

УДК: 524.7

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНДРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ТОКОМ: ПОТОК ЭНЕРГИИ ОТ НАПРАВЛЕННОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ВЫБРОСА

Г.С.БИСНОВАТЫЙ-КОГАН

Поступила 13 января 2004

Получено точное решение для электромагнитного поля вокруг бесконечно длинного проводящего цилиндра с периодическим электрическим током вдоль оси. Решение единым образом дает величины полей вблизи цилиндра и переход к волновой зоне. Для длинноволновых колебаний, при которых длина волны намного превышает радиус цилиндра, вычислен поток электромагнитной энергии, излучаемой цилиндром. Решение может быть использовано для описания электромагнитного поля вокруг узко коллимированных выбросов из активных ядер галактик и квазаров.

1. *Введение.* Протяженные, сильно коллимированные выбросы, наблюдаемые во многих активных галактических ядрах [1,2], для некоторых целей удобно аппроксимировать моделью бесконечно длинного кругового цилиндра [3]. Магнитные поля в коллимированных выбросах задают его направление, а наличие продольного тока и азимутального магнитного поля сохраняют узконаправленный выброс на больших расстояниях от источника его образования (ядро активной галактики) и препятствуют его сферизации [4]. В направленных выбросах происходит постоянное ускорение электронов, т.к. время их высвечивания за счет синхротронного излучения мало по сравнению со временем его жизни. Одним из возможных источников ускорения электронов в джетах являются сверхдлинные электромагнитные волны, излучаемые при колебаниях продольного электрического тока. В [5] (см. также [6]) рассматривались длинноволновые собственные линейные колебания отдельного плазменного сгустка, на которые, как следует из наблюдений, часто разбиваются джеты. Для частного случая рассчитан спектр собственных колебаний, амплитуда и волновой вектор излученной волны в зависимости от характеристик волны внутри плазменного цилиндра.

В настоящей работе рассматриваются вынужденные колебания в бесконечно проводящем цилиндре под действием внешней периодической электродвижущей силы (ЭДС). В качестве такой ЭДС можно представить себе радиационную силу, ускоряющую электроны и периодически меняющуюся, например, из-за колебаний светимости центрального тела. Рассчитана амплитуда излучаемой волны в зависимости от амплитуды

колебаний тока для различных радиальных распределений тока и ЭДС внутри цилиндра. Тип излучаемой волны при вынужденных колебаниях бесконечного цилиндра со скалярной проводимостью может отличаться от случая собственных плазменного цилиндра с тензорной электропроводностью.

2. *Постановка задачи.* Рассмотрим бесконечно проводящий круговой цилиндр, окруженный вакуумом. Для применимости такого приближения плотность окружающего газа должна быть много меньше плотности вещества в цилиндре, а излучаемая цилиндром электромагнитная волна должна быть достаточно сильной, чтобы экранировкой окружающей плазмой можно было пренебречь. Уравнения Максвелла [7]

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho_e \quad (2)$$

для периодически меняющихся величин $\sim \exp(-i\omega t)$ примут вид

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0. \quad (4)$$

Для комплексных величин, зависящих только от координат, сохраним те же обозначения. Будем считать пространственный заряд равным нулю. Рассмотрим бесконечно длинный цилиндр, где в цилиндрической системе (r, ϕ, z) остаются ненулевыми лишь компоненты E_z , H_ϕ , j_z и $\partial/\partial\phi = \partial/\partial z = 0$. Тогда значимыми останутся лишь два уравнения из системы (3), (4)

$$\frac{dE_z}{dr} + \frac{i\omega}{c} H_\phi = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(rH_\phi)}{dr} + \frac{i\omega}{c} E_z - \frac{4\pi}{c} j_z = 0. \quad (6)$$

Подставляя (5) в (6), получим уравнение для E_z

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_z}{dr} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} E_z + \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_z = 0. \quad (7)$$

3. *Вакуумное решение.* В вакууме $j_z = 0$. Введем безразмерную переменную $x = r\omega/c$, тогда из (5), (7) имеем

$$x^2 E_z'' + x E_z' + x^2 E_z = 0, \quad H_\phi = i E_z'. \quad (8)$$

Здесь ' означает дифференцирование по x . Уравнение (8) относится к типу Бесселя и имеет решение

$$E_z = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x), \quad H_\phi = -i[C_1 J_1(x) + C_2 Y_1(x)]. \quad (9)$$

Здесь учтены рекуррентные соотношения для функций Бесселя [8]

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad Y_0'(x) = -Y_1(x). \quad (10)$$

Общее решение для физических величин, с учетом временной зависимости, получается из действительной части комплексного решения с учетом

$$\exp(-i\omega t) = \cos\omega t - i\sin\omega t, \quad C_1 = C_1^{(r)} + iC_1^{(i)}, \quad C_2 = C_2^{(r)} + iC_2^{(i)}. \quad (11)$$

Тогда общее решение в вакууме имеем в виде

$$E_z = [C_1^{(r)}J_0(x) + C_2^{(r)}Y_0(x)]\cos\omega t + [C_1^{(i)}J_0(x) + C_2^{(i)}Y_0(x)]\sin\omega t, \quad (12)$$

$$H_\phi = -[C_1^{(r)}J_1(x) + C_2^{(r)}Y_1(x)]\sin\omega t + [C_1^{(i)}J_1(x) + C_2^{(i)}Y_1(x)]\cos\omega t. \quad (13)$$

Граничное условие вдали от цилиндра следует из того, что там имеются только волны, расходящиеся от цилиндра, и отсутствуют сходящиеся волны. Это означает, что присутствуют только функции, зависящие от комбинации $(x - \omega t)$, и отсутствуют зависящие от комбинации $(x + \omega t)$. Воспользовавшись асимптотикой функций Бесселя при больших аргументах [8]

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad (14)$$

$$Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad Y_1(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{при } x \gg 1,$$

получим, что в расходящейся волне $C_1^{(i)} = -C_2^{(r)}$, $C_2^{(i)} = C_1^{(r)}$, когда асимптотическое решение на больших расстояниях имеет вид

$$E_z \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[C_1^{(r)} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \omega t\right) + C_2^{(r)} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \omega t\right) \right], \quad H_\phi = -E_z. \quad (15)$$

С учетом условий на бесконечности и выбором констант, общее решение в вакууме для расходящихся цилиндрических волн имеет вид

$$E_z = [C_1^{(r)}J_0(x) + C_2^{(r)}Y_0(x)]\cos\omega t + [-C_2^{(r)}J_0(x) + C_1^{(r)}Y_0(x)]\sin\omega t, \quad (16)$$

$$H_\phi = -[C_1^{(r)}J_1(x) + C_2^{(r)}Y_1(x)]\sin\omega t + [-C_2^{(r)}J_1(x) + C_1^{(r)}Y_1(x)]\cos\omega t. \quad (17)$$

4. *Решение внутри цилиндра.* В веществе имеют место уравнения

$$x^2 E_z'' + x E_z' + x^2 E_z + \frac{4\pi i}{\omega} x^2 j_z = 0, \quad H_\phi = iE_z'. \quad (18)$$

Ищем решение неоднородного линейного уравнения (18) в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения $\epsilon_0(x)$

$$E_z = \epsilon_1 J_0(x) + \epsilon_2 Y_0(x) + \epsilon_0(x). \quad (19)$$

Функция $Y_0(x)$ имеет в нуле особенность, поэтому константа $\epsilon_2 = 0$ в силу конечности в нуле решения. Используя метод вариации произвольной константы, ищем частное решение в виде $E_z = \epsilon(x)J_0(x)$. После подста-

новки в (18), получаем уравнение первого порядка относительно $F = \epsilon'$

$$x^2(F'J_0 + 2FJ_0') + xFJ_0 + \frac{4\pi i}{\omega} x^2 j_z = 0. \quad (20)$$

Решая это уравнение, получаем в итоге общее решение для амплитуды электрического поля в веществе, при наличии сторонней электродвижущей силы, приводящей к наличию периодического тока, в виде

$$E_z = -\frac{4\pi i}{\omega} J_0(x) \int_0^x \frac{dy}{y J_0^2(y)} \int_0^y z J_0(z) j_z(z) dz + \epsilon_1 J_0(x). \quad (21)$$

Рассмотрим цилиндр малого радиуса r_0 , когда длина волны много больше его радиуса

$$x_0 = \frac{\omega r_0}{c} \ll 1. \quad (22)$$

Тогда в решении для вещества можно использовать разложения функций Бесселя в нуле [8], при $x \ll 1$

$$J_0 \approx 1 - \frac{x^2}{4}, \quad J_1 \approx \frac{x}{2}, \quad Y_0 \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2}, \quad Y_1 \approx -\frac{2}{\pi x}. \quad (23)$$

С учетом (23) общее решение в веществе (21) для цилиндра малого радиуса примет вид

$$E_z = -\frac{2i\omega}{c^2} \int_0^x I_z(y) \frac{dy}{y} + \epsilon_1, \quad (24)$$

где $I_z(r) \equiv I_z(y)$ - амплитуда (комплексная) электрического тока через цилиндр внутри радиуса $r = cy/\omega$

$$I_z = 2\pi \int_0^r j_z r dr = 2\pi \frac{c^2}{\omega^2} \int_0^x j_z x dx. \quad (25)$$

Комплексные функция $I_z(r)$ и константа ϵ_1 представляются в виде

$$I_z = I_z^{(r)} + iI_z^{(i)}, \quad \epsilon_1 = \epsilon_1^{(r)} + i\epsilon_1^{(i)}. \quad (26)$$

5. *Сшивка решений и нахождение полей для случая длинных волн.* Полный ток через цилиндр $I_0 = I_z(r_0)$ и поля на его поверхности (изнутри) $E_0 = E_z(r_0)$, $H_0 = H_\phi(r_0)$ (действительные части комплексных выражений) равны:

$$I_0 = I_0^{(r)} \cos \omega t + I_0^{(i)} \sin \omega t, \\ E_0 = \left[\frac{2\omega}{c^2} \int_0^{x_0} I_z^{(i)}(y) \frac{dy}{y} + \epsilon_1^{(r)} \right] \cos \omega t + \left[-\frac{2\omega}{c^2} \int_0^{x_0} I_z^{(r)}(y) \frac{dy}{y} + \epsilon_1^{(i)} \right] \sin \omega t, \\ H_0 = \left[\frac{2\omega}{c^2} \frac{I_0^{(r)}}{x_0} + \frac{x_0}{2} \epsilon_1^{(i)} \right] \cos \omega t + \left[\frac{2\omega}{c^2} \frac{I_0^{(i)}}{x_0} - \frac{x_0}{2} \epsilon_1^{(r)} \right] \sin \omega t. \quad (27)$$

При малых x_0 внешнее решение на поверхности цилиндра имеет вид

$$E_{z0} = \left[C_1^{(r)} + C_2^{(r)} \frac{2}{\pi} \ln \frac{x_0}{2} \right] \cos \omega t + \left[-C_2^{(r)} + C_1^{(r)} \frac{2}{\pi} \ln \frac{x_0}{2} \right] \sin \omega t,$$

$$H_{\phi 0} = - \left[C_1^{(r)} \frac{x_0}{2} - C_2^{(r)} \frac{2}{\pi x_0} \right] \sin \omega t + \left[-C_2^{(r)} \frac{x_0}{2} - C_1^{(r)} \frac{2}{\pi x_0} \right] \cos \omega t. \quad (28)$$

Внешняя ЭДС вдоль оси внутри цилиндра запишем в виде $E_{ext}(x) = \varepsilon_{ext}(x) \exp(-i\omega t)$, что соответствует действительной части

$$E_{ext}(x) = \varepsilon_{ext}^{(r)}(x) \cos \omega t + \varepsilon_{ext}^{(i)}(x) \sin \omega t,$$

$$E_{ext}(x_0) = E_{ext0} = \varepsilon_{ext0}^{(r)} \cos \omega t + \varepsilon_{ext0}^{(i)} \sin \omega t. \quad (29)$$

В отсутствие поверхностных зарядов и токов все компоненты полей непрерывны на границе цилиндра. Из шивки (27), (28) для магнитного поля имеем

$$\frac{2\omega}{c^2} \frac{I_0^{(r)}}{x_0} + \frac{x_0}{2} \varepsilon_1^{(i)} = -C_2^{(r)} \frac{x_0}{2} - C_1^{(r)} \frac{2}{\pi x_0},$$

$$\frac{2\omega}{c^2} \frac{I_0^{(i)}}{x_0} - \frac{x_0}{2} \varepsilon_1^{(r)} = -C_1^{(r)} \frac{x_0}{2} + C_2^{(r)} \frac{2}{\pi x_0}. \quad (30)$$

Из шивки электрических полей на границе имеем из (27), (28)

$$\frac{2\omega}{c^2} \int_0^{x_0} I_z^{(i)}(y) \frac{dy}{y} + \varepsilon_1^{(r)} = C_1^{(r)} + C_2^{(r)} \frac{2}{\pi} \ln \frac{x_0}{2},$$

$$- \frac{2\omega}{c^2} \int_0^{x_0} I_z^{(r)}(y) \frac{dy}{y} + \varepsilon_1^{(i)} = -C_2^{(r)} + C_1^{(r)} \frac{2}{\pi} \ln \frac{x_0}{2}. \quad (31)$$

Решая систему (31), получаем коэффициенты для нахождения связи электромагнитного поля цилиндра с протекающим по нему периодическим током:

$$C_1^{(r)} \left(\frac{2}{\pi x_0} + \frac{x_0}{\pi} \ln \frac{x_0}{2} \right) = - \frac{2\omega}{c^2} \frac{I_0^{(r)}}{x_0} - \frac{x_0 \omega}{c^2} \int_0^{x_0} I_z^{(r)}(y) \frac{dy}{y}, \quad (32)$$

$$C_2^{(r)} \left(\frac{2}{\pi x_0} + \frac{x_0}{\pi} \ln \frac{x_0}{2} \right) = \frac{2\omega}{c^2} \frac{I_0^{(i)}}{x_0} + \frac{x_0 \omega}{c^2} \int_0^{x_0} I_z^{(i)}(y) \frac{dy}{y}. \quad (33)$$

$$\varepsilon_1^{(r)} = C_1^{(r)} + C_2^{(r)} \frac{2}{\pi} \ln \frac{x_0}{2} - \frac{2\omega}{c^2} \int_0^{x_0} I_z^{(i)}(y) \frac{dy}{y}, \quad (34)$$

$$\varepsilon_1^{(i)} = -C_2^{(r)} + C_1^{(r)} \frac{2}{\pi} \ln \frac{x_0}{2} + \frac{2\omega}{c^2} \int_0^{x_0} I_z^{(r)}(y) \frac{dy}{y}. \quad (35)$$

Рассмотрим случай, когда в результате действия внешней ЭДС имеет место чисто синусоидальный электрический ток и $I_z^{(r)} = 0$. Тогда из (32) и (35) следует

$$C_1^{(r)} = 0, \quad \varepsilon_1^{(i)} = -C_2^{(r)}. \quad (36)$$

С учетом неравенства $x_0 \ll 1$, можно пренебречь в (32) и (33) членами с логарифмом, а в (32)-(35) интегральными членами, так что детали распределения тока по цилиндру слабо влияют на результат. В этом приближении решение для коэффициентов $C_2^{(r)}$ и $\epsilon_1^{(r)}$ имеет вид

$$C_2^{(r)} = \frac{\pi\omega}{c^2} I_0^{(l)}, \quad \epsilon_1^{(r)} = \frac{2\omega}{c^2} \ln \frac{x_0}{2} I_0^{(l)}. \quad (37)$$

Из (16) получаем решение для электромагнитного поля вокруг цилиндра с синусоидальным электрическим током, когда длина волны много больше радиуса цилиндра, начиная с поверхности цилиндра вплоть до волновой зоны,

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\pi\omega}{c^2} I_0^{(l)} [Y_0(x) \cos\omega t - J_0(x) \sin\omega t], \\ H_\phi &= -\frac{\pi\omega}{c^2} I_0^{(l)} [Y_1(x) \sin\omega t + J_1(x) \cos\omega t]. \end{aligned} \quad (38)$$

Вблизи цилиндра решение, с учетом разложений (23), имеет вид

$$E_z = \frac{\pi\omega}{c^2} I_0^{(l)} \left(\frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} \cos\omega t - \sin\omega t \right) = \frac{2\omega}{c^2} I_0^{(l)} \ln \frac{x}{2} \cos\omega t = \frac{2\omega}{c^2} I_0^{(l)} \ln \frac{r\omega}{2c} \cos\omega t, \quad (39)$$

$$H_\phi = -\frac{\pi\omega}{c^2} I_0^{(l)} \left(-\frac{2}{\pi x} \sin\omega t + \frac{x}{2} \cos\omega t \right) = \frac{2\omega}{c^2 x} I_0^{(l)} \sin\omega t = \frac{2 I_0^{(l)}}{cr} \sin\omega t. \quad (40)$$

Отметим, что в ближней зоне волны, длина которой много больше радиуса цилиндра, магнитное поле адиабатически следует за током в цилиндре [7], а распределение электрического поля, с точностью до величины логарифмического члена, определяемого граничным условием, совпадает с распределением для линейно растущего тока в цилиндре [2], при замене ω на $1/t$. Вдали от цилиндра из (38) с учетом (14) получаем решение в виде расходящейся цилиндрической электромагнитной волны

$$H_\phi = -E_z = -\frac{\pi\omega}{c^2} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} I_0^{(l)} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \omega t\right) = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi\omega}{cr}} I_0^{(l)} \sin\left[\frac{\omega}{c}(r-ct) - \frac{\pi}{4}\right]. \quad (41)$$

6. Поток энергии от направленного релятивистского выброса.

Цилиндрическая модель (см. рис.1) может быть применена к описанию электромагнитных процессов в сильно коллимированных релятивистских выбросах из активных галактических ядер. Реалистической представляется магнитная коллимация азимутальным магнитным полем, генерируемым электрическим током вдоль оси цилиндра, который может быть периодическим [4]. Генерируемая при этом сильная электромагнитная волна может эффективно ускорять частицы на большом расстоянии от ядра вблизи самого выброса и даже на расстояниях от него [5].

Оценим поток энергии в электромагнитной волне, излучаемой релятивистским выбросом. Если длина выброса - l , радиус выброса - r_0 ,

плотность электронов, создающих электрический ток - n_e , e - заряд электрона, то с учетом (41) поток вектора Пойнтинга $P = (c/4\pi)[E \times B]$ через поверхность цилиндра равен

$$F = 2\pi r_0 l P = \frac{\pi l \omega}{2c^2} I_0^2. \quad (42)$$

Здесь квадрат синуса заменен его средним значением 1/2. Учитывая выражение для электрического тока направленным вдоль оси движением релятивистских электронов $I_0 = \pi r_0^2 n_e c e$, получим поток электромагнитной энергии от направленного выброса в виде:

$$F = \frac{\pi^3}{2} e^2 l r_0^4 \omega n_e^2 = 2 \cdot 10^{49} \text{ эрг/с} \frac{l}{1 \text{ кпк}} \left(\frac{r_0}{1 \text{ пк}} \right)^4 \frac{T}{100 \text{ лет}} \left(\frac{n_e}{10^{-10} \text{ см}^{-3}} \right)^2. \quad (43)$$

Здесь $T = 2\pi/\omega$ - период электромагнитной волны. Таким образом, электромагнитная волна, генерируемая направленным выбросом из ядра

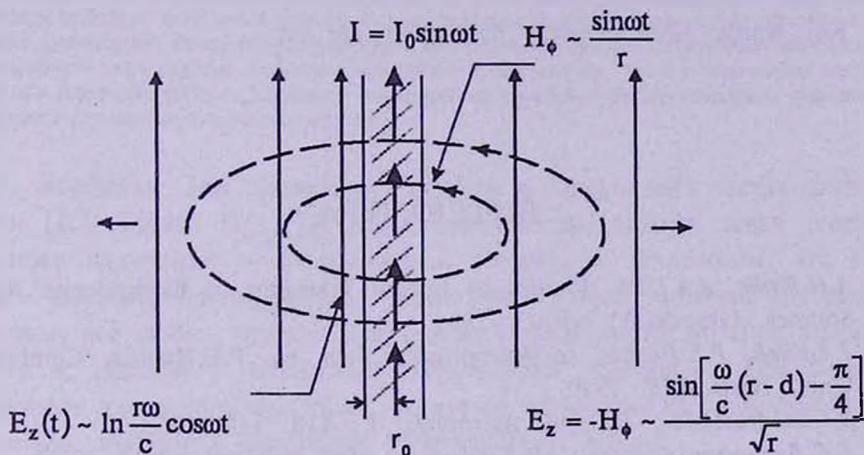


Рис.1. Магнитное и электрическое поля вокруг бесконечного цилиндра радиуса r_0 с синусоидальным электрическим током вдоль оси цилиндра низкой частоты $\omega \ll c/r_0$. В ближней зоне электрическое и магнитное поля меняются периодически в антифазе, вдали от цилиндра $r \gg c/\omega$ имеет место расходящаяся цилиндрическая электромагнитная волна с $E_z = -H_\phi$.

галактики, может уносить огромный поток энергии, сравнимый или даже превышающий наблюдаемый в различных диапазонах от радио до жесткого гамма. Часть этого потока может идти на ускорение частиц, вплоть до очень высоких энергий [5], и обеспечивать излучение выброса в наблюдаемых электромагнитных диапазонах энергий.

Автор благодарен РФФИ, грант 02-02-16700, Королевскому обществу, грант R.G.MATH 445863 за частичную поддержку и Университету г. Лидс за гостеприимство.

ELECTROMAGNETIC FIELD AROUND A CYLINDER WITH A PERIODIC ELECTRICAL CURRENT: ENERGY FLUX FROM RELATIVISTIC JET

G.S.BISNOVATYI-KOGAN

The exact solution is obtained for the electromagnetic field around the conducting cylinder of infinite length with an axial current. The solution describes simultaneously the fields in the near zone close to the cylinder, and transition to the wave zone. The electromagnetic energy flux from such cylinder is calculated for long wave oscillations, when the wave length is much larger than the radius of a cylinder. This solution may be applied for description of the electromagnetic field around relativistic jets from active galactic nuclei and quasars.

Key words: *electromagnetic field: relativistic jets*

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.H.Bridle, J.A.Eilek*, Physics of Energy Transport in Extragalactic Radio Sources, Greenbank: NRAO, 1984.
2. *J.A.Eilek, P.E.Hughes*, in *Astrophysical Jets*, ed. P.E.Hughes, Cambridge Univ. Press, 428, 1990.
3. *S.Chandrasekhar, E.Fermi*, *Astrophys. J.*, **118**, 116, 1953.
4. *Г.С.Бисноватый-Коган, Б.В.Комберг, А.М.Фридман*, *Астрон. ж.*, **46**, 465, 1969.
5. *G.S.Bisnovaty-Kogan, R.V.E.Lovelace*, *Astron. Astrophys.* **296**, L17, 1995.
6. *G.S.Bisnovaty-Kogan*, Proc. of the First Int. Meeting on Kosmomicrophysics "Kosmion", Ed. Frontiers, M., 1996, pp.333-350.
7. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц*, *Электродинамика сплошных сред*. Наука, М., 1982.
8. *И.С.Градштейн, И.М.Рыжик*, *Таблицы интегралов, рядов и произведений*. Наука, М., 1964.
9. *G.S.Bisnovaty-Kogan*, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, **343**, 771, 2003.