

УДК: 524.8:531.51

КВАНТОВЫЕ ВАКУУМНЫЕ ЭФФЕКТЫ В  
ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ГЛОБАЛЬНОГО  
МОНОПОЛЯ

А.А.СААРЯН

Поступила 20 июня 2003

Принята к печати 15 января 2004

Исследованы вакуумные средние тензора энергии-импульса массивного скалярного поля, удовлетворяющего смешанному граничному условию Робина на сферической поверхности на фоне гравитационного поля  $D+1$ -мерного глобального монополя. Выведены выражения для функции Вайтмана, вакуумного ожидания квадрата поля, плотности энергии вакуума, радиального и азимутального давлений внутри сферической поверхности. Процедура регуляризации основана на использовании обобщенной формулы Абеля-Плана для рядов по нулям цилиндрических функций. Эта формула позволяет выделить из вакуумных средних части, обусловленные гравитационным полем глобального монополя при отсутствии границ, и представить индуцированные границей части в виде экспоненциально сходящихся интегралов, удобных, в частности, для численных расчетов. Исследовано асимптотическое поведение вакуумных средних в центре сферы и вблизи ее поверхности. Показано, что для малых значений параметра, описывающего дефицит телесного угла в геометрии глобального монополя, индуцированные границей вакуумные натяжения сильно анизотропны.

1. *Введение.* Топологические дефекты играют важную роль в различных областях физики: от физики конденсированного состояния до образования крупномасштабной структуры во Вселенной (см., например, [1] и приведенные там ссылки). В частности, замечательным свойством неабелевых калибровочных теорий является существование в них объектов, называемых магнитными монополями [2]. В рамках космологии Большого Взрыва, объединенные теории фундаментальных взаимодействий предсказывают, что в ранних стадиях эволюции Вселенная проходит через ряд фазовых переходов. В зависимости от природы нарушенной при этом симметрии, эти фазовые переходы приводят к образованию различных типов топологических дефектов (космические струны, монополи и т.д.) [3]. При нарушении глобальной  $SO(3)$  симметрии триплетного скалярного поля образуются точечные дефекты, называемые глобальными монополями. Упрощенный глобальный монополь впервые был рассмотрен Соколовым и Старобинским [4], а соответствующие гравитационные эффекты исследованы в работе [5], где найдено решение уравнений Эйнштейна, которое на больших расстояниях описывает глобальный монополь. Отдельный круг задач составляют исследования квантовых эффектов негравитационных полей

вблизи топологических дефектов. Генерированные этими эффектами тензоры энергии-импульса обычно нарушают условия теорем Хокинга-Пенроуза о сингулярностях и приводят к интересной гравитационной динамике. В частности, квантовые вакуумные эффекты материальных полей на фоне глобального монополя рассмотрены в работах [6-11]. Дзета-функция и энергия вакуума для сферической границы в поле глобального монополя вычислены в [10,11]. В этом случае одновременно присутствуют два источника поляризации вакуума: гравитационным полем и границами, ограничивающими объем квантования.

Наложение граничных условий на квантовое поле приводит к модификации спектра нулевых колебаний вакуума и в результате к сдвигу вакуумных средних физических величин, таких, как плотность энергии и натяжения. В частности, возникают вакуумные силы, действующие на ограничивающие поверхности. Это хорошо известный в квантовой теории поля эффект Казимира. Характер вакуумных сил зависит от природы квантового поля, от геометрии границ и налагаемых граничных условий (см., например, [12-14] и приведенные там ссылки).

В настоящей работе рассмотрены вакуумные квантовые эффекты массивного скалярного поля с произвольным параметром связи с кривизной  $\xi$  на фоне гравитационного поля  $D+1$ -мерного точечного глобального монополя. Предполагается, что поле удовлетворяет смешанному граничному условию Робина на концентрической с монополем сферической поверхности. Граничное условие Робина включает в качестве частных случаев условия Дирихле, Неймана, граничное условие электромагнитного ТМ-типа и конформно-инвариантное граничное условие Хокинга. Исследованы положительно-частотная функция Вайтмана, вакуумные средние квадрата оператора поля и тензора энергии-импульса. Вычисления соответствующих билинейных произведений скалярного поля проведены методом суммирования по модам в сочетании с формулами суммирования, выведенными в работе [15] (см. также [16]). Эти формулы позволяют (i) выделить из вакуумных средних части, обусловленные гравитационным полем глобального поля при отсутствии границ, и (ii) представить индуцированные границей части в терминах экспоненциально сходящихся интегралов, содержащих модифицированные функции Бесселя. Статья организована следующим образом. В разделе 2 рассмотрен вакуум внутри сферической поверхности и выведена формула для положительно-частотной функции Вайтмана. Вакуумные средние квадрата оператора поля и тензора энергии-импульса внутри сферической поверхности на фоне глобального монополя исследованы в разделах 3 и 4 соответственно. Рассмотрено поведение этих величин вблизи поверхности сферы, в центре сферы, а также при малых значениях параметра, описывающего дефицит телесного угла в геометрии глобального монополя. В разделе 5 подытожены

основные результаты работы.

2. *Функция Вайтмана.* Рассмотрим действительное скалярное поле  $\phi$  с параметром связи с кривизной  $\xi$  на фоне гравитационного поля  $D + 1$ -мерного глобального монополя. В гиперсферических полярных координатах  $(r, \vartheta, \phi) = (r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \phi)$ ,  $n = D - 2$  соответствующий линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \sigma^2 r^2 d\Omega_D^2, \quad (1)$$

где  $d\Omega_D^2$  - линейный элемент на поверхности единичной сферы в  $D$ -мерном евклидовом пространстве, параметр  $\sigma$  меньше единицы и определяется характерным энергетическим масштабом нарушения симметрии в теории. Телесный угол, соответствующий метрике (1), равен  $\sigma^2 S_D$ , где  $S_D = 2\pi^{D/2} / \Gamma(D/2)$  - площадь поверхности единичной сферы в  $D$ -мерном евклидовом пространстве, а  $\Gamma(x)$  - гамма-функция. В пространстве-времени, задаваемом линейным элементом (1), это приводит к дефициту телесного угла, равному  $(1 - \sigma^2)S_D$ . Уравнение скалярного поля имеет вид (здесь и ниже используется система единиц  $\hbar = c = 1$ )

$$(\nabla_i \nabla^i + m^2 + \xi R)\phi = 0, \quad (2)$$

где  $R$  - скалярная кривизна фонового пространства-времени,  $m$  - масса кванта поля,  $\nabla_i$  - оператор ковариантного дифференцирования, связанный с метрикой, соответствующей линейному элементу (1). Частные значения параметра связи с кривизной  $\xi = 0$  и  $\xi = \xi_D$  с  $\xi_D \equiv (D-1)/4D$  соответствуют минимальной и конформной связям, соответственно. Ненулевые компоненты тензора Риччи и скаляра кривизны для метрики, соответствующей линейному элементу (1), даются выражениями

$$R_2^2 = R_3^3 = \dots = R_D^D = n \frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 r^2}, \quad R = n(n+1) \frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 r^2}, \quad (3)$$

где индексы 2, 3, ...,  $D$  соответствуют координатам  $\theta_1, \theta_2, \dots, \phi$ , соответственно, а тензор кривизны определен как в работе [17]. Заметим, что при  $\sigma \neq 1$  геометрия сингулярна в точке  $r=0$  (точечный монополь).

В данной статье нас интересуют функция Вайтмана и вакуумные средние тензора энергии-импульса на фоне геометрии, описываемой линейным элементом (1). Заметим, что функция Вайтмана определяет также отклик детектора частиц с заданным законом движения [17]. Ниже будем предполагать, что поле удовлетворяет граничному условию Робина

$$(A_1 + B_1 n^i \nabla_i)\phi(x) = 0 \quad (4)$$

на концентрической сфере радиуса  $a$ . Здесь  $A_1$  и  $B_1$  постоянные, а  $n^i = (0, n^1, 0, 0)$  - единичный нормаль сферы,  $n^1 = -1, 1$  для внутренней и внешней областей, соответственно. Наложение этих граничных условий на квантовое поле  $\phi(x)$  приводит к модификации спектра нулевых колебаний

и в результате к ненулевым вакуумным средним физических величин. В частности, для вакуумных средних тензора энергии-импульса получаем

$$\langle 0|T_{ik}(x)|0\rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \partial_i \partial'_k \langle 0|\varphi(x)\varphi(x')|0\rangle + \left[ \left( \xi - \frac{1}{4} \right) g_{ik} \nabla_i \nabla^i - \xi \nabla_i \nabla_k - \xi R_{ik} \right] \langle 0|\varphi^2(x)|0\rangle, \quad (5)$$

где  $|0\rangle$  - амплитуда соответствующего вакуумного состояния. Заметим, что вакуумное ожидание  $\langle 0|\varphi(x)\varphi(x')|0\rangle \equiv G^+(x, x')$  известно как положительно-частотная функция Вайтмана [17]. Для вывода выражения регуляризованных вакуумных средних билинейного произведения поля мы воспользуемся методом суммирования по модам. Разлагая оператор поля по собственным функциям и воспользовавшись соответствующими коммутационными соотношениями, нетрудно видеть, что

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(x')|0\rangle = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x)\varphi_{\alpha}^*(x'), \quad (6)$$

где  $\{\varphi_{\alpha}(x), \varphi_{\alpha}^*(x')\}$  - полный ортонормированный набор положительно и отрицательно частотных решений уравнения поля с набором квантовых чисел  $\alpha$ , удовлетворяющих граничному условию (4). В правой части формулы (6) под суммированием по  $\alpha$  подразумевается суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным квантовым числам.

В гиперсферических координатах, для области внутри сферы, полный набор решений уравнения (2) со скаляром кривизны из (3) имеет вид

$$\varphi_{\alpha}(x) = \beta_{\alpha} r^{-n/2} J_{\nu_l}(\lambda r) Y(m_k; \vartheta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad \lambda = \sqrt{\omega^2 - m^2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где  $m_k = (m_0 \equiv l, m_1, \dots, m_n)$ , а  $m_1, m_2, \dots, m_n$  - целые числа, удовлетворяющие соотношениям  $0 \leq m_{n-1} \leq m_{n-2} \leq \dots \leq m_1 \leq l$ ,  $-m_{n-1} \leq m_n \leq m_{n-1}$ .  $J_{\nu}(z)$  - функция Бесселя, а  $Y(m_k; \vartheta, \phi)$  - сферическая гармоника степени  $l$  (см. [18]). В формуле (7) использованы следующие обозначения

$$\nu_l = \frac{1}{\sigma} \left[ \left( l + \frac{n}{2} \right)^2 + (1 - \sigma^2) n(n+1) (\xi - \xi_{D-1}) \right]^{1/2}. \quad (8)$$

В последующем рассмотрении мы предположим, что  $\nu_l^2$  неотрицательно. При  $n > 0$  это соответствует ограничению на значения параметра связи с кривизной, задаваемого условием

$$\xi \geq - \frac{n}{4(n+1)(\sigma^{-2} - 1)}. \quad (9)$$

Заметим, что это условие выполняется для наиболее важных частных случаев минимальной и конформной связей. Коэффициент  $\beta_{\alpha}$  в выражении (7) определяется из условия нормировки собственных функций и равен

$$\beta_{\alpha}^2 = \frac{\lambda T_{\nu_l}(\lambda a)}{N(m_k) \omega a \sigma^{D-1}}, \quad (10)$$

где введено обозначение

$$T_\nu(z) = \frac{z}{(z^2 - \nu^2)J_\nu^2(z) + z^2 J_\nu'^2(z)} \quad (11)$$

Из граничного условия (4) на поверхности сферы для собственных функций (7) следует, что возможные значения частоты являются решением следующего уравнения

$$AJ_{\nu_1}(z) + BzJ'_{\nu_1}(z) = 0, \quad z = \lambda a, \quad A = A_1 - nB/2, \quad B = n^1 B_1/a, \quad (12)$$

где  $n^1 = -1$  для области внутри сферы. Известно (см., например, [18]), что при действительных  $A, B$  и  $\nu_1 > -1$  все корни этого уравнения действительные и простые, кроме случая  $A/B < -\nu_1$ , когда имеются два чисто мнимых нуля. Далее предположим значения  $A/B$ , для которых все корни действительны,  $A/B \geq -\nu_1$ . В терминах коэффициентов в граничном условии (4) достаточно потребовать выполнения условия

$$\frac{A_1 a}{B_1} \leq \nu_0 - \frac{n}{2}, \quad \nu_0 = \frac{n}{2} \left[ 1 + 4(\sigma^{-2} - 1) \frac{n+1}{n} \xi \right]^{1/2} \quad (13)$$

Заметим, что оно выполняется для наиболее важных частных случаев скалярного поля с граничными условиями Дирихле или Неймана ( $A/B = 1 - D/2$ ) с параметром связи с кривизной  $\xi \geq 0$ , а также для скаляра с граничным условием ТМ-типа ( $A/B = D/2 - 1$ ).

Пусть  $\lambda_{\nu_1, k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  - положительные нули функции  $AJ_{\nu_1}(z) + BzJ'_{\nu_1}(z)$ , расположенные в порядке возрастания. Соответствующие собственные частоты  $\omega = \omega_{\nu_1, k}$  связаны с этими нулями соотношением  $\omega_{\nu_1, k} = \sqrt{\lambda_{\nu_1, k}^2/a^2 + m^2}$ . Подставив выражения (7) для собственных функций в формулу (6) и воспользовавшись формулой суммирования для сферических гармоник (см., например, [18]), получим

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(x')|0\rangle = \frac{(rr')^{-n/2}}{naS_D \sigma^{D-1}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+n) C_l^{n/2}(\cos\theta) \times \quad (14)$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu_1, k} T_{\nu_1}(\lambda_{\nu_1, k})}{\sqrt{\lambda_{\nu_1, k}^2 + m^2 a^2}} J_{\nu_1}(\lambda_{\nu_1, k} r/a) J_{\nu_1}(\lambda_{\nu_1, k} r'/a) e^{i\omega_{\nu_1, k}(r-r')}$$

где  $C_p^q(x)$  - многочлены Гегенбауэра степени  $p$  и порядка  $q$ , а  $\theta$  - угол между направлениями  $(\theta, \phi)$  и  $(\theta', \phi')$ . Для суммирования по  $k$  мы воспользуемся обобщенной формулой суммирования Абеля-Плана [15,16]

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} T_\nu(\lambda_{\nu, k}) f(\lambda_{\nu, k}) = \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{\pi}{2} \text{Res}_{z=0} f(z) \frac{\bar{Y}_\nu(z)}{J_\nu(z)} - \quad (15)$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\bar{K}_\nu(x)}{I_\nu(x)} \left[ e^{-\nu\pi i} f(xe^{\pi i/2}) + e^{\nu\pi i} f(xe^{-\pi i/2}) \right],$$

где  $I_\nu(x)$  и  $K_\nu(x)$  - модифицированные функции Бесселя, и для заданной функции  $F(z)$  мы ввели обозначение

$$\bar{F}(z) \equiv AF(z) + BzF'(z). \quad (16)$$

Выбирая в этой формуле  $\nu = 1/2$ ,  $A = 1$ ,  $B = 0$ , как частный случай получаем обычную формулу Абеля-Плана. Ранее формула (15) была использована для исследования эффекта Казимира для сферически- и цилиндрически-симметричных границ на фоне пространства-времени Минковского [19-22], а также для двугранного угла с внешней цилиндрической границей [23]. Заметим, что формулу (15) можно обобщить на случай наличия у функции  $\bar{J}_\nu(z)$  чисто мнимых нулей, добавляя члены, соответствующие вычетам и беря главное значение интеграла в правой части (см. [16]). Как уже отмечалось выше, в данной работе мы предположим значения  $A/B$ , для которых все решения уравнения (12) действительны. Применяя к сумме по  $k$  в выражении (14) формулу (15), функция Вайтмана может быть представлена в виде

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(x')|0\rangle = \langle 0_m|\varphi(x)\varphi(x')|0_m\rangle + \langle \varphi(x)\varphi(x')\rangle_b, \quad (17)$$

где

$$\langle 0_m|\varphi(x)\varphi(x')|0_m\rangle = \frac{\sigma^{1-D}}{2nS_D} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+n}{(rr')^{n/2}} C_l^{n/2}(\cos\theta) \int_0^{\infty} dz \frac{ze^{\sqrt{z^2+m^2}(t-t')}}{\sqrt{z^2+m^2}} J_{\nu_l}(zr) J_{\nu_l}(zr'), \quad (18)$$

и

$$\langle \varphi(x)\varphi(x')\rangle_b = -\frac{\sigma^{1-D}}{\pi naS_D} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+n}{(rr')^{n/2}} C_l^{n/2}(\cos\theta) \times \int_{ma}^{\infty} dz z \frac{\bar{K}_{\nu_l}(z) I_{\nu_l}(zr/a) I_{\nu_l}(zr'/a)}{I_{\nu_l}(z) \sqrt{z^2 - m^2 a^2}} \text{ch} \left[ \sqrt{z^2/a^2 - m^2} (t-t') \right]. \quad (19)$$

Условия справедливости формулы (15) для конкретной суммы по  $k$  в выражении (14) выполняются, если  $r+r'+|t-t'| < 2a$ . Вклад слагаемого (18) в вакуумное среднее не зависит от радиуса сферы  $a$ , в то время как вклад слагаемого (19) стремится к нулю при  $a \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что выражение (18) есть функция Вайтмана в гравитационном поле глобального монополя без границ, а  $|0_m\rangle$  - амплитуда соответствующего вакуумного состояния. Это можно показать также прямым вычислением суммы по модам, воспользовавшись собственными функциями для пространства-времени глобального монополя без границ. Последние по-прежнему имеют вид (7), однако теперь спектр частот  $\omega$  является непрерывным, а нормировочные коэффициенты  $\beta_\alpha$  определяются из условия ортонормировки на  $\delta$ -функцию. Заметим, что согласно (8), при  $\sigma = 1$ , значение индекса  $\nu_l$  равно  $l+1/2$  и ряд по  $l$  в формуле (18) может быть суммирован с помощью теоремы суммирования Гегенбауэра для функций Бесселя [24]. Вычислив оставшийся интеграл функций Бесселя по стандартной формуле [25], получим известное выражение для

функции Вайтмана в  $D+1$ -мерном пространстве-времени Минковского. Как видим, использование обобщенной формулы Абеля-Плана позволяет выделить из билинейного произведения полей вклад пространства-времени глобального монополя без границ, и слагаемое (19) может быть интерпретировано как часть, индуцированная сферической границей. В безмассовом случае, воспользовавшись формулой для интеграла от функции Бесселя, функцию Вайтмана (18) можно представить в виде

$$\langle 0_m | \varphi(x) \varphi(x') | 0_m \rangle = \frac{1}{2\pi n S_D} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+n) C_l^{n/2}(\cos\theta)}{(\sigma^2 r r')^{n+1/2}} Q_{\nu_l-1/2} \left( \frac{r^2 + r'^2 - (t-t')^2 + i\epsilon}{2rr'} \right), \quad (20)$$

где  $Q_{\nu_l}(x)$  - функция Лежандра второго рода,  $\epsilon > 0$  при  $t > t'$  и  $\epsilon < 0$  при  $t < t'$ .

3. *Вакуумные средние квадрата поля.* Вакуумные средние квадрата оператора поля получаются из выражения для функции Вайтмана в пределе совпадения аргументов,  $x' \rightarrow x$ . В этом пределе выражение (17) расходится и необходима некоторая процедура регуляризации вакуумных средних. Ниже будет показано, что при  $0 < r < a$  расходимости содержатся только в первом слагаемом в правой части формулы (17). Следовательно, процедура перенормировки локальных характеристик вакуума, таких, как квадрат оператора поля и тензор энергии-импульса, та же, что и для геометрии глобального монополя без границ. Эта процедура обсуждалась в ряде предыдущих работ (см. [6-11]) и является полезной иллюстрацией общей схемы перенормировки в искривленном пространстве-времени (см., например, [17]). В соответствии с этой схемой, для перенормировки следует вычесть из (18) соответствующее разложение Де Витта-Швингера, включающее члены порядка  $D$  включительно. Для безмассового поля перенормированное значение квадрата оператора поля имеет следующую общую структуру:

$$\langle 0_m | \varphi^2(x) | 0_m \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{r^{D-1}} [A^{(D)}(\sigma, \xi) + B^{(D)}(\sigma, \xi) \ln(\mu r)], \quad (21)$$

где произвольный масштаб массы  $\mu$  соответствует неоднозначности в процедуре перенормировки. Заметим, что эта неоднозначность отсутствует в пространстве-времени нечетной размерности и поэтому  $B^{(D)} = 0$  при четном  $D$ . Вследствие непростой зависимости порядка функции Лежандра в формуле (20) от параметра  $\sigma$  не представляется возможным получить компактные выражения коэффициентов  $A^{(D)}$  и  $B^{(D)}$ . При малых значениях  $1 - \sigma^2$  и  $D=4, 5$  соответствующие асимптотические выражения выведены в работе [9]. В данной работе нас в основном интересуют части вакуумных средних, индуцированные наличием сферической поверхности и ниже мы сконцентрируемся на этих величинах.

Воспользовавшись соотношением  $C_l^{n/2}(1) = \Gamma(l+n)/\Gamma(n)!$ , для соот-

ветствующей граничной части в вакуумном среднем квадрата оператора поля получаем формулу

$$\langle \varphi^2(x) \rangle_b = -\frac{1}{\pi a r^n S_D \sigma^{D-1}} \sum_{l=0}^{\infty} D_l \int_{ma}^{\infty} dz \frac{\bar{K}_{\nu_l}(z) z I_{\nu_l}^2(zr/a)}{\bar{I}_{\nu_l}(z) \sqrt{z^2 - m^2 a^2}}, \quad (22)$$

где

$$D_l = (2l + D - 2) \frac{\Gamma(l + D - 2)}{\Gamma(D - 1)!} \quad (23)$$

- степень вырожденности угловой моды с заданным  $l$ . Из хорошо известных свойств модифицированных функций Бесселя следует, что для скалярного поля с граничным условием Дирихле подинтегральное выражение в (22) всегда положительно и поэтому эта величина отрицательна и при  $\xi \geq 0$  является монотонно убывающей функцией от радиальной координаты  $r$ . Как уже отмечалось ранее, выражение (22) является конечным при всех значениях  $0 < r < a$ . Для заданного  $l$  и больших значений  $z$  подинтегральное выражение ведет себя как  $e^{2z(r/a-1)}/z$  и поэтому интеграл сходится при  $r < a$ . Для больших значений  $l$ , введя новую переменную интегрирования  $y = z/\nu_l$  в интеграл формулы (22) и воспользовавшись равномерными асимптотическими разложениями для модифицированных функций Бесселя при больших значениях порядка [24], можно показать, что интеграл и ряд сходятся при  $r < a$  и расходятся на поверхности сферы  $r = a$ . Для точек вблизи сферы ведущий член соответствующего асимптотического разложения по  $1/(a-r)$  имеет вид

$$\langle \varphi^2(x) \rangle_b = \frac{(1 - 2\delta_{B0})\Gamma((D-1)/2)}{(4\pi)^{(D+1)/2} (a-r)^{D-1}}. \quad (24)$$

Это выражение не зависит от массы и параметра  $\sigma$  и совпадает с соответствующим выражением для сферы на фоне пространства-времени Минковского. Поскольку чисто гравитационная часть (21) конечна при  $r = a$ , то отсюда следует, что вблизи поверхности сферы вакуумные средние квадрата оператора поля доминированы граничной частью (22).

Вблизи центра сферы,  $r \rightarrow 0$ , основной вклад в выражение (22) обусловлен слагаемым с  $l=0$  и в ведущем порядке

$$\langle \varphi^2(x) \rangle_b = -\frac{\Gamma^{-2}(\nu_0 + 1)}{2^{2\nu_0} \pi a^{D-1} S_D \sigma^{D-1}} \left(\frac{r}{a}\right)^{2\nu_0-n} \int_{ma}^{\infty} dz \frac{z^{2\nu_0+1} \bar{K}_{\nu_0}(z)}{\sqrt{z^2 - m^2 a^2} \bar{I}_{\nu_0}(z)}, \quad r \rightarrow 0, \quad (25)$$

где  $\nu_0$  определяется формулой (13). В результате, индуцированное границей вакуумное среднее (22) в центре сферы равно нулю при  $(\sigma^{-2} - 1)\xi > 0$ , является конечным при  $(\sigma^{-2} - 1)\xi = 0$  и расходится при  $(\sigma^{-2} - 1)\xi < 0$ . Как это следует из выражений (21) и (25), при  $r \ll a$  полное вакуумное среднее доминировано чисто гравитационной частью.

Перейдем теперь к пределу  $\sigma \ll 1$  при фиксированном значении  $r < a$ . Для выполнения условия (9) предположим, что  $\xi \geq 0$ . При  $\xi > 0$  из формулы (8) имеем  $\nu_l \gg 1$ , и после введения в формулу (22) новой переменной интегрирования  $y = z/\nu_l$ , можно заменить модифицированную функцию Бесселя соответствующим равномерным асимптотическим разложением при больших значениях порядка. Далее, интеграл по  $l$  можно оценить методом Лапласа. Основной вклад в сумме по  $l$  обусловлен слагаемым  $l=0$  и в ведущем порядке имеем

$$\langle \varphi^2(x) \rangle_b \approx \frac{(1 - 2\delta_{B0}) \exp[-2\sqrt{l} \ln(a/r)]}{(8\pi\tilde{\nu})^{1/2} r^n S_D \sigma^{D-1} \sqrt{a^2 - r^2}}, \quad \tilde{\nu} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{n(n+1)\xi}, \quad \sigma \ll 1. \quad (26)$$

При  $\xi = 0$  и  $\sigma \ll 1$  для членов с  $l \neq 0$  имеем  $\nu_l \gg 1$ . Соответствующий вклад можно оценить методом, аналогичным предыдущему случаю. Этот вклад экспоненциально мал. Для слагаемого же с  $l=0$ , в ведущем порядке по  $\sigma$  имеем  $\nu_l = n/2$  и поэтому

$$\langle \varphi^2(x) \rangle_b \approx -\frac{1}{\pi a r^n S_D \sigma^{D-1}} \int_{ma}^{\infty} dz \frac{\bar{K}_{n/2}(z) z I_{n/2}^2(zr/a)}{\bar{I}_{n/2}(z) \sqrt{z^2 - m^2 a^2}}, \quad \xi = 0, \quad \sigma \ll 1. \quad (27)$$

Заметим, что для нечетных значений  $n$  модифицированные функции Бесселя в этой формуле выражаются через элементарные функции. На рис.1

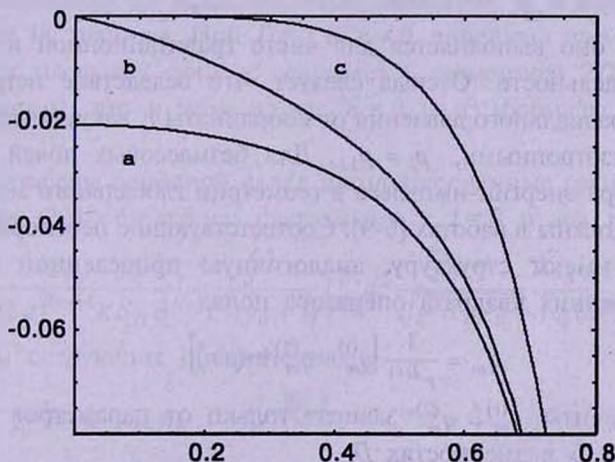


Рис.1. Зависимость индуцированных сферой вакуумных средних  $\sigma^{D-1} \langle \varphi^2(x) \rangle_b$  от  $r/a$  в области внутри сферы для конформно-связанного безмассового скалярного поля в трехмерном пространстве и с граничным условием Дирихле. Отдельные кривые соответствуют значениям  $\sigma = 1$  (а),  $\sigma = 0.5$  (b),  $\sigma = 0.2$  (с).

изображена зависимость индуцированного границей вакуумного среднего (22) от отношения  $r/a$  для области внутри сферы в случае конформно-связанного ( $\xi = \xi_D$ ) безмассового скалярного поля в трехмерном пространстве с граничным условием Дирихле ( $B_1 = 0$ ). Отдельные кривые соответствуют значениям параметра  $\sigma = 1$  (а),  $\sigma = 0.5$  (b),  $\sigma = 0.2$  (с).

4. *Вакуумные средние тензора энергии-импульса.* В этом разделе мы рассмотрим вакуумные средние тензора энергии-импульса скалярного поля внутри сферы. Подставив функцию Вайтмана (17) и выражения (18) и (19) в формулу (5), можно показать, что вакуумный тензор энергии-импульса является диагональным

$$\langle 0|T_i^k|0\rangle = \text{diag}(\epsilon, -p, -p_{\perp}, \dots, -p_{\perp}), \quad (28)$$

где плотность энергии вакуума  $\epsilon$  и эффективные давления в радиальном  $p$  и азимутальном  $p_{\perp}$  направлениях являются только функциями от радиальной координаты. Такая форма заранее очевидна также из свойств симметрии рассматриваемой здесь задачи. Аналогично случаю функции Вайтмана, компоненты вакуумного тензора энергии-импульса могут быть представлены в виде суммы

$$q = q_m + q_b, \quad q = \epsilon, p, p_{\perp}, \quad (29)$$

где  $q_m$  - соответствующие величины в геометрии глобального монополя при отсутствии границы, а величины  $q_b$  обусловлены наличием сферической поверхности. Из уравнения непрерывности  $\nabla_k \langle 0|T_i^k|0\rangle = 0$  следует, что эти функции связаны соотношением

$$r \frac{dp_i}{dr} + (D-1)(p_i - p_{\perp i}) = 0, \quad i = m, b. \quad (30)$$

Заметим, что оно выполняется для чисто гравитационной и граничных частей по отдельности. Отсюда следует, что вследствие нетривиальной зависимости радиального давления от координаты  $r$ , вакуумные натяжения являются анизотропными,  $p_i \neq p_{\perp i}$ . Для безмассовых полей вакуумные средние тензора энергии-импульса в геометрии глобального монополя без границ исследованы в работах [6-9]. Соответствующие перенормированные компоненты имеют структуру, аналогичную приведенной в (21) для вакуумных средних квадрата оператора поля:

$$q_m = \frac{1}{r^{D+1}} [q_m^{(1)} + q_m^{(2)} \ln(\mu r)], \quad (31)$$

где коэффициенты  $q_m^{(1)}$ ,  $q_m^{(2)}$  зависят только от параметров  $\sigma$  и  $\xi$ , и  $q_m^{(2)} = 0$  в четных размерностях  $D$ .

Из формул (5), (19) и (22) для компонентов тензора энергии-импульса, индуцированных наличием сферической границы радиуса  $a$ , получаем

$$q_b(a, r) = -\frac{1}{2\pi a^3 r^n S_D \sigma^{D-1}} \sum_{l=0}^{\infty} D_l \int_{ma}^{\infty} dz z^3 \frac{\bar{K}_{\nu_l}(z) F_{\nu_l}^{(a)}[I_{\nu_l}(zr/a)]}{I_{\nu_l}(z) \sqrt{z^2 - m^2 a^2}}, \quad r < a, \quad (32)$$

где для заданной функции  $f(y)$  введены обозначения

$$F_{\nu_l}^{(a)}[f(y)] = (1 - 4\xi) \left[ f'^2(y) - \frac{n}{y} f(y) f'(y) + \left( \frac{\nu_l^2}{y^2} - \frac{1 + 4\xi - 2(mr/y)^2}{1 - 4\xi} \right) f^2(y) \right], \quad (33)$$

$$F_{\nu_1}^{(p)}[f(y)] = f'^2(y) + \frac{\bar{\xi}}{y} f(y) f'(y) - \left( 1 + \frac{\nu_1^2 + (n/2)\bar{\xi}}{y^2} \right) f^2(y), \quad \bar{\xi} = 4(n+1)\xi - n, \quad (34)$$

$$F_{\nu_1}^{(p_1)}[f(y)] = (4\xi - 1)f'^2(y) - \frac{\bar{\xi}}{y} f(y) f'(y) + \left[ 4\xi - 1 + \frac{\nu_1^2(1 + \bar{\xi}) + (n/2)\bar{\xi}}{(n+1)y^2} \right] f^2(y). \quad (35)$$

Можно показать, что компоненты, определяемые соотношением (32), удовлетворяют уравнению непрерывности (30) и являются конечными при  $0 < r < a$ .

При  $D=1$  угловая часть в линейном элементе (1) отсутствует, и мы получаем вакуумные средние для одномерного отрезка  $-a \leq x \leq a$ . В этом случае фоновое пространство-время является плоским и  $\langle 0_m | T_i^k | 0_m \rangle_{\text{ren}} = 0$ . В результате нетривиальный вакуумный тензор энергии-импульса полностью обусловлен граничной частью. Вследствие наличия гамма-функции в знаменателе выражения для  $D_i$  в формуле (23), теперь единственными ненулевыми коэффициентами являются  $D_0 = D_1 = 1$ . Воспользовавшись стандартными выражениями для модифицированных функций Бесселя  $I_{\pm 1/2}(z)$  и  $K_{\pm 1/2}(z)$ , получим формулы для вакуумного тензора энергии-импульса для одномерного отрезка, приведенные в работах [20,26]. Заметим, что в этом случае вакуумные натяжения являются постоянными и не зависят от параметра  $\xi$ . В частности, не зависят от  $\xi$  и вакуумные силы, действующие на границы. При  $D=2$  и  $r \neq 0$  линейный элемент (1) также соответствует плоскому фону и совпадает с геометрией  $2D$  космической струны. Заметим, что в этом случае  $n=0$  и из формулы (8) получаем  $\nu_1 = 1/\sigma$ .

В центре сферы основной вклад в индуцированные границей вакуумные средние (32) обусловлен слагаемыми с  $l=0$  и мы имеем

$$q_b(a, r) \sim - \frac{(2\nu_0 - n)r^{2\nu_0 - n - 2} f_0^{(q)}}{(2a)^{2\nu_0 + 1} \pi S_D \sigma^{D-1} \Gamma^2(\nu_0 + 1)} \int_{ma}^{\infty} dz \frac{z^{2\nu_0 + 1} \bar{K}_{\nu_0}(z)}{\sqrt{z^2 - m^2 a^2} I_{\nu_0}(z)}, \quad r \rightarrow 0, \quad (36)$$

где введены следующие обозначения:

$$f_0^{(e)} = (1 - 4\xi)\nu_0, \quad f_0^{(p)} = \frac{\bar{\xi}}{2}, \quad f_0^{(p_1)} = \frac{\nu_0 - 1/2}{D-1} \bar{\xi}, \quad (37)$$

а  $\nu_0$  определено соотношением (13). Из формулы (36) следует, что индуцированные границей компоненты тензора энергии-импульса равны нулю в центре сферы при  $n\xi(\sigma^{-2} - 1) > 1$ , являются конечными при  $n\xi(\sigma^{-2} - 1) = 1$  и расходятся в противном случае. Эти сингулярности появляются вследствие того, что геометрические характеристики пространства-времени глобального монополя расходятся в начале координат (см. формулы (3)). Однако заметим, что соответствующий вклад в полную энергию вакуума внутри сферы, обусловленный  $\epsilon_b$ , является конечным благодаря фактору  $r^{D-1}$  в элементе объема интегри-

рования. Сравнивая выражения (31) и (36) заключаем, что вблизи центра вакуумный тензор энергии-импульса доминирован чисто гравитационной частью.

Вакуумные средние (32) расходятся на поверхности сферы,  $r \rightarrow a$ . Эти расходимости хорошо известны в квантовой теории поля с границами и исследованы для различных геометрий границ и типов граничных условий. Для рассматриваемой здесь задачи соответствующее асимптотическое поведение может быть найдено с помощью равномерных асимптотических разложений для модифицированных функций Бесселя и ведущие члены определяются соотношениями

$$p_{b\perp} \sim -\varepsilon_b \sim \frac{Dap_b}{(D-1)(a-r)} \sim \frac{D\Gamma((D+1)/2)(\xi - \xi_D)}{2^{D+1}(D+1)!^2(a-r)^{D+1}}(1 - 2\delta_{D0}). \quad (38)$$

Эти члены не зависят от массы и параметра  $\sigma$  и совпадают с соответствующими выражениями для сферической поверхности в пространстве-времени Минковского (см., например, [20]). Для конформно-связанного скалярного поля коэффициенты ведущих членов равны нулю и  $\varepsilon, p_{\perp} \sim (a-r)^{-D}$ ,  $p \sim (a-r)^{1-D}$ . В общем случае можно получить асимптотические разложения по степеням расстояния от поверхности сферы. Коэффициенты последующих членов зависят от массы поля, коэффициентов Робина и параметра  $\sigma$ . Вследствие поверхностных расходимостей вблизи сферы, компоненты вакуумного тензора энергии-импульса доминированы граничными частями  $q_b$ .

Рассмотрим теперь вакуумные средние тензора энергии-импульса в пределе  $\sigma \ll 1$  при фиксированном  $r < a$ . При  $\xi > 0$  для соответствующих

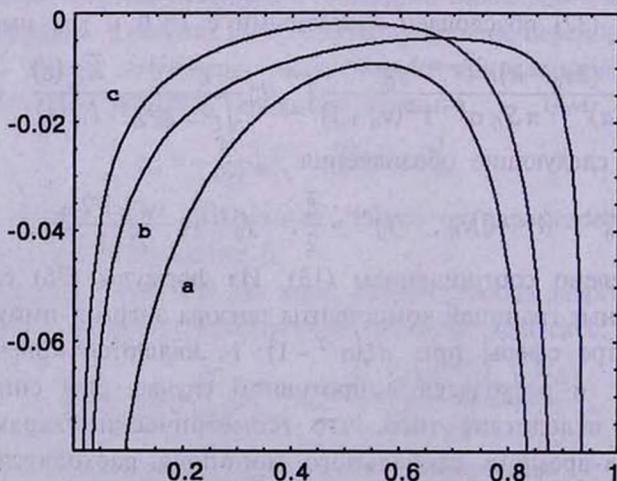


Рис.2. Зависимость индуцированных сферой вакуумных средних плотности энергии,  $\varepsilon_b$  (кривая а), радиального давления,  $p_b$  (кривая б) и азимутального давления,  $p_{b\perp}$  (кривая с) умноженные на  $a^{D+1}$ , от отношения  $r/a$  в случае конформно-связанного безмассового скалярного поля в трехмерном пространстве глобального монополя с  $\sigma = 0.5$  и с граничным условием Дирихле.

граничных частей получим

$$q_b(a, r) = \frac{(1 - 2\delta_{\beta 0}) \bar{v}^{3/2} \exp[-2\bar{v} \ln(a/r)]}{(8\pi)^{1/2} S_D \sigma^{D-1} r^D \sqrt{a^2 - r^2}} f_1^{(a)}, \quad (39)$$

где  $\bar{v}$  определяется соотношением (26) и

$$f_1^{(e)} = 1 - 4\xi, \quad f_1^{(p)} = \frac{\bar{\xi}}{2\bar{v}}, \quad f_1^{(p_\perp)} = \frac{\bar{\xi}}{D-1}. \quad (40)$$

Заметим, что в этом случае индуцированные границей вакуумные натяжения сильно анизотропны:  $p_b/p_{\perp b} \sim \sigma \ll 1$ . Для минимально связанного скаляра,  $\xi = 0$ , ведущий член в асимптотическом разложении по  $\sigma$  обусловлен слагаемым  $l=0$  в формуле (32) с  $\nu_l = n/2$ . Это слагаемое ведет себя как  $\sigma^{l-D}$ . На рис.2 изображены зависимости величин  $\epsilon_b, p_b, p_{\perp b}$  внутри сферической поверхности от отношения  $r/a$  в случае конформно связанного безмассового скалярного поля в трехмерном пространстве и с граничным условием Дирихле на фоне глобального монополя с  $\sigma = 0.5$ . Заметим, что для этих значений параметров имеем  $n\xi(\sigma^{-2} - 1) < 1$ , и компоненты вакуумного тензора энергии-импульса расходятся в центре сферы.

**5. Заключение.** В настоящей работе исследованы казимировские плотности, индуцированные сферической поверхностью на фоне гравитационного поля  $D+1$ -мерного глобального монополя, описываемого метрикой (1). Рассмотрен случай массивного скалярного поля с произвольным параметром связи с кривизной и с граничным условием Робина. Общая структура вакуумного тензора энергии-импульса конформно-инвариантных полей на фоне гравитационного поля четырехмерного глобального монополя без границ выявлена в работе [6], исходя из размерных соображений. Конкретные вычисления для безмассовых скалярного и спинорного полей приведены в работах [7] и [8], соответственно. При наличии границ одновременно присутствуют два источника поляризации вакуума: гравитационным полем монополя и границами, ограничивающими объем квантования. Дзета-функция и полная энергия вакуума для сферической границы в поле глобального монополя рассмотрены в [10,11]. В данной работе для вывода выражений вакуумных средних тензора энергии-импульса, индуцированных сферой, сначала построена положительно-частотная функция Вайтмана (заметим, что функция Вайтмана важна также при рассмотрении отклика детектора частиц в заданном состоянии движения [17]). Приложение обобщенной формулы Абеля-Плана к сумме по нулям соответствующих комбинаций цилиндрических функций позволяет выделить часть, обусловленную гравитационным фоном без границ, и представить индуцированную сферой часть в терминах интегралов, экспоненциально сходящихся в пределе совпадения в произвольной внутренней точке. Поляризация скалярного вакуума глобальным монополем

без границ исследована в ряде предыдущих работ [6-9], и в данной статье нас в основном интересуют индуцированные сферой вакуумные средние (казимировские натяжения). Вакуумные ожидания тензора энергии-импульса получены с помощью функции Вайтмана в результате действия на нее определенного дифференциального оператора второго порядка и перехода к пределу совпадения. Эти величины расходятся на поверхности сферы. Поверхностные расходимости хорошо известны в квантовой теории поля с границами и исследованы вблизи произвольной гладкой границы на фоне пространства-времени Минковского. Они приводят к расходящимся глобальным величинам (полная энергия, вакуумные силы, действующие на границы) и для этих величин необходима дополнительная процедура перенормировки. Полная энергия вакуума для сферической границы на фоне глобального монополя исследована в работах [10,11] методом обобщенной дзета-функции.

Индуцированные границей вакуумные средние квадрата оператора поля и тензора энергии-импульса внутри сферы определяются формулами (22) и (32), соответственно. Эти выражения конечны во внутренних точках и расходятся на поверхности сферы. Ведущие члены соответствующих асимптотических разложений вблизи поверхности те же, что и на фоне пространства-времени Минковского и обращаются в нуль для конформно-инвариантного скалярного поля. Коэффициенты следующих членов разложений зависят от кривизны поверхности, коэффициентов в граничном условии Робина, массы поля и параметра  $\sigma$ , описывающего дефицит телесного угла. Вблизи центра сферы вакуумные ожидания квадрата поля и тензора энергии-импульса доминированы чисто гравитационными частями, соответствующими геометрии монополя без границ. Для точек вблизи поверхности сферы доминируют индуцированные сферой части вакуумных средних. Подробно исследован предел малых значений параметра  $\sigma$ , описывающий дефицит телесного угла,  $\sigma \ll 1$ . В этом пределе, соответствующем сильным гравитационным полям, при  $\xi > 0$  индуцированные границей части ведут себя как  $\langle \varphi^2 \rangle_b \sim \sigma^{3/2-D} \exp(-\gamma/\sigma)$  и  $\epsilon_b \sim p_{1b} \sim p_b/\sigma \sim \sigma^{-D-1/2} \exp(-\gamma/\sigma)$ , где  $\gamma = 2\sqrt{n(n+1)}\xi |\ln(a/r)|$ , и индуцированные границей вакуумные натяжения сильно анизотропны. Для минимально связанного скаляра ( $\xi = 0$ ) и  $\sigma \ll 1$  показано, что  $\langle \varphi^2 \rangle_b \sim q_b \sim \sigma^{1-D}$ ,  $q = \epsilon, p_{1b}, p$ . В качестве иллюстрации общих результатов на рис. 1 и 2 приведены зависимости индуцированных сферой вакуумных средних квадрата оператора поля и компонентов тензора энергии-импульса от отношения  $r/a$  для конформно-связанного скаляра с граничным условием Дирихле в трехмерном пространстве.  $D = 3$ . Заметим, что в этом случае ведущие члены в асимптотических разложениях компонентов тензора энергии-импульса вблизи границы обращаются в

нуль. Вакуумное среднее квадрата поля и плотность энергии везде отрицательны.

Работа выполнена в рамках гранта 0887 Министерства образования и науки Республики Армения.

Ереванский государственный университет,  
Армения, e-mail: saharyan@server.physdep.r.am

## QUANTUM VACUUM EFFECTS IN THE GRAVITATIONAL FIELD OF THE GLOBAL MONOPOLE

A.A.SAHARIAN

We investigate the vacuum expectation values for the energy-momentum tensor of a massive scalar field with general curvature coupling and obeying the Robin boundary condition on a spherical shell in the  $D+1$ -dimensional global monopole background. The expressions are derived for the Wightman function, the vacuum expectation values of the field square, the vacuum energy density, radial and azimuthal stress components in both regions inside the shell. A regularization procedure is carried out by making use of the generalized Abel-Plana formula for the series over zeros of cylinder functions. This formula allows us to extract from the vacuum expectation values the parts due to the global monopole gravitational field in the situation without a boundary, and to present the boundary induced parts in terms of exponentially convergent integrals, useful, in particular, for numerical calculations. The asymptotic behavior of the vacuum densities is investigated at the sphere centre and near the sphere surface. We show that for small values of the parameter describing the solid angle deficit in global monopole geometry the boundary induced vacuum stresses are strongly anisotropic.

Key words: *Gravitation field:monopole*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *A.Vilenkin, E.P.S.Shellard, Cosmic Strings and Other Topological Defects, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.*
2. *А.М.Поляков, Письма ж. эксперим. и теор. физ., 20, 430, 1974;*

- G.t'Hoofst*, Nucl. Phys., B79, 276, 1974.
3. T.W.B.Kibble, J. Phys., A9, 1387, 1976.
  4. Д.Д.Соколов, А.А.Старобинский, Докл. АН СССР, 234, 1043, 1977.
  5. M.Barricola, A.Vilenkin, Phys. Rev. Lett., 63, 341, 1989.
  6. W.A.Hiscock, Class. Quantum Gravity, 7, L235, 1990.
  7. F.D.Mazzitelli, C.O.Lousto, Phys. Rev., D43, 468, 1991.
  8. E.R.Bezerra de Mello, V.B.Bezerra, N.R.Khusnutdinov, Phys. Rev., D60, 063506, 1999.
  9. E.R.Bezerra de Mello, J. Math. Phys., 43, 1018, 2002.
  10. M.Bordag, K.Kirsten, S.Dowker, Commun. Math. Phys., 182, 371, 1996.
  11. E.R.Bezerra de Mello, V.B.Bezerra, N.R.Khusnutdinov, J. Math. Phys., 42, 562, 2001.
  12. V.M.Mostepanenko, N.N.Trunov, The Casimir Effect and Its Applications, Clarendon, Oxford, 1997.
  13. G.Plunien, B.Muller, W.Greiner, Phys. Rep., 134, 87, 1986.
  14. M.Bordag, U.Mohidden, V.M.Mostepanenko, Phys. Rep., 353, 1, 2001.
  15. А.А.Саарян, Изв. АН Арм. ССР, Математика, 22, 166, 1987; Канд. дис. Ереван, 1987.
  16. А.А.Saharian, The Generalized Abel-Plana Formula. Applications to Bessel Functions and Casimir Effect, Report № IC/2000/14; hep-th/0002239.
  17. Н.Биррелл, П.Девис, Квантованные поля в искривленном пространстве-времени, Мир, М., 1984.
  18. A.Erdelyi et al., Higher Transcendental Functions, vol.2, McGraw Hill, New York, 1953.
  19. Л.Ш.Григорян, А.А.Саарян, ДАН Арм. ССР, 83, 28, 1986; Изв. АН Арм. ССР, Физика, 22, 3, 1987.
  20. А.А.Saharian, Phys. Rev., D63, 125007, 2001.
  21. А.А.Саарян, Изв. АН Арм. ССР, Физика, 23, 130, 1988.
  22. A.Romeo, А.А.Saharian, Phys. Rev., D63, 105019, 2001.
  23. A.Rezaeian, А.А.Saharian, Class. Quantum Gravity, 19, 3625, 2002.
  24. М.Абрамович, И.Стиган, Справочник по специальным функциям, Наука, М., 1979.
  25. А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев, Интегралы и ряды: Специальные функции, Наука, М., 1983.
  26. A.Romeo, А.А.Saharian, J. Phys., A35, 1297, 2002.