

УДК: 52-64

ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ. II

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 26 ноября 2003

Работа является продолжением исследования, посвященного переносу излучения в одномерной неоднородной атмосфере. Вычисляются две важнейшие характеристики процесса многократного рассеяния в такой среде: вероятность выхода кванта и среднее число рассеяний. Последнее определяется в отдельности для квантов, покинувших среду, и квантов, подвергшихся термализации в ней. Рассматривается также задача о нахождении поля излучения в неоднородной атмосфере, содержащей источники энергии. Предполагается, что их мощность, наряду с коэффициентом рассеяния, может меняться с глубиной произвольным образом. Показывается, что знание коэффициентов отражения и пропускания атмосферы позволяет свести все указанные задачи к решению линейных дифференциальных уравнений первого порядка с заданными начальными условиями. Получен ряд новых аналитических результатов. Численные расчеты проведены для двух типов атмосфер с разным ходом изменения коэффициента рассеяния с глубиной. Дается их физическая интерпретация.

1. *Введение.* В предыдущей работе [1] (далее Н1) применением метода сложения слоев была рассмотрена задача диффузного отражения и пропускания для рассеивающей и поглощающей атмосферы конечной оптической толщины. Был предложен подход, который позволяет свести ее к решению задачи с начальными условиями для линейных дифференциальных уравнений. В результате искомые коэффициенты отражения и пропускания находятся одновременно для семейства атмосфер, имеющих различные оптические толщины. Было также показано, что поскольку поле излучения внутри неоднородной атмосферы удастся выразить через указанные величины, то для его определения не требуется решения каких-либо новых уравнений.

В недавних работах Д.М.Седракяна и А.Ж.Хачатряна [2,3] была рассмотрена задача описания поля плоской электромагнитной волны, распространяющейся в одномерной диэлектрической среде с детерминированным, произвольным образом меняющимся показателем преломления. Некоторые, представленные ниже методы и результаты, являются распространением метода развитого в [2,3] для задачи диффузного рассеяния света в неоднородной среде.

Здесь мы продолжим обсуждение стандартных задач переноса излучения в неоднородной атмосфере. Сначала в разделе 2 будет определена одна из важнейших характеристик процесса многократного рассеяния - вероят-

ность выхода кванта из одномерной неоднородной атмосферы конечной толщины. Следующий раздел посвящается среднему числу рассеяний, претерпеваемых различного рода квантами (отраженными, пропущенными и термализованными). Далее рассматривается перенос излучения в атмосфере с распределенными в ней произвольным образом источниками энергии. Показывается, что после определения коэффициентов отражения и пропускания для семейства амосфер с различными оптическими толщинами все указанные задачи сводятся к решению задач с начальными условиями для линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Более того, как и в задаче диффузного отражения и пропускания, интенсивность излучения внутри атмосферы, содержащей источники энергии, простым образом выражается через интенсивности излучения, выходящего из нее. В последнем разделе дается краткое обсуждение полученных результатов.

2. Вероятность выхода кванта из неоднородной атмосферы.

Рассмотрим неоднородную рассеивающую и поглощающую атмосферу оптической толщины τ_0 , разделенную на две части (рис.1), каждая из которых характеризуется оптической толщиной τ_i ($i=1, 2$). Их оптические свойства описываются коэффициентами пропускания $q(\tau_i)$ и отражения $r(\tau_i)$ и $\bar{r}(\tau_i)$. Как и в предыдущей работе, чертой снабжаются те величины, которые описывают свойства среды при освещении ее левой границы на рис.1, в то время как величины $q(\tau_i)$ и $r(\tau_i)$ относятся к правой границе. Отметим также, что, как было показано в Н1, $q(\tau_i) = \bar{q}(\tau_i)$. Введем далее величины $p(\tau, \tau_0)$ и $\bar{p}(\tau, \tau_0)$ ($\tau \leq \tau_1$, $\tau_0 = \tau_1 + \tau_2$), обозначающие вероятность выхода кванта, поглощенного на глубине τ , соответственно через границы τ_0 и 0.

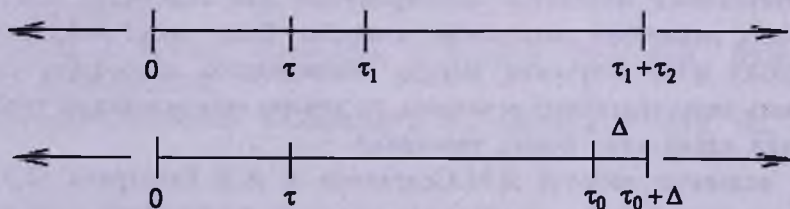


Рис.1. К определению вероятности выхода кванта из атмосферы, состоящей из двух компонентов.

Применяя известные правила сложения и умножения вероятностей, можно написать

$$p(\tau, \tau_0) = p(\tau, \tau_1) q(\tau_2) [1 + \bar{r}(\tau_2) r(\tau_1) + \dots], \quad (1)$$

$$\bar{p}(\tau, \tau_0) = \bar{p}(\tau, \tau_1) + p(\tau, \tau_1) \bar{r}(\tau_2) q(\tau_1). \quad (2)$$

Следует отметить, что здесь и в следующем разделе для описания

оптических свойств слоев τ_1 и τ_2 мы используем для краткости одинаковые обозначения $r(\tau_i)$, $\bar{r}(\tau_i)$ и $q(\tau_i)$, в то время как они отличаются друг от друга не только оптической толщиной, но и промежутком изменения функции $\lambda(\tau)$. Однако это не должно привести к недоразумениям, ибо во всех рассмотренных в работе случаях слой τ_2 заменяется бесконечно тонким слоем с известными оптическими свойствами.

Дальнейший ход рассуждений аналогичен тому, который применялся в Н1 при выводе уравнений для коэффициентов отражения и пропускания. Как уже отмечалось, заменим τ_2 бесконечно малой величиной Δ . Слой толщины Δ может считаться однородным с значением коэффициента рассеяния, равным $\lambda(\tau_0)$. Переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, находим

$$\frac{dp}{d\tau_0} = -A(\tau_0)p(\tau, \tau_0), \quad (\tau \leq \tau_0) \quad (3)$$

$$\frac{d\bar{p}}{d\tau_0} = \frac{\lambda(\tau_0)}{2} p(\tau, \tau_0) q(\tau_0), \quad (4)$$

где $A(\tau_0) = 1 - \frac{\lambda(\tau_0)}{2} [1 + r(\tau_0)]$. В качестве начальных условий имеем

$$p(\tau, \tau) = \frac{\lambda(\tau_0)}{2} [1 + r(\tau)], \quad \bar{p}(\tau, \tau) = \frac{\lambda(\tau_0)}{2} q(\tau). \quad (5)$$

Как было показано в Н1, коэффициент пропускания $q(\tau_0)$ удовлетворяет уравнению (3) (Н1, ур. (12)) при условии $q(0) = 1$, так что

$$q(\tau) = \exp \left(- \int_0^\tau A(t) dt \right). \quad (6)$$

Отсюда из (3) имеем

$$p(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda(\tau)}{2} [1 + r(\tau)] \frac{q(\tau_0)}{q(\tau)}. \quad (7)$$

Обращает на себя внимание факт разделения переменных в данном выражении. Из него можно заключить, что вероятность выхода через границу τ_0 кванта, поглощенного на фиксированной глубине τ , пропорциональна пропускательной способности атмосферы. Формула (7) имеет простой физический смысл. Слагаемые в правой части можно интерпретировать как вероятность того, что поглощенный квант переизлучится в том или ином направлении и покинет среду через границу τ_0 . Поэтому величины $Y(\tau, \tau_0) = q(\tau_0)/q(\tau)$ и $Z(\tau, \tau_0) = r(\tau)Y(\tau, \tau_0)$ можно рассматривать как вероятность выхода кванта, движущегося соответственно к границе τ_0 и 0. В этом нетрудно убедиться, если составить уравнения, аналогичные (3), непосредственно для указанных функций. В предыдущей работе мы рассматривали вероятности $U(\tau, \tau_0)$ и $V(\tau, \tau_0)$, определяющие поле излучения в атмосфере при ее освещении извне. Для этих величин

были получены явные выражения (Н1, ур. (29)), на основе которых можно написать $Y(\tau, \tau_0) = U(\tau, \tau_0)$, $Z(\tau, \tau_0) = V(\tau, \tau_0)$. Иными словами, свойством обратимости обладает не только коэффициент пропускания неоднородной атмосферы, но и указанные вероятности.

Перейдем теперь к уравнению (4). С учетом (7) оно дает

$$\bar{p}(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda(\tau)}{2} \left\{ q(\tau) + \frac{1}{2q(\tau)} [1 + r(\tau)] \int_{\tau}^{\tau_0} \lambda(t) q^2(t) dt \right\}. \quad (8)$$

Как было показано в Н1, коэффициент отражения $\bar{r}(\tau_0)$ задается формулой (Н1, ур.(32))

$$\bar{r}(\tau_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} \lambda(t) q^2(t) dt, \quad (9)$$

поэтому уравнение (8) окончательно может быть записано в виде

$$\bar{p}(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda(\tau)}{2} q(\tau) + \frac{\bar{r}(\tau_0) - \bar{r}(\tau)}{q(\tau_0)} p(\tau, \tau_0). \quad (10)$$

В частных случаях, когда $\lambda(\tau) = 1/(1 + ae^{-\tau})$ (атмосферы первого типа) и $\lambda(\tau) = 1/(1 + ae^{\tau})$ (атмосферы второго типа), полученные выражения для вероятности выхода упрощаются и пишутся через соответствующие коэффициенты пропускания. Так, например, для первого типа имеем

$$p(\tau, \tau_0) = \left[\frac{1}{q(\tau)} - b \lambda(\tau) \right] q(\tau_0), \quad (11)$$

$$\bar{p}(\tau, \tau_0) = \frac{1}{2b} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{bq(\tau)} - \lambda(\tau) \right] q(\tau_0), \quad (12)$$

где $b = a + 1/2$ и

$$q(\tau) = \left(1 + b \ln \frac{e^{\tau} + a}{1 + a} \right)^{-1} \quad (13)$$

(Н1, ур. (38)). Аналогичные формулы нетрудно получить и для атмосфер второго типа. На рис.2 приводятся графики функций $p(\tau, \tau_0)$ и $\bar{p}(\tau, \tau_0)$

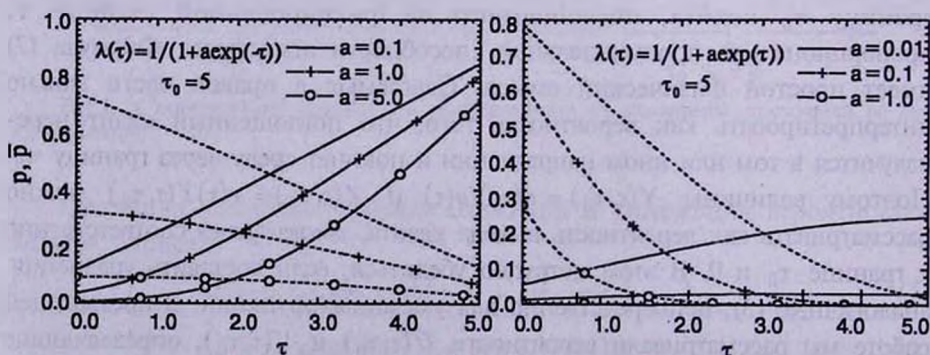


Рис.2. Вероятность выхода кванта через границы τ_0 (сплошные линии) и 0 (пунктир) для неоднородных атмосфер двух типов.

для $\tau_0 = 5$ и некоторых значений параметра a .

3. *Среднее число рассеяний*. Среди различных величин, описывающих процесс переноса излучения, много внимания уделялось среднему числу рассеяний, испытываемых квантом при диффузии в атмосфере. В одной из своих ранних работ Амбарцумян [4] (см. также [5]), для определения указанной величины предложил формулу

$$N = \lambda \frac{\partial \ln I}{\partial \lambda}, \quad (14)$$

где I - интенсивность излучения. Соболев был первый, кто при определении среднего числа рассеяний рассматривал в отдельности кванты, которые покидают среду, и кванты, которые термализуются в ней (см. [6-9]). В серии работ автора [10,11] было показано, что формула (14) справедлива при оценке среднего числа рассеяний лишь "движущихся" квантов, т.е. тех, которые не подверглись истинному поглощению. Во всех указанных выше работах рассматривалась однородная атмосфера.

В настоящем разделе мы займемся определением среднего числа рассеяний в неоднородной атмосфере, что, насколько нам известно, является первой попыткой в этом направлении. Мы покажем, что знание коэффициентов отражения и пропускания позволяет свести данную задачу к решению линейных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях. Помимо того, будет показано, что формула (14) остается в силе и в случае неоднородной атмосферы.

Рассмотрим поглощающую и рассеивающую атмосферу оптической толщины τ_* , граница $\tau = \tau_*$ которой освещается извне. Падающие на нее кванты испытывают в общем случае многократное рассеяние, прежде чем покинут среду или поглотятся в ней. Введем в рассмотрение величины N_r , N_q , N_s для обозначения среднего числа рассеяний соответственно для трех категорий квантов: отраженных, пропущенных и тех, которые подвергаются истинному поглощению в среде. Для отраженных квантов акт поглощения также будет приниматься за рассеяние. Как и выше, величины, относящиеся к квантам, движущихся в обратном направлении (т.е. к границе τ_*), будут снабжаться чертой.

Обратимся снова к рис.1 и рассмотрим атмосферу, состоящую из двух частей, каждая из которых обладает оптической толщиной τ_1 и τ_2 . Допустим, освещается граница $\tau_0 = \tau_1 + \tau_2$ атмосферы и требуется определить среднее число рассеяний для фотонов, пропущенных средой. Аналогично уравнениям (1), (2), можно написать

$$q(\tau_0) = q(\tau_1)q(\tau_2) + q(\tau_1)r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)q(\tau_2) + \dots \quad (15)$$

Каждое из элементарных событий, очевидно, осуществляется в результате определенного числа рассеяний. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} q(\tau_0)N_q(\tau_0) &= q(\tau_1)q(\tau_2)[N_q(\tau_1) + N_q(\tau_2)] + \\ &+ q(\tau_1)r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)q(\tau_2)[N_q(\tau_1) + N_q(\tau_2) + N_r(\tau_1)\bar{N}_r(\tau_2)] + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично, для отраженных и термализованных квантов находим

$$\begin{aligned} r(\tau_0)N_r(\tau_0) &= r(\tau_2)N_r(\tau_2) + \bar{q}(\tau_2)r(\tau_1)q(\tau_2)[N_r(\tau_1) + N_q(\tau_2) + \bar{N}_q(\tau_2)] + \\ &+ \bar{q}(\tau_2)r^2(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)q(\tau_2)[2N_r(\tau_1) + N_q(\tau_2) + \bar{N}_q(\tau_2) + \bar{N}_r(\tau_2)] + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} s(\tau_0)N_s(\tau_0) &= s(\tau_2)N_s(\tau_2) + q(\tau_2)s(\tau_1)[N_q(\tau_2) + N_r(\tau_1) + \bar{N}_s(\tau_2)] + \\ &+ q(\tau_2)r(\tau_1)\bar{s}(\tau_2)[N_q(\tau_2) + N_r(\tau_1) + \bar{N}_s(\tau_2)] + \\ &+ q(\tau_2)r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)s(\tau_1)[N_q(\tau_2) + N_r(\tau_1) + \bar{N}_s(\tau_2) + N_s(\tau_1)] + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

где $s(\tau_0) = 1 - r(\tau_0) - q(\tau_0)$ представляет собой вероятность того, что квант, падающий на границу τ_0 , поглотится в среде. Равным образом, $\bar{s}(\tau_0) = 1 - \bar{r}(\tau_0) - \bar{q}(\tau_0)$ обозначает аналогичную вероятность для кванта, падающего на границу 0. Как и выше, для получения дифференциальных уравнений относительно искомым функций, заменим τ_2 бесконечно малой величиной Δ . Приписывая слою Δ свойства, определяемые значением $\tau = \tau_0$, перейдем к пределу при $\Delta \rightarrow 0$. В результате находим

$$\frac{d(qN_q)}{d\tau_0} = -A(\tau_0)q(\tau_0)N_q(\tau_0) + \frac{\lambda(\tau_0)}{2}q(\tau_0)[1 + r(\tau_0)[1 + N_r(\tau_0)]], \quad (19)$$

$$\frac{d(rN_r)}{d\tau_0} = -2A(\tau_0)r(\tau_0)N_r(\tau_0) + \frac{\lambda(\tau_0)}{2}[1 + r(\tau_0)]^2, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(sN_s)}{d\tau_0} &= -A(\tau_0)s(\tau_0)N_s(\tau_0) + \\ &+ \left[A(\tau_0) - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}q(\tau_0) \right] r(\tau_0)N_r(\tau_0) + [1 - \lambda(\tau_0)][1 + r(\tau_0)]. \end{aligned} \quad (21)$$

При $\tau_0 = 0$ все три величины qN_q , rN_r , sN_s равны нулю. Легко проверить, что уравнения (19), (20) можно получить из уравнений для коэффициентов пропускания и отражения, полученных в предыдущей работе (см. Н1, ур. (12), (13)) формальным дифференцированием по λ , рассматривая его как параметр. Таким образом, формула (14), предложенная Амбарцумяном, остается в силе и в случае неоднородной атмосферы, если речь идет о квантах, покидающих среду.

С учетом уравнения для коэффициента пропускания решения уравнений (19)-(21) можно записать в явном виде. Здесь мы ограничимся тем, что приведем интегральные представления для N_q , N_r :

$$N_q(\tau_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} \lambda(t)[1 + r(t)[1 + N_r(t)]]dt, \quad (22)$$

$$N_r(\tau_0) = \frac{q^2(\tau_0)}{2r(\tau_0)} \int_0^{\tau_0} \lambda(r) [1 + r^2(r)] \frac{dr}{q^2(r)}, \quad (23)$$

Представляет интерес также величина

$$N(\tau_0) = r(\tau_0) N_r(\tau_0) + q(\tau_0) N_q(\tau_0) + s N_s(\tau_0), \quad (24)$$

которая, как легко понять, не что иное, как среднее число рассеяний, испытываемых квантами независимо от того, покидают ли они среду в результате многократного рассеяния или подвергаются истинному поглощению. Рис.3, 4 иллюстрируют зависимость величин N , N_q , N_r , N_s от оптической толщины для двух типов атмосфер. Атмосфера первого типа характеризуется линейным ростом N_r и N от τ_0 ; в то же время величины N_q и N_s растут примерно как τ_0^2 . Это нетрудно объяснить, если учесть, что с ростом τ_0 освещаемая часть атмосферы приближается к пределу, при котором она становится чисто рассеивающей и $r(\tau_0) = \tau_0/(\tau_0 + 2)$, $q(\tau_0) = 2/(\tau_0 + 2)$ (см. [12]). Для этого предельного случая из (22) и (23) находим

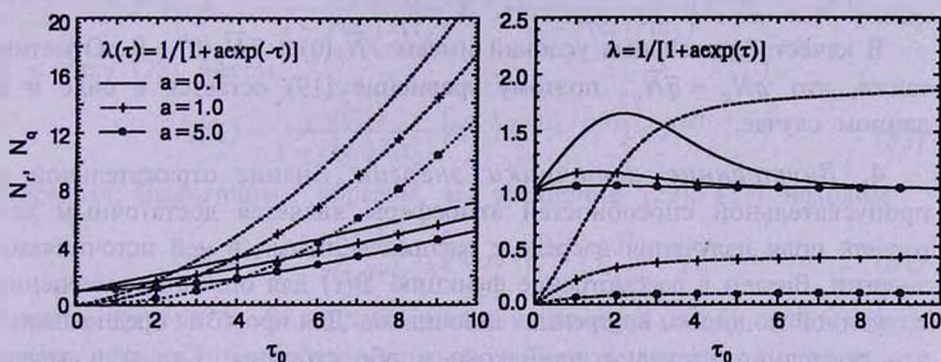


Рис.3. Среднее число рассеяний, испытываемых отраженными (сплошные линии) и пропущенными (пунктирные линии) квантами для двух типов атмосфер при различных значениях параметра a .

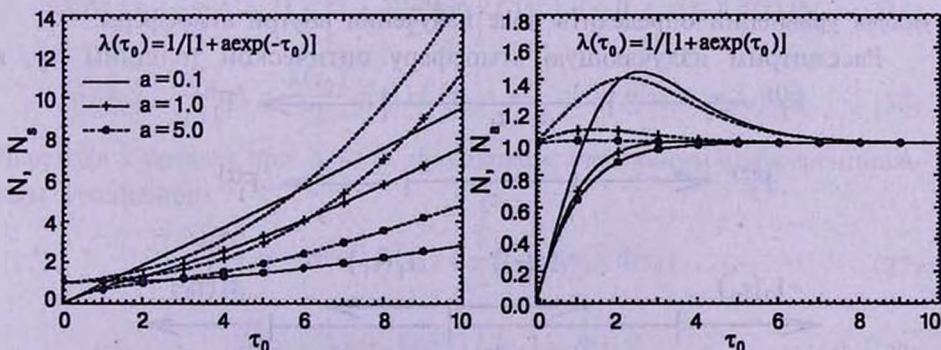


Рис.4. Среднее число рассеяний N (сплошные линии) и N_q (пунктирные линии) для двух типов атмосфер при различных значениях параметра a .

$$N_r(\tau_0) = \frac{2}{3} \frac{\tau_0^2 + 3(\tau_0 + 1)}{\tau_0 + 2}, \quad N_q(\tau_0) = \frac{1}{6} \left[\tau_0^2 + 8\tau_0 - 4 \ln \left(1 + \frac{\tau_0}{3} \right) \right]. \quad (25)$$

Первая из данных формул справедлива при любом $\tau_0 > 0$. При $\tau_0 = 0$, $N_r = 0$. Чем меньше значение параметра a , тем отчетливее выражен описанный выше эффект. Вместе с тем, совершенно иначе ведут себя средние числа рассеяний для атмосферы второго типа. Величины N_r , N растут до тех пор, пока атмосфера является оптически тонкой, а затем убывают, стремясь к единице, поскольку атмосфера становится практически чисто поглощающей.

Дифференциальные уравнения, аналогичные (19)-(21), нетрудно вывести и для случая, когда атмосфера освещается со стороны границы 0. Здесь мы ограничимся тем, что приведем окончательные результаты:

$$\frac{d(\bar{r} \bar{N}_r)}{d\tau_0} = \frac{\lambda(\tau_0)}{2} q(\tau_0) [q(\tau_0) + 2 N_q(\tau_0)], \quad (26)$$

$$\frac{d \bar{p} \bar{N}_p}{d\tau_0} = q(\tau_0) \left[1 - \lambda(\tau_0) + \frac{\lambda(\tau_0)}{2} p(\tau_0) \right] [N_p(\tau_0) + 1] + \frac{\lambda(\tau_0)}{2} N_p(\tau_0). \quad (27)$$

В качестве начальных условий имеем $\bar{r} \bar{N}_r(0) = \bar{p} \bar{N}_p(0) = 0$. Отметим также, что $q N_q = \bar{q} \bar{N}_q$, поэтому уравнение (19) остается в силе и в данном случае.

4. *Внутренние источники энергии.* Знание отражательной и пропускательной способностей атмосферы является достаточным для расчета поля излучения в среде с распределенными в ней источниками энергии. Введем в рассмотрение функцию $B(\tau)$ для описания изменения с глубиной мощности внутренних источников. Для простоты предположим, что последние излучают одинаково в обе стороны. Как и в задаче диффузного отражения и пропускания, мы начнем с определения интенсивностей излучения, выходящего из атмосферы. Далее будет показано, что знание этих величин позволяет без решения каких-либо новых уравнений определить поле излучения внутри атмосферы.

Рассмотрим излучающую атмосферу оптической толщины τ_0 , в

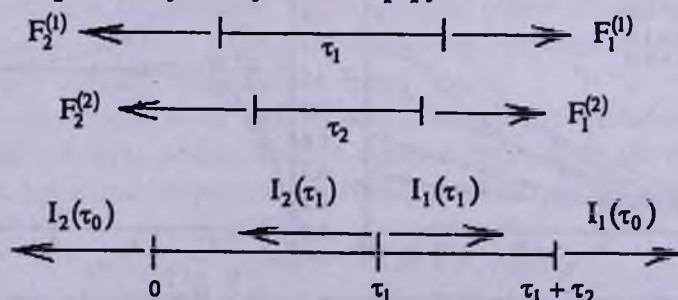


Рис.5. Сложение слоев для атмосферы с распределенными в ней источниками энергии.

которой как коэффициент рассеяния, так и мощность источников энергии меняются с глубиной. Чтобы определить выходящие интенсивности $I_1(\tau_0) = I^-(\tau_0, \tau_0)$ и $I_2(\tau_0) = I^+(0, \tau_0)$, мысленно разделим атмосферу на две части, обладающие соответственно оптическими толщинами τ_1 и τ_2 ($\tau_0 = \tau_1 + \tau_2$) (см. рис.5). Допустим, что каждая из этих двух частей, взятая в отдельности, излучает интенсивности $F_1^{(1)}$, $F_2^{(1)}$ и $F_1^{(2)}$, $F_2^{(2)}$. В результате их взаимодействия на глубине τ_1 составной атмосферы будут наблюдаться интенсивности $I^+(\tau_1, \tau_0)$ и $I^-(\tau_1, \tau_0)$. Используя введенные величины, можно написать ряд физически очевидных соотношений

$$I_1(\tau_0) = I^-(\tau_1, \tau_0)q(\tau_2) + F_1^{(2)}, \quad (28)$$

$$I_2(\tau_0) = I^+(\tau_1, \tau_0)q(\tau_1) + F_2^{(1)}, \quad (29)$$

$$I^-(\tau_1, \tau_0) = I^+(\tau_1, \tau_0)r(\tau_1) + F_1^1, \quad (30)$$

$$I^+(\tau_1, \tau_0) = I^-(\tau_1, \tau_0)\bar{r}(\tau_2) + F_2^2. \quad (31)$$

Взятые вместе соотношения (30), (31) дают

$$I^-(\tau_1, \tau_0) = \frac{r(\tau_1)}{1 - r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)} F_2^{(2)} + \frac{1}{1 - r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)} F_1^{(1)}, \quad (32)$$

и в силу (28) имеем

$$I_1(\tau_0) = \frac{q(\tau_2)}{1 - r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)} [r(\tau_1)F_2^{(2)} + F_1^{(1)}] + F_1^{(2)}. \quad (33)$$

Поступая аналогичным образом, из уравнений (29), (31) находим

$$I_2(\tau_0) = \frac{q(\tau_1)}{1 - r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)} [\bar{r}(\tau_2)F_1^{(1)} + F_2^{(2)}] + F_2^{(1)}. \quad (34)$$

Заменяем теперь τ_2 бесконечно малой величиной Δ . С точностью до членов первого порядка относительно Δ бесконечно малый слой можно принять однородным и изотермическим, так что $F_1^{(2)} = F_2^{(2)} = (1/2)B\Delta$. Тогда из (33) и (34) получаем

$$I_1(\tau_0) + \frac{dI_1}{d\tau_0}\Delta = \left\{1 - \left[1 - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\right]\Delta\right\} I_1(\tau_0) + \frac{1}{2}[1 + r(\tau_0)]B(\tau_0)\Delta, \quad (35)$$

$$I_2(\tau_0) + \frac{dI_2}{d\tau_0}\Delta = \frac{\lambda(\tau_0)}{2}q(\tau_0)I_1(\tau_0)\Delta + \frac{1}{2}q(\tau_0)B(\tau_0)\Delta + I_2(\tau_0). \quad (36)$$

Переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, приходим к следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{dI_1}{d\tau_0} = -A(\tau_0)I_1(\tau_0) + \frac{1}{2}[1 + r(\tau_0)]B(\tau_0), \quad (37)$$

$$\frac{dI_2}{d\tau_0} = \frac{1}{2}q(\tau_0)[\lambda(\tau_0)I_1(\tau_0) + B(\tau_0)], \quad (38)$$

связанных начальными условиями $I_1(0) = I_2(0) = 0$. Насколько нам известно, эти уравнения приводятся в литературе впервые. С учетом (6) решения последних могут быть записаны в интегральной форме

$$I_1(\tau_0) = \frac{1}{2} q(\tau_0) \int_0^{\tau_0} [1 + r(t)] B(t) \frac{dt}{q(t)}, \quad (39)$$

$$I_2(\tau_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} q(t) [\lambda(t) I_1(t) + B(t)] dt. \quad (40)$$

С учетом (6) соотношение (39) можно интерпретировать как произведение мощности источников энергии на вероятность выхода из среды, интегрированное по всем глубинам. Можно показать, что аналогичную интерпретацию допускает и соотношение (40). Вместе с тем, оно имеет простой физический смысл: выходящее из среды излучение складывается из двух частей, одна из которых обусловлена внутренними источниками энергии, а другая - встречным потоком, который при рассеянии меняет свое направление на противоположное.

Таким образом, мы видим, что знание коэффициентов отражения и пропускания позволяет легко определить интенсивности излучения, выходящего из атмосферы с произвольным распределением внутренних источников. В предельных случаях, когда атмосфера является чисто поглощающей ($\lambda(\tau_0) \equiv 0$) или чисто рассеивающей ($\lambda(\tau_0) \equiv 1$), при $B(\tau_0) \equiv \text{const}$ мы приходим к хорошо известным результатам:

$I_1(\tau_0) = I_2(\tau_0) = (B/2)[1 - \exp(-\tau_0)]$ и $I_1(\tau_0) = I_2(\tau_0) = B\tau_0/2$, соответственно.

Представляет интерес для астрофизики случай, когда источники распределены по закону $B(\tau_0) = B^*[1 - \lambda(\tau_0)]$, где $B^* = \text{const}$. Если источники обусловлены тепловым излучением, то B^* просто выражается через функцию Планка. Для атмосферы первого типа задача допускает аналитическое решение, записывающееся через элементарные функции

$$I_1(\tau_0) = aB^*[g(\tau_0) - e^{-\tau_0}], \quad (41)$$

$$I_2(\tau_0) = \frac{aB^*}{2a+1} [1 - g(\tau_0)], \quad (42)$$

где $g(\tau_0)$ задается соотношением (13). Как и следовало ожидать, выходящие интенсивности при $a \rightarrow 0$ стремятся к нулю, что связано с убыванием мощности внутренних источников. При $a \rightarrow \infty$ атмосфера становится чисто поглощающей, тем самым $I_1(\tau_0) = I_2(\tau_0) = (B^*/2)[1 - \exp(-\tau_0)]$. В этом нетрудно убедиться, если учесть, что $q(\tau_0) = \exp(-\tau_0) + [1 - \exp(-\tau_0)]/2a$. В случае полубесконечной атмосферы, когда $\tau_0 \rightarrow \infty$, выходящая интенсивность стремится, как это следует из (42), к конечному пределу $aB^*/(2a+1)$. Заметим, что соотношения (41) и (42) позволяют выявить

условие, при котором решение задачи для полубесконечной атмосферы ограничено. Нетрудно убедиться, что для этого достаточно, чтобы $B(\tau_0) = o(\tau_0^{-2})$.

Типичные примеры, демонстрирующие зависимость выходящих интенсивностей от поведения функций $\lambda(\tau_0)$ и $B(\tau_0)$, показаны на рис.6.

Два типа атмосфер рассмотрены для $a=1$ и трех различных функций $B(\tau_0)$: $B(\tau_0) = \tau_0$, $B(\tau_0) = 10 - \tau_0$ и $B(\tau_0) = \text{const} (=5)$ (т.е. среднее значение $B(\tau_0)$, взятых в первых двух случаях). Совместное действие изменения $\lambda(\tau_0)$ и $B(\tau_0)$ на $I_1(\tau_0)$ отчетливо видно на рис.6а в случае $B(\tau_0) = 10 - \tau_0$. Выходящая через границу τ_0 интенсивность излучения сначала возрастает с увеличением оптической толщины, то есть с увеличением роли многократного рассеяния, а затем убывает вследствие убывания мощности первичных источников. Этот эффект более ярко

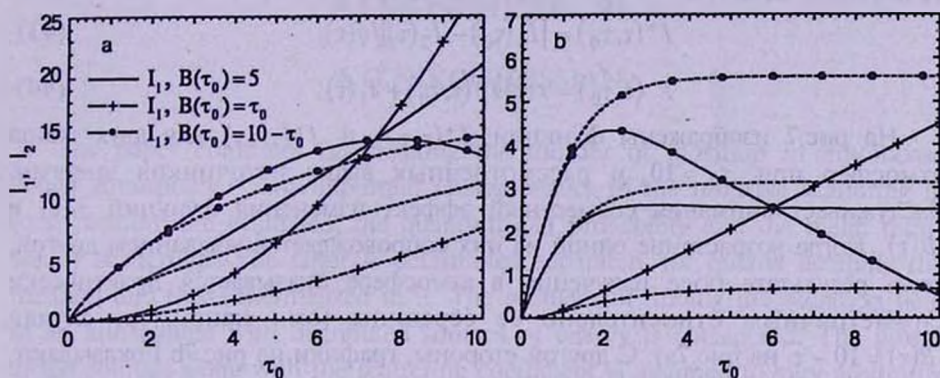


Рис.6. Зависимость $I_1(\tau_0)$ (сплошные линии) и $I_2(\tau_0)$ (пунктир) от оптической толщины для атмосфер с распределенными в ней источниками энергии: а) атмосфера первого типа ($\lambda(\tau) = 1/(1 + ae^{-\tau})$), б) атмосфера второго типа ($\lambda(\tau) = 1/(1 + ae^{\tau})$). В обоих случаях параметр a взят равным 1.

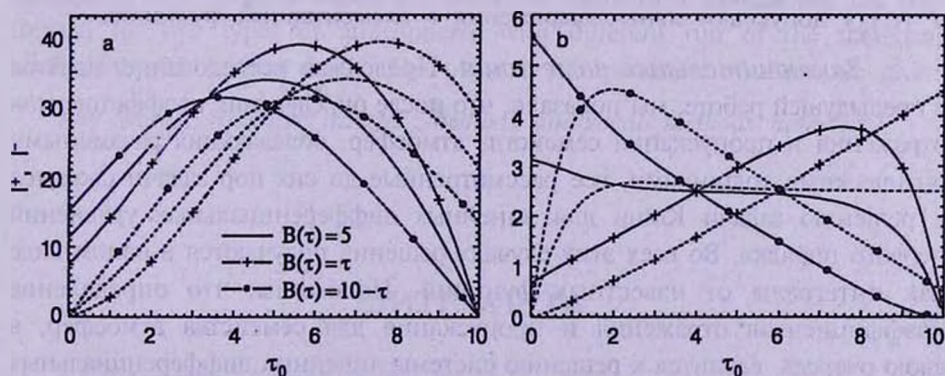


Рис.7. Поле излучения в неоднородной атмосфере с распределенными в ней источниками энергии при $\tau_0 = 10$: а) атмосфера первого типа ($\lambda(\tau) = 1/(1 + ae^{-\tau})$), б) атмосфера второго типа ($\lambda(\tau) = 1/(1 + ae^{\tau})$). В обоих случаях параметр a взят равным 1. Сплошные линии соответствуют $I^+(\tau, \tau_0)$, пунктирные - $I^-(\tau, \tau_0)$.

выражен в случае атмосферы второго типа, показанный на рис.6б. Резкое убывание коэффициента рассеяния с глубиной в этом случае приводит к тому, что слои атмосферы вблизи границы τ_0 оказываются чисто поглощающими, поэтому интенсивность выходящего излучения полностью определяется распределением источников энергии. С другой стороны, интенсивность излучения, выходящего из противоположного конца атмосферы, мало меняется с увеличением оптической толщины и стремится к некоторой постоянной величине. При $B(\tau_0)=5$ такое поведение характерно как для $I_1(\tau_0)$, так и для $I_2(\tau_0)$, причем значение данной константы тем ближе к $B/2$, чем больше значение параметра a .

Так же как и при рассмотрении задачи о диффузном отражении и пропускании, знание выходящих интенсивностей позволяет легко определить режим излучения внутри среды и не требует решения каких-либо уравнений. Действительно, из уравнений (29) и (30) мы находим

$$I^+(\tau, \tau_0) = [I_2(\tau_0) - I_2(\tau)]/q(\tau), \quad (43)$$

$$I^-(\tau, \tau_0) = r(\tau)I^+(\tau, \tau_0) + I_1(\tau). \quad (44)$$

На рис.7 изображены функции $I^+(\tau, \tau_0)$ и $I^-(\tau, \tau_0)$ для двух типов атмосфер при $\tau_0 = 10$ и рассмотренных выше источников энергии. Заслуживает внимания совместный эффект изменения функций $\lambda(\tau)$ и $B(\tau)$. Когда возрастание одной из них сопровождается убыванием другой, то в результате поле излучения в атмосфере оказывается практически симметричным относительно ее середины (см., например, случай $B(\tau) = 10 - \tau$ на рис.7а). С другой стороны, графики на рис.7б показывают, что когда процессы поглощения преобладают, интенсивности излучения внутри атмосферы изменяются с глубиной примерно так, как мощность источников энергии. Заметим в заключение, что в случае атмосферы первого типа и источников вида $[1 - \lambda(\tau)]B^*$ интенсивности $I^+(\tau, \tau_0)$ и $I^-(\tau, \tau_0)$ допускают явные выражения в элементарных функциях.

5. Заключительные замечания. Продолжая исследование, начатое в предыдущей работе, мы показали, что после определения коэффициентов отражения и пропускания семейства атмосфер, обладающих различными оптическими толщинами, все рассмотренные до сих пор задачи сводятся к решению задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Во всех этих случаях решения получаются в явном виде как интегралы от известных функций. Напомним, что определение коэффициентов отражения и пропускания для семейства атмосфер, в свою очередь, сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Важным является тот факт, что как в задаче диффузного отражения и пропускания, так и в задаче о переносе излучения в атмосфере с распределенными в ней источниками

энергии, знание выходящих интенсивностей дает возможность без труда определить поле излучения внутри среды. В дальнейшем мы убедимся, что предложенный нами подход может быть применен и при более общих предположениях относительно элементарного акта рассеяния и геометрии среды.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна,
Армения, e-mail: narthur@bao.sci.am

RADIATIVE TRANSFER IN INHOMOGENEOUS ATMOSPHERE. II

A.G.NIKOGHOSSIAN

The paper continues investigating the transfer of radiation in inhomogeneous atmosphere. Two important characteristics of the multiple scattering in such medium are evaluated: the quantum exit probability and the mean number of scatterings. The latter is determined separately for quanta escaping the medium and those thermalized in it. The problem of finding the radiation field in an atmosphere with distributed sources of energy is considered. The power of the sources along with the scattering coefficient is assumed to vary arbitrarily with depth. It is shown that the knowledge of the reflection and transmission coefficients of atmosphere allows one to reduce all the mentioned problems to the solution of the first-order differential equations with initial conditions. A number of new analytic results are obtained. Numerical calculations are performed for two types of atmospheres with different run of the scattering coefficient with optical depth. The physical interpretation of these are given.

Key words: *radiative transfer: methods analytical: methods numerical*

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г.Никогосян, *Астрофизика*, **47**, 123, 2004.
2. Д.М.Седракян, А.Ж.Хачатрян, *Астрофизика*, **42**, 419, 1999.
3. D.M.Sedrakian, A.Zh.Khachatrian, *Phys. Lett.*, **A265**, 294, 2000.
4. В.А.Амбарцумян, *ДАН АрмССР*, **8**, 101, 1948.

5. В.А.Амбарцумян, Научные труды, т.1, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
6. В.В.Соболев, *Астрофизика*, 2, 135, 1966.
7. В.В.Соболев, *Астрофизика*, 2, 239, 1966.
8. В.В.Соболев, *Астрофизика*, 3, 5, 1967.
9. В.В.Соболев, *Астрофизика*, 3, 137, 1967.
10. А.Г.Никогосян, *Астрофизика*, 21, 323, 1984.
11. А.Г.Никогосян, *Астрофизика*, 21, 579, 1984.
12. В.В.Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.