АСТРОФИЗИКА

ТОМ 47 ФЕВРАЛЬ, 2004 ВЫПУСК 1

УДК: 524.3

ТРЕТИЙ ИНТЕГРАЛ И ДИНАМИКА ГАЛАКТИКИ В ОКРЕСТНОСТИ СОЛНЦА

А.М.БОЙЧЕНКО

Поступила 5 мая 2003

Принята к печати 10 октября 2003

Данные наблюдений за динамикой звезд в окрестности Солнца говорят о существовании, наряду с интегралами момента импульса и энергии, также третьего интеграла. В качестве третьего интеграла предлагается интеграл Пуанкаре. Получены следствия, вытекающие из этого предположения, проводятся сравнения следствий с доступными астрофизическими данными.

1. *Введение.* Данные наблюдений по распределению скоростей звезд Галактики не соответствуют современным представлениям о функции распределения звезд по скоростям при учете только двух интегралов - энергии и осевой компоненты момента импульса [1-4,8].

В случае, когда функция распределения звезд $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ не зависит от времени (считается, что это так для Галактики), она, согласно теореме Джинса, является функцией изолирующих интегралов движения пробной звезды, число которых не превышает пяти $f(I_1, ..., I_5)$. Для осесимметричных галактик интегралами в общем случае являются энергия

$$I_1 = m\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2\right)/2 + U , \tag{1}$$

где U - сглаженная потенциальная энергия, x, y, z - координаты, $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ - скорости звезды, и одна из компонент момента импульса

$$I_2 = mr\upsilon_\varphi , \tag{2}$$

последняя записана в цилиндрической системе координат, m - масса звезды.

Для скоростей звезд в окрестности Солнца справедливы соотношения

$$\left\langle \upsilon_\varphi^2 \right\rangle \approx \left\langle \upsilon_z^2 \right\rangle \approx 0.4\left\langle \upsilon_r^2 \right\rangle , \tag{3}$$

здесь $\upsilon_r, \upsilon_\varphi, \upsilon_z$ - радиальная, азимутальная и вертикальная составляющие в цилиндрической системе координат в локальной системе отсчета [2,4]. Если предположить для Галактики

$$f = f(I_1, I_2) = f\left(\left(\upsilon_\varphi^2 + \upsilon_r^2 + \upsilon_z^2\right)/2 + U, r\upsilon_\varphi\right),$$

то симметричность f относительно υ_r и υ_z не согласуется с (3) [2,4]. Итак, либо должен существовать еще один - третий интеграл, либо представления о стационарности и осесимметричности Галактики следует признать ошибочными [1-4,8].

Попытки нахождения третьего интеграла пока не увенчались успехом. Подробную библиографию работ по третьему интегралу можно найти в [1,3-8].

В работе в качестве третьего интеграла рассматривается интеграл Пуанкаре. В случае, когда подавляющий вклад в динамику определяется ядром Галактики, объяснить дисперсию скоростей звезд (3) нельзя. С использованием интеграла Пуанкаре выводится потенциал, для которого должны быть справедливы соотношения (3).

2. *Интеграл Пуанкаре.* В гравитирующих системах существует также интеграл, имеющий вид

$$\sum_l \left(2(\bar{r}_l \bar{\eta}_l) + (\bar{p}_l \bar{\xi}_l)\right) = 3t\left[\sum_l \left(\frac{(\bar{p}_l \bar{\eta}_l)}{m_l} + \left(\frac{\partial U}{\partial \bar{r}_l} \bar{\xi}_l\right)\right)\right] + \text{const}, \tag{4}$$

где $\mathbf{r}, \xi$ и $\mathbf{p}, \eta$ - любые координаты и импульсы, являющиеся решением уравнений движения, причем $\xi(t)$ и $\eta(t)$ - такие решения, квадратом которых можно пренебречь. Данный интеграл возникает в силу того, что уравнения движения гравитирующих точечных масс не меняются, если время умножить на λ^3, координаты - на λ^2, а импульсы - на λ^{-1}, где λ - произвольная постоянная. Подробное рассмотрение и вывод содержатся в [9, с.143-152].

3. ***Посылки для получения среднеквадратичных отклонений компонент импульсов.***

Возмущенное движение. Движение подавляющего числа звезд сейчас уже сформировалось и приближенно является круговым, поэтому рассмотрим возмущенное движение звезды относительно круговой орбиты. Пусть ось z совпадает с осью вращения Галактики. Обозначим через $\delta r_r, \delta r_\varphi$ и δr_z - радиальную, азимутальную и вертикальную составляющие компоненты $\delta\mathbf{r}$ - вектора отклонения от равномерного движения по окружности в цилиндрической системе координат в локальной системе отсчета. Невозмущенное движение звезды соответствует условию $\delta\mathbf{r} = 0$. Представим возмущения в виде

$$\delta r_{r,\varphi,z}(t) = \delta r^{(1)}_{r,\varphi,z}(t) + \delta r^{(2)}_{r,\varphi,z}(t), \quad \delta r^{(2)}_{r,\varphi,z} = o\left(\delta r^{(1)}_{r,\varphi,z}\right), \tag{5}$$

$$\delta p_{r,\varphi,z}(t) = \delta p^{(1)}_{r,\varphi,z}(t) + \delta p^{(2)}_{r,\varphi,z}(t), \quad \delta p^{(2)}_{r,\varphi,z} = o\left(\delta p^{(1)}_{r,\varphi,z}\right), \tag{6}$$

где $\delta p_r, \delta p_\varphi$ и δp_z - соответствующие составляющие компоненты вектора $\delta\mathbf{p}$ звезды.

Интегралы движения. Явная зависимость от времени в (4) делает этот интеграл в общем случае неприемлемым для нашего рассмотрения. Выберем $\xi(t) = \delta\mathbf{r}(t)$, $\eta(t) = \delta\mathbf{p}(t)$. Тогда в квадратных скобках в (4) стоит

δE - вариация полной энергии системы, которая должна тождественно равняться нулю. С той же степенью точности, с которой мы говорим об интегралах (1) и (2), а не об энергии и проекции момента импульса всей системы, мы можем говорить и об интеграле

$$I_3 = 2(\bar{r}\,\delta\,\bar{p}) + (\bar{p}\,\delta\,\bar{r}) = 2\,r\,\delta\,p_r + p_\varphi\,\delta\,r_\varphi = \text{const} . \tag{7}$$

4. ***Вывод соотношений для среднеквадратичных отклонений компонентов импульсов.*** Допустим, что звезда при равномерном движении по невозмущенной орбите радиуса r со скоростью v (импульсом $p = mv$) испытывает в некоторый (начальный) момент времени возмущение - получает перпендикулярную своему движению составляющую импульса $\delta p_\perp^0$. Если звезда получает параллельную своему движению составляющую импульса δp_φ^0, то в силу закона сохранения момента импульса, импульс $p + \delta p_\varphi^0$ в начальный момент времени $\delta r_r = 0$ не будет соответствовать импульсу невозмущенной орбиты радиуса r. Звезда должна перейти на другую орбиту и рассмотрение возмущенного движения мы должны проводить уже для нее. Таким образом, можно считать, что либо импульс звезды с орбитой радиуса r получил приращение $\delta p_\perp^0$, либо импульс звезды получил произвольное приращение, тогда r - радиус пересчитанной невозмущенной орбиты звезды, для которой приращение импульса есть $\delta p_\perp^0$.

При выводе интересующих нас соотношений будут использованы обозначения для координат и импульсов возмущенного движения звезды

$$\bar{r}'(t) = \bar{r}(t) + \delta\,\bar{r}(t), \quad |\bar{r}(t)| = r\,, \qquad \bar{p}'(t) = \bar{p}(t) + \delta\,\bar{p}(t), \quad |\bar{p}(t)| = p\,.$$

4.1. ***Рассмотрение движения звезды в первом порядке малости по* $\delta\mathbf{r}$, $\delta\mathbf{p}$.**

Закон сохранения I_1. Для изменения энергии в первом порядке малости имеем

$$\delta I_1^{(1)} = \frac{p'^2}{2m} - U(r') - \left(\frac{p^2}{2m} - U(r)\right) = \frac{p\,\delta\,p_\varphi^{(1)}(t)}{m} + U'(r)\delta r_r^{(1)}(t) = 0\,,$$

т.е.

$$\delta r_r^{(1)}(t) = -\frac{p}{U'(r)m}\,\delta\,p_\varphi^{(1)}(t)\,, \tag{8}$$

где $U'(r)$ - производная от потенциальной энергии по r.

Закон сохранения I_2. В первом порядке малости имеем

$$\delta I_2^{(1)} = ([\bar{r}'(t), \bar{p}'(t)]\bar{e}_z) - rp = r\,\delta\,p_\varphi^{(1)}(t) + \delta r_r^{(1)}(t)\,p = 0\,,$$

т.е.

$$\delta r_r^{(1)}(t) = -\frac{r}{p}\,\delta\,p_\varphi^{(1)}(t)\,. \tag{9}$$

Закон сохранения I_3. В первом порядке из (7) имеем $2r\,\delta p_r^{(1)}(t)+$ $+\,p\,\delta r_\varphi^{(1)}(t)=\text{const}$. Выберем центр движения относительно локальной системы отсчета (на окружности радиуса r) так, чтобы константа в выписанном интеграле была бы равна нулю

$$2r\,\delta p_r^{(1)}(t)+p\,\delta r_\varphi^{(1)}(t)=0. \qquad (10)$$

Итак, $\delta\mathbf{r}\ (t=0)$ имеет составляющие, равные $\delta r_r=0$ и $\delta r_\varphi=-2r\,\delta p_\perp^0/p$.

4.2. *Рассмотрение движения звезды во втором порядке малости по* $\delta\mathbf{r}$, $\delta\mathbf{p}$.

Закон сохранения I_2. Во втором порядке малости, используя (5), (6), имеем

$$-r\,\delta p_\varphi^{(2)}(t)-\delta r_r^{(2)}(t)\,p+\delta r_\varphi^{(1)}(t)\,\delta p_r^{(1)}(t)-\delta r_r^{(1)}(t)\,\delta p_\varphi^{(1)}(t)=0,$$

тогда из (9), (10) получаем, что

$$2\left(\delta p_r^{(1)}(t)\right)^2-\left(\delta p_\varphi^{(1)}(t)\right)^2=-\lambda=-\frac{p}{r}\left(r\,\delta p_\varphi^{(2)}(t)+\delta r_r^{(2)}(t)\,p\right). \qquad (11)$$

Закон сохранения I_1. Как было отмечено выше, объяснить соотношения (3) в предположении, что подавляющий вклад в динамику звезд определяется ядром Галактики нельзя. В этом случае $U(r)=-a/r$, где $a=\gamma Mm$ - соответствует массе Галактики M, γ - гравитационная постоянная. Опуская аргумент t у возмущений координат и импульсов, получаем из $\delta I_1^{(2)}=\left(\delta p_\perp^0\right)^2/2m$:

$$\frac{\left(\delta p_\varphi^{(1)}\right)^2}{2m}+\frac{p\,\delta p_\varphi^{(2)}}{m}+\frac{\left(\delta p_r^{(1)}\right)^2}{2m}+\frac{\left(\delta p_z^{(1)}\right)^2}{2m}=$$
$$\frac{a}{2r^3}\left(2\left(\delta r_r^{(1)}\right)^2-\left(\delta r_\varphi^{(1)}\right)^2-\left(\delta r_z^{(1)}\right)^2\right)-\frac{a}{r^2}\delta r_r^{(2)}+\frac{\left(\delta p_\perp^0\right)^2}{2m}.$$

С учетом (8), (9) видно, что $rp^2=ma$, и в плоскости r,φ предыдущее уравнение переходит в

$$\frac{\left(\delta p_\varphi^{(1)}\right)^2}{2}+p\,\delta p_\varphi^{(2)}+\frac{\left(\delta p_r^{(1)}\right)^2}{2}+\frac{p^2}{r}\delta r_r^{(2)}=\frac{p^2}{2r^2}\left(2\left(\delta r_r^{(1)}\right)^2-\left(\delta r_\varphi^{(1)}\right)^2\right)+\frac{\left(\delta p_\perp^0\right)^2}{2}. \qquad (12)$$

Второй и четвертый члены левой части уравнения в сумме в точности равны первому слагаемому правой части и равны λ (см. (9), (10), (11)), поэтому

$$\left(\delta p_\varphi^{(1)}\right)^2+\left(\delta p_r^{(1)}\right)^2=\left(\delta p_\perp^0\right)^2. \qquad (13)$$

При усреднении этого выражения по периоду колебаний в плоскости r, φ с учетом того, что среднее значение от квадрата гармонических функций равно 1/2:

$$\left\langle \left(\delta p_r^{(1)}(t)\right)^2 \right\rangle = \left(\delta p_r^{max}\right)^2/2 = \left(\delta p_\perp^0\right)^2/2\,, \tag{14}$$

получается

$$\left\langle \left(\delta p_r^{(1)}(t)\right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\delta p_\varphi^{(1)}(t)\right)^2 \right\rangle.$$

Уже отсюда, не привлекая рассмотрения движения в направлении z, видно, что (3) выполняться не могут. Исследуемый вопрос можно теперь переформулировать следующим образом: какому U отвечает распределение скоростей (3)?

5. *Получение U из экспериментального распределения скоростей.* При малых отклонениях z от галактической плоскости в окрестности Солнца примем

$$U = \Phi\left(r^2\right) + Z(z) = \Phi + Z\,,$$

где r теперь равно не $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а $\sqrt{x^2+y^2}$. Данный вид потенциала не означает, что в задаче появился интеграл Оорта-Линдблада, поскольку это не глобальный вид потенциала.

Движение в плоскости r, φ. Рассматривая I_1, I_2 в первом порядке малости, получаем

$$mr^2\,\Phi' = p^2/2\,, \tag{15}$$

где производные от Φ берутся по аргументу r^2. Рассматривая теперь интеграл I_1 во втором порядке малости, получаем уравнение типа (12), в котором первое слагаемое правой части

$$-mr^2\,\Phi'\left(\left(\frac{\delta r_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\delta r_\varphi}{r}\right)^2\right) - mr^4\,\frac{\Phi''}{2!}\left(\frac{2\delta r_r}{r}\right)^2, \tag{16}$$

где первый и второй члены - вклады во второй порядок от отношения $\delta r/r$ для

$$r'^2(t) = \left(\bar{r}(t) + \delta\bar{r}(t)\right)^2 = r^2\left(1 + 2(\delta r_r/r) + \left(\delta r_r^2 + \delta r_\varphi^2\right)/r^2\right)$$

вблизи r^2, соответственно, от третьего и второго слагаемых последнего выражения. Подставляя (15) в (16) и используя (9), (10), получаем

$$-2\left(\frac{\delta p_r}{p}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta p_\varphi}{p}\right)^2 - m\frac{r^4}{p^2}\frac{\Phi''}{2!}4\left(\frac{\delta p_\varphi}{p}\right)^2 = \frac{\lambda}{p^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{\delta p_\varphi}{p}\right)^2 - m\frac{r^4}{p^2}\frac{\Phi''}{2!}4\left(\frac{\delta p_\varphi}{p}\right)^2.$$

Вместо уравнения (13) имеем теперь

$$\left(\delta p_r^{(1)}\right)^2 + \left(\delta p_\varphi^{(1)}\right)^2 + 3\left(\delta p_\varphi^{(1)}\right)^2 + m\frac{r^4}{p^2}8\frac{\Phi''}{2!}\left(\delta p_\varphi^{(1)}\right)^2 = \left(\delta p_\perp^0\right)^2.$$

По-прежнему должно выполняться соотношение (14). Для выполнения (3), после усреднения данного выражения, коэффициент при $\left\langle \delta p_\varphi^{(1)}(t)^2 \right\rangle$

должен равняться 2.5:

$$\left\langle\left(\delta p_r^{(1)}\right)^2\right\rangle + 2.5\left\langle\left(\delta p_\varphi^{(1)}\right)^2\right\rangle = \left(\delta p_\perp^0\right)^2, \tag{17}$$

что приводит к

$$r^2\,\Phi''/\Phi' = -3/4\,. \tag{18}$$

Отметим, что если коэффициент в формуле (3) равен не 0.4, а лежит в диапазоне от 0.33 до 0.5, то отношение (18) лежит в диапазоне от "-1/2" до "-1". Если приближать Φ степенной зависимостью от r^2 в окрестности Солнца, то эта зависимость, согласно (18), должна быть

$$\Phi\left(r^2\right) \sim \left(r^2\right)^{1/4} = r^{1/2}. \tag{19}$$

Общий случай движения. Допустим, что Z является степенной функцией z, тогда согласно теореме вириала

$$2\langle T_z\rangle = k\langle Z\rangle\,.$$

Рассмотрим два возможных противоположных в смысле динамики случая.

1. Энергия колебаний в направлении z может полностью переходить в энергию колебаний в плоскости r, φ. Тогда $\delta p_r^{max} = \delta p_\perp^0$ (см. раздел 4). Если этот переход имеет характер биений с частотой $\omega_2 \ll \omega_1$ (ω_1 - частота колебаний в плоскости r, φ), т.е. $\delta p_r^{(1)}(t) = \delta p_r^{max}\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$, то уравнение (17) примет вид

$$2.5\left\langle\left(\delta p_\varphi^{(1)}\right)^2\right\rangle + \left\langle\left(\delta p_r^{(1)}\right)^2\right\rangle + \left(1+\frac{2}{k}\right)\left\langle\left(\delta p_z^{(1)}\right)^2\right\rangle = 4\left\langle\left(\delta p_r^{(1)}\right)^2\right\rangle.$$

Для выполнения (3) необходимо, с учетом результатов предыдущего раздела, чтобы

$$k = 1/2\,.$$

2. Колебания вдоль осей r, φ и z полностью стохастизированы. Предположим, что энергии по направлениям r, φ и z равновесно распределены (равны по $1/3\left(\left(\delta p_\perp^0\right)^2/2m\right)$). Тогда

$$\left(1+\frac{2}{k}\right)\left\langle\left(\delta p_z^{(1)}\right)^2\right\rangle = \frac{1}{3}\left(\delta p_\perp^0\right)^2 = \left\langle\left(\delta p_r^{(1)}\right)^2\right\rangle.$$

При

$$k = 4/3 \tag{20}$$

выполняется соотношение (3). Отметим, что если коэффициент в формуле (3) равен не 0.4, а лежит в диапазоне от 0.33 до 0.5, то k лежит в диапазоне от 1 до 2.

6. *Обсуждение результатов.* Исходя из данных наблюдений (3) и трех интегралов движения, мы получили примерное распределение гравитационного потенциала Галактики для окрестности Солнца.

Противоречат ли наши выводы другим фактам?

Движение в плоскости Галактики. Здесь у нас есть данные наблюдений по кривой вращения. Эти данные пока не объяснены, однако существуют модели, использующие их и дающие правильное поведение потенциала вблизи $r = r_0$ (расстояние от центра Галактики до Солнца). Потенциал одной из распространенных такого рода моделей [2] вблизи r_0 имеет вид

$$u(r) = \left(-\frac{1}{r} + \frac{3\pi}{8} \frac{0.12}{1.16} \frac{r^2}{r_0^3} \right) \frac{a_1}{m}.$$

Там же отмечается, что $p^2 r_0 = a_2 m$, поэтому из (15), (19) получаем, что

$$\Phi(r) = 2\frac{a_2 r^{1/2}}{m r_0^{3/2}} + C,$$

где C - произвольная постоянная, а $a_2/a_1 = 1.4/1.16$, $a_1/(\gamma m) = 1.16 \cdot 10^{11}\, M_{\odot}$ ($M_{\odot}$ - масса Солнца) [2]. Оба потенциала неплохо согласуются между собой (рис.1).

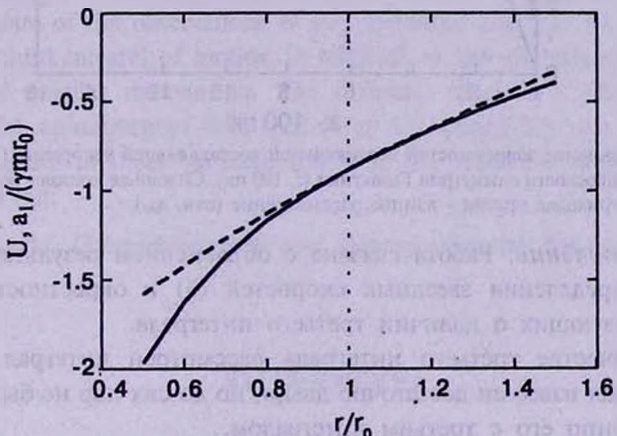

Рис.1. Сравнение зависимостей гравитационного потенциала Галактики (в единицах $a_1/(\gamma m r_0)$) от расстояния до ее центра r/r_0 (r_0 - расстояние от центра Галактики до Солнца). Сплошная линия - потенциал, полученный из кривой вращения Галактики (см. текст), штриховая линия - данное рассмотрение (значение постоянной C выбиралось так, чтобы оба потенциала совпадали при $r = r_0$). Отметим, что как первым, так и вторым потенциалом можно пользоваться только вблизи r_0, и что сопоставлять мы можем только наклоны этих потенциалов.

Движение в вертикальном направлении. В [2] имеется оценка вертикальной компоненты силы в зависимости от расстояния z до плоскости Галактики. Наиболее близок к этой оценке случай (20) $F_z \sim z^{1/3}$ (рис.2). Расхождения имеются вблизи $z = 0$, где оценочная сила ведет себя почти линейно. Отметим (текст за формулой (20)), что при 20% возможной ошибке определения (3), n в выражении $F_z \sim z^n$ может быть в пределах от 0 до 1, тогда эта сила может определяться суперпозицией степеней с данными показателями, что уже не противоречит оценкам наблюдения. Отметим также, что мы не случайно говорим здесь об оценках наблюдения. Так, в [8, с.88], подчеркивается, что "Определение значений g_z и соответствующих значений плотности в принципе кажется простым, однако надежные результаты никогда еще не были получены. Как правило, выводимая из наблюдений кривая g_z на расстоянии нескольких сотен парсеков над плоскостью Галактики так резко поворачивает вниз, что это приводит к абсурдным отрицательным значениям плотности".

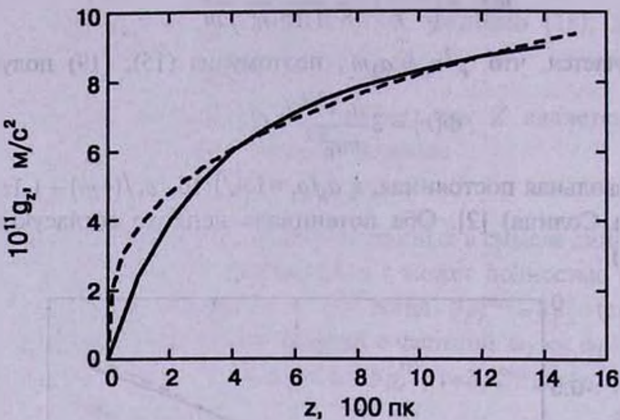

Рис.2. Сравнение зависимостей вертикальной составляющей ускорения ($10^{11}g_z$, м/с^2) от расстояния до плоскости симметрии Галактики (z, 100 пк). Сплошная кривая - астрофизические оценки [2], штриховая кривая - данное рассмотрение (отн. ед.).

7. *Заключение.* Работа связана с объяснением результатов наблюдений распределения звездных скоростей (3) в окрестности Солнца, свидетельствующих о наличии третьего интеграла.

1. В качестве третьего интеграла рассмотрен интеграл Пуанкаре. Этот интеграл известен достаточно давно, но до сих пор не было попыток связать именно его с третьим интегралом.

2. Модели потенциала, в которых подавляющий вклад в динамику определяется ядром Галактики, не способны объяснить распределения скоростей (3). Известно, что такие модели не воспроизводят также и кривую вращения Галактики.

3. Получена зависимость гравитационного потенциала Галактики в окрестности $r=r_0$, приводящая к данным наблюдений (3). Эта зависимость хорошо совпадает с зависимостью поведения потенциала вблизи r_0, полученной из данных по кривой вращения.

4. В предположении равного распределения энергий движения по трем взаимно перпендикулярным направлениям в локальной системе координат, получена зависимость потенциала в направлении, перпендикулярном к плоскости симметрии Галактики $\sim z^{4/3}$. Эта зависимость

удовлетворительно совпадает с оценками, полученными из наблюдений.

Таким образом, на основе рассмотрения динамики Галактики с использованием трех интегралов движения найден потенциал, объясняющий наблюдения по распределению скоростей звезд (3) в окрестности Солнца. Этот потенциал согласуется с потенциалом в окрестности r_0, полученным на основе других астрономических данных. Следовательно, искомым третьим интегралом может явиться интеграл Пуанкаре.

e-mail: amboichenko@mtu-net.ru

THIRD INTEGRAL AND THE DYNAMIC OF THE GALAXY NEAR THE SUN

A.M.BOICHENKO

From data of the observations of star dynamics near the Sun follows that should be third integral of motion in addition to the well-known integrals of energy and angular momentum. The Poincare integral is offered as third integral. The consequences following from this assumption are received and the comparisons of these consequences with the accessible astrophysical data are carried out.

Key words: *Galaxy:kinematics and dynamics:integral Poincare*

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.А.Антонов*, Итоги науки. Астрономия, ВИНИТИ, М., 1968, с.61.
2. *Р.Дж.Тейлер*, Галактики. Строение и эволюция, Мир, М., 1981.
3. *В.А.Антонов*, Итоги науки и техники. Астрономия, ВИНИТИ, М., 1985, с.4.
4. *У.Саслау*, Гравитационная физика звездных и галактических систем, Мир, М., 1989.
5. *Т.А.Агекян*, Астрон. ж., 71, 510, 1994.
6. *Т.А.Агекян*, *И.И.Никифоров*, *В.В.Орлов*, *Н.П.Питьев*, Астрон. ж., 71, 670, 1994.
7. *Л.П.Осипков*, Вестник Санкт-Петербургского университета, сер.1, в.3, 115, 1997.
8. *А.Р.Кинг*, Введение в классическую звездную динамику, УРСС, М., 2002.
9. *А.Пуанкаре*, Новые методы небесной механики. Избранные труды, т.1, Наука, М., 1971.