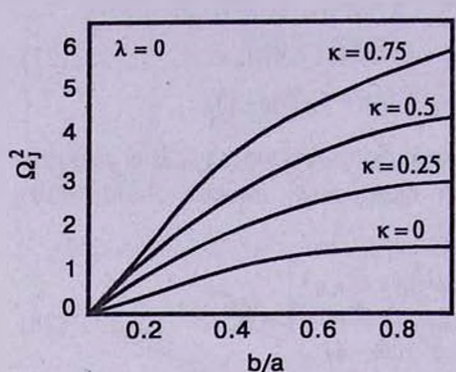

Рис.3a. Зависимость $\Omega_J^2(b/a)$.

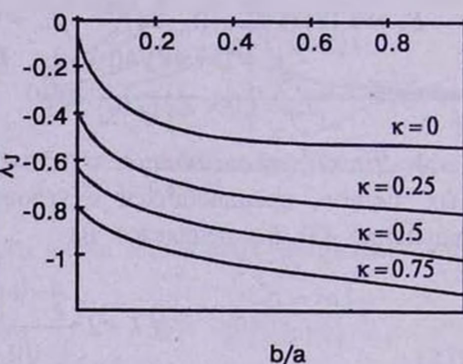

Рис.3b. Зависимость $\lambda(b/a)$.

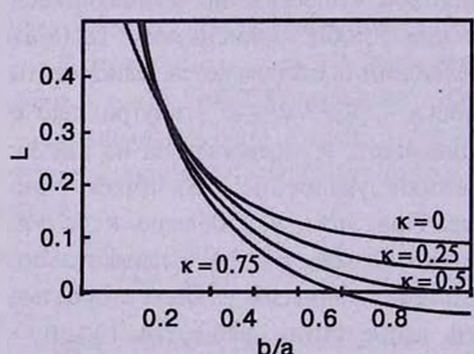

Рис.3c. Угловой момент Ω_J -дисков.

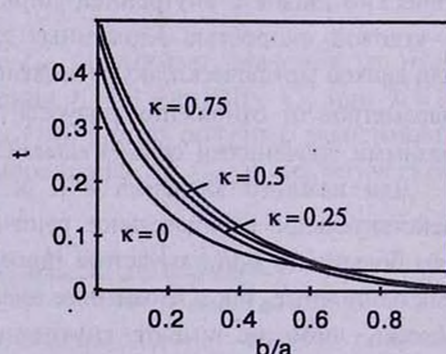

Рис.3d. Параметр $t(b/a)$ для Ω_J -дисков.

5. *Вложенные эллиптические диски Римана.* Зависимости $\Omega^2(b/a)$ для одиночных λ_+ и λ_- дисков ($\kappa = 0$) и дисков, вложенных внутри гало с относительной плотностью $\kappa = 0.25$, представлены на графиках рис.4a, b. Верхние кривые на этих графиках соответствуют эллипсоидам, вращающимся с максимальной угловой скоростью Ω_M, вторые сверху кривые у λ_+ - дисков - дискам Якоби ($\lambda = 0$).

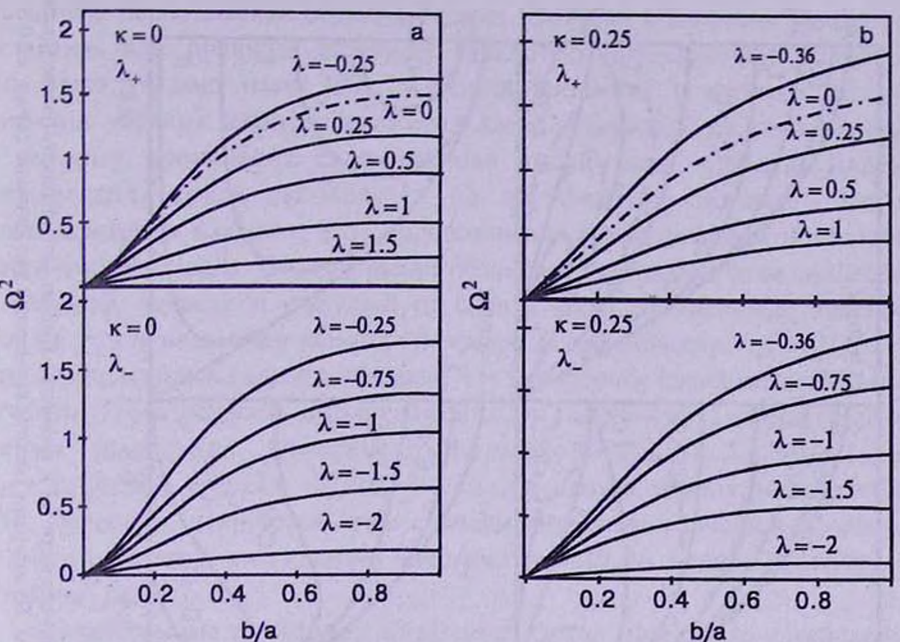

Рис.4a. Зависимость $\Omega^2(b/a)$ для одиночных λ_+ и λ_- дисков с $\lambda_+ = -0.25, 0, 0.25, 0.5, 1.2$.

Рис.4b. Зависимость $\Omega^2(b/a)$ для λ_+ и λ_- дисков, вложенных внутри гало с $\kappa = 0.25$.

Характерные контуры постоянных значений полной энергии $|E|$, углового момента L, циркуляции скорости C диска, вложенного внутри гало относительной плотности κ, в плоскости $(\Omega^2, b/a)$, представлены на рис.5. Значения $\Omega^2_\pm$ на осях ординат определяются через (25).

В теории жидких эллипсоидальных фигур равновесия известно, что эллипсоиды Римана разветвляются от устойчивых сфероидов Маклорена [1]. Нами было показано, что этот результат справедлив для вложенных жидких и бесстолкновительных эллипсоидальных фигур [4,5,25,26]. Легко убедиться, что вложенные эллиптические диски с политропным уравнением состояния также разветвляются от соответствующих устойчивых дисков Маклорена. Между тем, как видно из уравнения (9), для эллиптических дисков с заданными значениями массы и эксцентриситета (как одиночных, так и вложенных) с политропным уравнением состояния, нарушается теорема Дедекинда о сопряженных конфигурациях [1,5,6]: уравнение (9) не инвариантно относительно преобразования $\lambda \to 1/\lambda$.

Теперь обсудим вопрос эволюции вложенного диска с учетом механизмов диссипации энергии. В качестве их могут служить эффекты вязкости и гравитационная радиация вращающегося вложенного эллиптического диска [27,28].

6. *Эволюция вложенного диска из-за вязкой диссипации энергии.* Обычная молекулярная вязкость межзвездной среды мала, а характерные

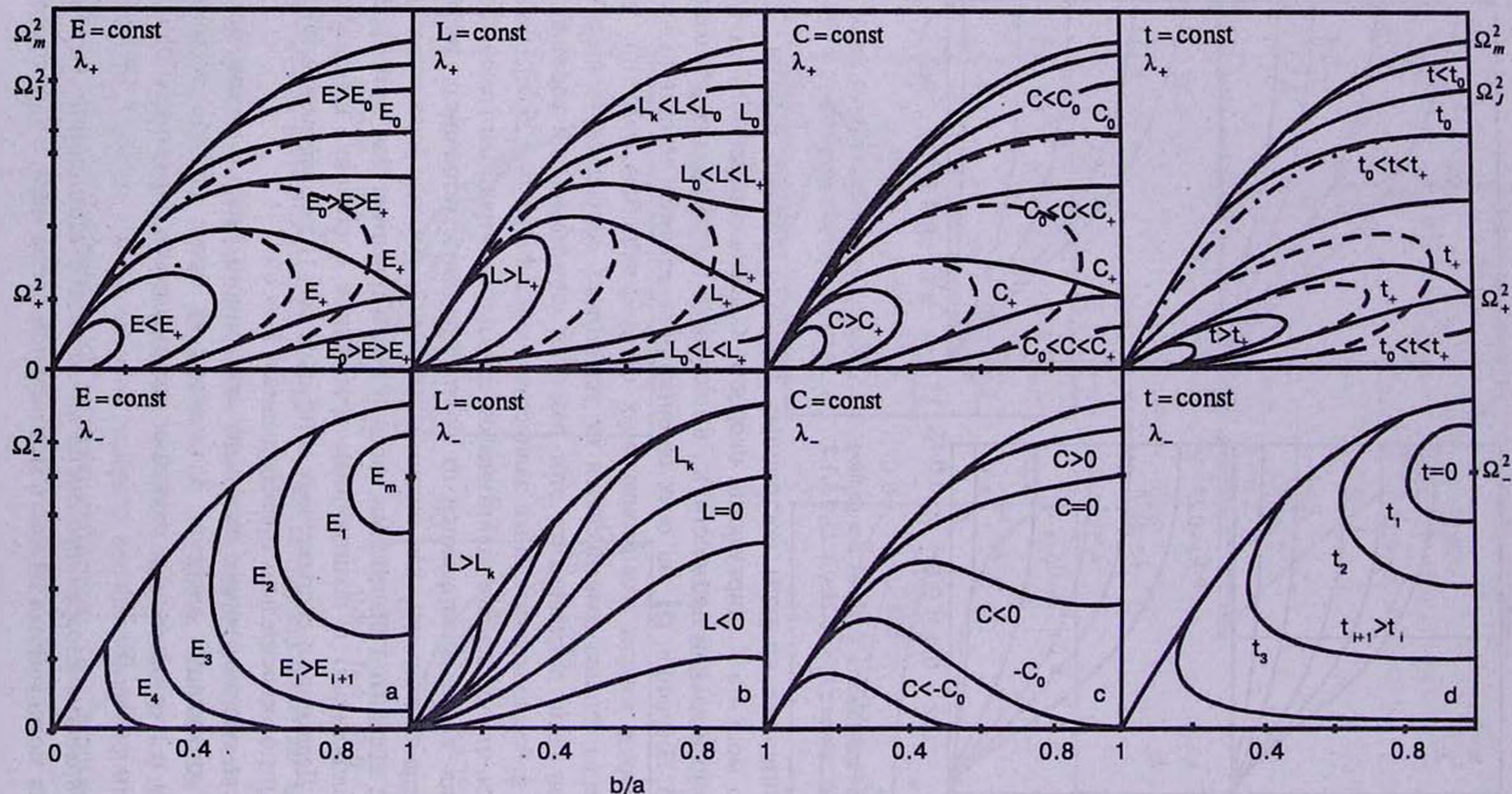

Рис.5. Контуры постоянных значений энергии (a), углового момента (b), циркуляции скорости (c) и параметра Пиблза-Остряйкера (d) вложенного диска Римана в плоскостях λ_+ -дисков (верхние графики) и λ_- -дисков (нижние графики). Пунктирами указаны примерный ход кривых в случае $\kappa \geq 0.5$.

масштабы галактических структур велики. Поэтому в вопросах эволюции галактик, как правило, обычной вязкостью пренебрегают. Однако, как было указано нами [29], в действительности в плоских дисках галактик картина намного сложнее. Здесь возникают ударные волны, в которых происходит существенная диссипация энергии. Далее, межзвездная среда распадается на двухфазную систему - часть конденсируется в облака, что сопровождается высвечиванием некоторой части энергии диска. Столкновения облаков между собой тоже приводят к переносу энергии и импульса от слоя к слою... Описанные явления можно учесть введением некоторой эффективной вязкости: $\upsilon_{ef} \approx (1/3)\upsilon^2\tau$, где υ - характерная скорость облаков, τ - характерное время их свободного пробега. Тогда скорость вязкой диссипации энергии от единицы массы диска выразится известной формулой $\Phi_v = \Sigma_{ik}\Sigma_{ki}/2\upsilon_{ef}$, где $\Sigma_{ik} = \upsilon_{ef}\left(\partial\upsilon_i/\partial x_k + \partial\upsilon_k/\partial x_i - (2/3)\delta_{ik}\,\partial\upsilon_j/\partial x_j\right)$ - тензор вязких напряжений [30]. Очевидно, некруговой диск с полем внутренних течений (4) имеет отличную от нуля диссипацию энергии, так что он непрерывно теряет энергию [20].

Эволюционные траектории вложенного диска могут быть определены рассмотрением контуров постоянных энергии и углового момента диска на графике рис.5. Диск будет эволюционировать вдоль контура постоянного углового момента в направлении убывания энергии (роста $|E|$). Все траектории заканчиваются на последовательностях секулярно устойчивых вложенных дисков Маклорена или Якоби.

Эволюционная картина вложенного диска зависит от значения относительной плотности гало. Эволюция диска внутри гало с $\kappa < 0.5$ отличается от эволюции диска внутри более плотного гало с $\kappa \geq 0.5$.

Рассмотрим сначала *эволюцию диска внутри гало с* $\kappa < 0.5$. Отличие эволюции этих дисков от эволюции одиночных дисков, в основном, носит количественный характер.

Рассмотрим λ_--диски (рис.5b, нижний график). Как в случае одиночных дисков [20], все λ_--диски эволюционируют к последовательности вложенных дисков Маклорена. Траектории же дисков с $L \geq L(\lambda = \lambda_\kappa) \equiv L_\kappa$ пересекают граничную кривую $\Omega^2_{max}(b/a)$ (ей соответствуют диски, вращающиеся на данной плоскости с максимальной угловой скоростью) и появляются на верхнем графике рис.5b в качестве траекторий λ_+-дисков.

Перейдем к рассмотрению λ_+-дисков (верхний график на рис.5b). Траектории с $L < L_0$ появляются в двух областях: *диски с быстрым вращением*, $\Omega > \Omega_J$ - эволюционирующие прямо к дискам Маклорена, и *диски с медленным вращением*, $\Omega << 1$ (они на рис.5 не показаны), которые эволюционируют к дискам последовательности Дедекинда (невращающиеся диски с быстрой внутренней циркуляцией вещества), далее, в качестве λ_--дисков, переходят в последовательность Маклорена.

При $L > L_0$ траектории заканчиваются на последовательности Якоби. Дальнейшее их развитие зависит от того, $L > L_+(\lambda = 1, b/a = 1)$ или нет.

Траектории с $L_0 < L < L_+$, при $\kappa < 0.5$, появляются на этом графике дважды. Они эволюционируют к последовательности Маклорена вдоль нижних траекторий, скачком переходят к соответствующим верхним траекториям, вдоль которых эволюционируют к дискам Якоби. Диски с $L > L_+$ эволюционируют к последовательности Якоби, не касаясь дисков Маклорена.

Рассмотрим эволюцию диска внутри гало с $\kappa \geq 0.5$. При этом точка разветвления при $\lambda = +1$, $b/a = 1$ в плоскостьях λ_+-дисков исчезает - траектории с $E < E_0$, $L > L_0$ в плоскости λ_+-дисков замыкаются, не касаясь последовательности Маклорена (примерный ход этих траекторий на рис.5 показан пунктирными линиями). Траектории же в плоскости λ_--дисков при этом качественно не меняются.

Эволюционная картина при этом следующая. При $L < L_0$ опять имеем *быстро- и медленно-* вращающиеся последовательности дисков, эволюционирующих к круговым дискам. При этом первые эволюционируют прямо к дискам Маклорена, вторые достигают дисков Маклорена, переходя к λ_--дискам через последовательность Дедекинда.

Диски с $L > L_0$ эволюционируют к эллиптическим дискам Якоби, не касаясь дисков Маклорена.

7. *Эволюция вложенного диска за счет гравитационной радиации*. За исключением эллипсоидов Маклорена и Дедекинда, гравитационная радиация вращающегося эллиптического диска, из-за изменяющегося со временем его квадрупольного момента, приводит к непрерывной потере энергии и углового момента [28], оставляя неизменной циркуляцию скорости (16'). Поэтому эволюция вложенного диска происходит по изолиниям циркуляции скорости, представленным на рис.5с, по направлению убывания энергии и углового момента (согласно Миллеру [27] $\dot{E} = \Omega \dot{L}$).

Очевидно, эволюционные траектории вращающегося эллиптического диска должны заканчиваться на последовательностях Маклорена и Дедекинда, которые не теряют энергию за счет гравитационного излучения.

Как в случае вязкости, эволюция диска внутри гало с $\kappa < 0.5$ отличается от эволюции диска внутри гало с $\kappa \geq 0.5$.

Исследуем случай $\kappa < 0.5$. Рассмотрим сначала λ_+-диски (рис.5с). Для дисков с $C > C_0$ траектории заканчиваются на эллипсоидах Дедекинда, пересекая последовательность Маклорена. Это происходит следующим образом. Траектории дисков с $C_0 < C < C_+$ пересекают последовательность Маклорена в двух местах. Эволюция соответствующих λ_+-дисков происходит вдоль верхних траекторий - к фигурам Маклорена, далее - к эллипсоидам Дедекинда - вдоль нижних траекторий. Траектории с $C > C_-$ эволюционируют к эллипсоидам Дедекинда, не касаясь последовательности Маклорена.

Траектории с $C < C_0$ возникают вблизи последовательности Якоби, пересекают ее, далее эволюционируют к секулярно устойчивым дискам Маклорена. Некоторые из этих траекторий пересекают граничную кривую $\Omega^2_{max}(b/a)$ и переходят в область λ_--дисков.

В плоскости λ_--дисков диски с $-C_0 < C < C_0$ эволюционируют к фигурам Маклорена. При $C < -C_0$ траектории заканчиваются на последовательности Дедекинда, минуя диски Маклорена. Диски с $C > 0$ продолжают траектории λ_+-дисков, проникших в область λ_--дисков через граничную кривую $\Omega^2_{max}(b/a)$.

Внутри гало с $\kappa \geq 0.5$ эволюционная картина дисков выглядит более простой. В плоскости λ_+-дисков контуры постоянной циркуляции скорости с $C > C_0$ замыкаются и далее заканчиваются на последовательности Дедекинда, не касаясь дисков Маклорена (на графике рис.5с примерный ход этих траекторий показан пунктиром).

Эволюционная же картина дисков с $C < C_0$ качественно не меняется.

8. *Заключение.* Учет гравитации сфероидального гало на равновесие дисков Римана с политропным уравнением состояния приводит к количественным изменениям их равновесных параметров. Возможны эллиптические диски с внутренней циркуляцией вещества как по направлению вращения $(\lambda > 0)$, так и против вращения $(\lambda < 0)$. Некоторые диски даже имеют отрицательный угловой момент и циркуляцию скорости. Изучен также вопрос эволюции вложенных дисков в присутствии вязкости и гравитационной радиации. Эволюционные траектории дисков внутри гало с относительной плотностью $\kappa < 0.5$ отличаются от траекторий дисков внутри более плотного гало.

Ереванский государственный университет,
Армения, email: mabr49@arminco.com

EVOLUTION OF THE RIEMANN POLYTROPIC DISCS IN HALO

M.G.ABRAHAMYAN

The equilibrium of Riemann elliptical discs with polytropic state equation as well as evolution caused by viscosity & gravitational radiation in the presence of spheroidal halo are considered. Evolutional trajectories of discs in the halo of relative density $\kappa < 0$ differ from ones inside the denser halo.

Key words: *Galaxy: discs: halo - galaxy: dynamics: evolution*

ЛИТЕРАТУРА

1. *С.Чандрасекар*, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир. М., 1973.
2. *Б.П.Кондратьев*, Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур, Наука, М., 1989.
3. *М.Г.Абрамян*, *С.А.Каплан*, Астрофизика, **10**, 665, 1974.
4. *М.Г.Абрамян*, *С.А.Каплан*, Астрофизика, **11**, 487,1975.
5. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **25**, 173, 1986.
6. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **25**, 342, 1986.
7. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **37**, 601, 1994.
8. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **38**, 55, 1995.
9. *J.Kormendy*, in Structure & Evolution of Normal Galaxies, eds. S.Fall, D.Lynden-Bell, Cambridge Univ. Press), 1973, p.85.
10. *М.Г.Абрамян*, Астрон. ж., **63**, 1089, 1986.
11. *М.Г.Абрамян*, Письма в Астрон. ж., **11**, 583, 1985.
12. *М.Г.Абрамян*, *Д.М.Седракян*, Уч. Зап. ЕГУ, **3(168)**, 54, 1987.
13. *C.Hunter*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **126**, 23, 1963.
14. *М.Г.Абрамян*, Изв. АН Арм.ССР, Физика, **13**, 458, 1978.
15. *F.Takahara*, Progress of Theor. Phys., **56**, 1665, 1976.
16. *W.M.Smith*, Astron. J., **84**, 979, 1979.
17. *S.D.Tremaine*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **175**, 557, 1976.
18. *K.C.Freeman*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **134**, 15, 1966.
19. *C.Hunter*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **166**, 633, 1974.
20. *M.D.Weinberg*, *S.Tremaine*, Astropys. J., **271**, 586, 1983.
21. *M.D.Weinberg*, Astropys. J., **271**, 595, 1983.
22. *J.P.Ostriker*, *P.J.Peebles*, Astrophys. J., **186**, 467, 1973.
23. *М.Г.Абрамян*, К теории устойчивости вложенных двухкомпонентных гравитирующих фигур равновесия. Канд. диссерт., Ереван, 1976.
24. *R.H.Durisen*, Astrophys. J., 224, **826**, 1978.
25. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **45**, 125, 2002.
26. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **45**, 251, 2002.
27. *B.D.Miller*, Astropys. J., **187**, 609, 1974.
28. *S.Detweiler*, *I.Lindblom*, Astropys. J., **213**, 193, 1977.
29. *М.Г.Абрамян*, Астрофизика, **14**, 579, 1978.
30. *Л.Д.Ландау*, *Е.М.Лифшиц*, Гидродинамика, Наука, М., 1986.