УДК: 524.7-846

УСТОЙЧИВОСТЬ ГАЛАКТИЧЕСКОГО ДИСКА С ЗАКОНОМ ВРАЩЕНИЯ, ЗАДАННЫМ ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

В.А.АНТОНОВ, А.С.БАРАНОВ

Поступила 15 июля 2003

Принята к печати 10 ноября 2003

Изучена устойчивость галактического диска, находящегося в поле тяготения массивного тела. Учтено взаимное трение газовой и пылевой составляющих. Найлены критерии динамической и вековой неустойчивости. Получены асимптотические выражения инкрементов для случая малой плотности пыли. Обсуждено космогоническое значение результатов.

1. *Введение.* Многочисленный класс астрономических объектов содержит вращающийся диск как часть более массивной системы [1]. Среди них - спиральные галактики, кольца больших планет, протопланетные диски, аккреционные диски вокруг звезд и т.д. Особенностью таких плоских систем является появление локальных неустойчивостей за счет их самогравитации. Эти неустойчивости родственны неустойчивости Джинса и многократно изучались, начиная с работ А.Томре и В.С.Сафронова [2-4].

Некоторое время назад появилась весьма подробная статья [5], в которой имеются также многочисленные ссылки на аналогичные исследования. Правда, в указанной статье налицо некоторые несогласованности: исходное стационарное распределение скоростей предполагается изотропным, чего, как известно [6], в дифференциально вращающейся системе быть не может, а релаксационное соотношение выписано без учета переменной скорости центроида. Впрочем, как мы еще будем обсуждать в дальнейшем, для качественных выводов это не столь существенно.

В указанных и большинстве других работ предполагается, что диск представляет собой однородную среду, точнее, состоит из однотипных частиц. Однако интерес представляют и системы неоднородного состава. Такие системы тоже изучались (см., например, [7]), и в общих чертах результат состоит в том, что при резком различии дисперсий скоростей ведущую роль играет какая-нибудь одна составляющая с наиболее резко выраженной неустойчивостью. Это, однако, относится к моделям без диссипации. При наличии взаимного трения физически различных составляющих друг от друга, появляются, как мы покажем в статье, качественно новые эффекты. Сама пыль тоже может быть разнородной,

но учет этого приводит к значительному усложнению формул, на данной стадии изучения пока не оправданному.

Ограничимся анализом двухкомпонентной системы. Такими компонентами могут быть газ и пыль. Под "пылью" мы подразумеваем вообще совокупность твердых тел, массы которых могут иметь промежуточные значения между массами собственно пылинок и звезд. Возможное присутствие таких тел часто обсуждается в связи с проблемой скрытой массы. В состоянии термодинамического равновесия для обоих компонентов типично резкое различие средних пекулярных скоростей. Мы ограничиваемся крайним случаем, когда пыль не обладает разбросом скоростей и рассматривается как "холодный" газ. Точнее, это означает пригодность нашего приближения для масштабов длин, существенно превышающих эпициклический радиус частиц пыли. Столкновения частиц при этом выпадают из поля зрения, однако надо учитывать взаимное трение пылевой и газовой составляющих. Учитываем и давление в газе, которое, как будет видно из дальнейшего, играет важную роль. Наконец, все время считаем, что длина возмущения существенно меньше размеров системы в целом. Крупномасштабные же возмущения потребовали бы совершенно иного подхода.

Колебания и устойчивость двухкомпонентных гравитирующих плоских систем изучались уже довольно давно: одной из первых была работа [8]. В этой работе обе подсистемы предполагались звездными, но некоторые установленные положения имеют общий характер. Наложение двух газовых подсистем (или, как у нас, газа и пыли) изучалось аналогичным образом [9]. Наша постановка задачи отличается учетом взаимного трения компонентов; выводы об устойчивости при этом меняются не только количественно, но и качественно.

2. Основные предпосылки и обозначения. Введем следующие обозначения. Пусть $U(r, z)$ - гравитационный потенциал основной системы (r, θ и z - цилиндрические координаты). Если этой системой является точечная масса (компактная галактика, звезда или центральная планета), то

$$U = \frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (1)$$

где G - гравитационная постоянная, M - масса центрального тела. В случае галактик встречаются более общие формы $U(r, z)$.

Этот потенциал (1) мы считаем неизменным во времени. Он определяет закон дифференциального вращения диска

$$\Omega^2 r = - \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{z=0}, \quad (2)$$

где $\Omega(r)$ - угловая скорость вращения на расстоянии r в плоскости $z=0$.

В (2) мы пренебрегаем самогравитацией диска из-за его малой массы.

Наоборот, для коротковолновых возмущений самогравитация существенна.

Далее, пусть ρ_g и ρ - объемные плотности газа и пыли. Аналогично эти подстрочные индексы применяем для других гидродинамических параметров. К ним относятся радиальная скорость v_r и трансверсальная v_θ . Используем также поверхностные плотности μ . Давление в газе обозначаем обычным символом p . В пылевой составляющей оно, как было объяснено выше, игнорируется. В приближении тонкого диска не может быть существенной зависимости поля скоростей от z , соответствующие производные мы просто опускаем.

Несколько иное положение возникает с зависимостью плотности газа от z . В тонком диске очень быстро устанавливается равновесие в каждом вертикальном столбце. Обычное рассмотрение приводит к барометрической формуле

$$\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3)$$

Мы ограничиваемся изотермическим уравнением состояния газа

$$p = \sigma_T^2 \rho_g, \quad (4)$$

где σ_T^2 - некоторая средняя тепловая скорость молекул. Для качественного рассмотрения этого достаточно, тем более, что мы будем иметь дело с медленными возмущениями, в процессе которых поддержание постоянной температуры вполне правдоподобно, то есть мы предполагаем достаточно быстрое высвечивание тепловой энергии, высвобождающейся за счет взаимного трения компонентов. Кроме того, мы имеем дело только с малыми z , поэтому допустимо пользоваться разложением [6]

$$U(r, z) \approx U_0(r) - \frac{C(r)}{2} z^2, \quad (5)$$

где $U_0(r)$ - основной потенциал, фигурирующий в формуле (2), а второй член правой части (5) ответственен за удержание газа вблизи плоскости $z=0$. В частном случае одного центрального тела из (1) следует $C = \Omega^2$.

Из формул (3), (4) и (5) легко получается

$$\rho_g = \frac{\mu_g}{\sigma_T} \sqrt{\frac{C}{2\pi}} e^{-Cz^2/2\sigma_T^2}. \quad (6)$$

Отметим, что медленные возмущения могут только слабо зависеть от θ или вообще не зависеть: существенная асимметрия уничтожалась бы дифференциальным вращением. Поэтому предполагаем ротационную симметрию и получаем гидродинамические уравнения в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{r_g}}{\partial t} + v_{r_g} \frac{\partial v_{r_g}}{\partial r} &= \frac{\partial U_0}{\partial r} + F - \frac{\sigma_T^2}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial r} + f_{r_g} + \frac{v_{\theta_g}^2}{r}, \\ \frac{\partial v_{\theta_g}}{\partial t} + v_{\theta_g} \frac{\partial v_{\theta_g}}{\partial r} &= f_{\theta_g} - \frac{v_{\theta_g} v_{r_g}}{r} \end{aligned} \quad (7)$$

для газа и совершенно аналогичные уравнения для пыли с изменением подстрочного индекса "g" и "*". При этом через F мы обозначили гравитационное ускорение, возникающее от перераспределения гравитирующих масс в диске, а символ f относится к ускорению, обусловленному трением. В векторной форме "вязкое" ускорение пыли для малых возмущений дается формулой

$$\vec{f}_* = \beta \rho_g (\vec{v}_g - \vec{v}_*), \quad (8)$$

где β - некоторый положительный коэффициент.

Перейдем к двумерной задаче, осреднив гидродинамические уравнения по массе всех частиц данного рода в вертикальном столбике. Для пылевой составляющей учитываем, что ввиду малости толщины слоя в (8) ρ_g берется практически при $z=0$ (то есть мы учитываем неизбежное оседание пыли к срединной плоскости), и получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{r_*}}{\partial t} + v_{r_*} \frac{\partial v_{r_*}}{\partial r} &= \frac{\partial U_0}{\partial r} + F + \frac{v_{\theta_*}^2}{r} + \gamma (v_{r_g} - v_{r_*}) \mu_g, \\ \frac{\partial v_{\theta_*}}{\partial t} + v_{r_*} \frac{\partial v_{\theta_*}}{\partial r} &= -\frac{v_{\theta_*} v_{r_*}}{r} + \gamma (v_{\theta_g} - v_{\theta_*}) \mu_g, \end{aligned} \quad (9)$$

где, в силу (6),

$$\gamma = \frac{\beta}{\sigma_T} \sqrt{\frac{C}{2\pi}}. \quad (10)$$

Для газа аналогичное усреднение приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{r_g}}{\partial t} + v_{r_g} \frac{\partial v_{r_g}}{\partial r} &= \frac{\partial U_0}{\partial r} + F + \frac{v_{\theta_g}^2}{r} - \frac{\sigma_T^2}{\mu_g} + \gamma (v_{r_*} - v_{r_g}) \mu_*, \\ \frac{\partial v_{\theta_g}}{\partial t} + v_{r_g} \frac{\partial v_{\theta_g}}{\partial r} &= -\frac{v_{\theta_g} v_{r_g}}{r} + \gamma (v_{\theta_*} - v_{\theta_g}) \mu_*, \end{aligned} \quad (11)$$

причем вид вязких членов однозначно определяется локальным законом действия и противодействия. Предполагая $\sigma_T = \text{const}$, мы ограничиваемся случаем, когда успевает устанавливаться тепловое равновесие. Для быстрых колебаний могут возникнуть дополнительные эффекты за счет переноса тепла [10].

3. *Дисперсионное уравнение.* Для вывода дисперсионного уравнения используется стандартная процедура линеаризации. При этом величины v_r и F сами по себе малы, а к v_θ и μ добавляются малые возмущения, отмечаемые символом δ . Главная же часть v_θ для обеих составляющих совпадает с Ωr . Используем традиционный анализ Фурье и берем возмущения плотности в комплексной форме, пропорциональные $\exp(ikr)$. Тогда в коротковолновом приближении, как известно,

$$F = 2\pi i G (\delta\mu_* + \delta\mu_g). \quad (12)$$

Сами возмущения плотности связаны с полем скоростей уравнениями

неразрывности

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu_g v_{rg}) = 0, \quad \frac{\partial \mu_0}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu_0 v_r) = 0. \quad (13)$$

Действуя в рамках того же коротковолнового приближения, мы оставляем в линеаризованных уравнениях члены с производными от возмущения по r , пренебрегая производными от медленно меняющихся основных параметров системы. Кроме того, все возмущения пропорциональны $\exp(i\omega t)$. При всех этих предположениях получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} i\omega v_r &= 2\pi iG(\delta\mu_0 + \delta\mu_g) + 2\Omega\delta v_{0r} + \gamma(v_{rg} - v_r)\mu_g, \\ i\omega\delta v_{0r} &= \gamma(\delta v_{0g} - \delta v_{0r})\mu_g - \frac{\Omega_1^2}{2\Omega} v_r, \\ i\omega v_{rg} &= 2\pi iG(\delta\mu_0 + \delta\mu_g) + 2\Omega\delta v_{0g} + \gamma(v_r - v_{rg})\mu_0 - \frac{ik\sigma_T^2}{\mu_g} \delta\mu_g, \\ i\omega\delta v_{0g} &= \gamma(\delta v_{0r} - \delta v_{0g})\mu_0 - \frac{\Omega_1^2}{2\Omega} v_{rg}, \\ i\omega\delta\mu_0 + ik\mu_0 v_r &= i\omega\delta\mu_g + ik\mu_g v_{rg} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где для удобства введена эпициклическая частота

$$\Omega_1 = \sqrt{2\Omega \left(r \frac{d\Omega}{dr} + 2\Omega \right)}. \quad (15)$$

Напомним, что для потенциала, создаваемого центральным телом (планетой или звездой), $\Omega_1 = \Omega$, но для галактик это равенство, вообще говоря, несправедливо.

Анализ соответствующего системе (14) дисперсионного уравнения начнем со случая, когда $\sigma_T \rightarrow \infty$. (Точнее, мы предполагаем одновременно $\sigma_T \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow \infty$, чтобы величина γ в (10) не исчезала). Физически это означает, что газовая подсистема входит в состав жесткого упора, но оказывает сопротивление движению частиц пыли. Тогда из третьего уравнения (14) следует: $\delta\mu_g = 0$. Уравнение неразрывности для газа дает: $v_{rg} = 0$. Из четвертого уравнения (14) следует также, что $\delta v_{0g} = \gamma\mu_0\delta v_{0r}/(\gamma\mu_0 + i\omega)$. Из оставшихся уравнений получаем:

$$\lambda \left(1 + \frac{\gamma\mu_g}{\lambda + \gamma\mu_0} \right) \left(\lambda + \gamma\mu_g - \frac{2\pi kG\mu_0}{\lambda} \right) + \Omega_1^2 = 0, \quad (16)$$

где $\lambda = i\omega$. При $\gamma = 0$, как и следовало ожидать, уравнение (16) совпадает с вышеупомянутым частным случаем, данным в [9].

Легко доказывается, что при условии

$$2\pi kG(\mu_0 + \mu_g) > \Omega_1^2 \quad (17)$$

один из корней кубического уравнения (16) имеет положительную

вещественную часть, а два других - отрицательную. Действительно, это ясно при больших μ_* , так как тогда получается инкремент джинсовской неустойчивости $\lambda_{1,2} \approx \pm \sqrt{2\pi k G \mu_*}$, и третий корень $\lambda_3 \approx -\gamma\mu_*$, а невозможность обращения $\text{Re}\lambda$ в нуль следует из соображений непрерывности: после подстановки $\lambda = i\omega$ (ω - вещественно) в левой части (16) с разделением вещественной и мнимой частей получается противоречие. Таким образом, при выполнении (17) модель неустойчива. Если же неравенство (17) меняет знак на обратный, то соображения непрерывности показывают, что $\text{Re}\lambda < 0$ для всех трех корней и модель устойчива.

Вернемся к общему случаю конечного σ_T . Система (14) формально приводит к дисперсионному уравнению шестой степени, но легко понять, что среди корней должен быть тривиальный $\omega = 0$. Физически это означает вращение обеих составляющих с одинаковой скоростью, когда никакого трения нет. Формальная проверка дает решение

$$\omega = 0, \quad v_{\pi g} = v_{rg} = 0, \quad \delta v_{\theta g} = \delta v_{\theta_*} = \left(-\frac{\pi i G}{\Omega} \right) \delta \mu_*, \quad \delta \mu_g = 0. \quad (18)$$

Согласно общим правилам линейной алгебры [11], уравнения (14) при $\omega = 0$ должны быть зависимы. Это эквивалентно существованию линейного инварианта

$$L = 2ik \Omega (\mu_* \delta v_{\theta_*} + \mu_g \delta v_{\theta g}) - \Omega_1^2 (\delta \mu_* + \delta \mu_g), \quad (19)$$

как легко проверить дифференцированием L по t с учетом (14). Для исключения тривиальности мы должны в дальнейшем ограничиваться значениями параметров, обращающими инвариант (19) в нуль, иначе будут присутствовать физически малоинтересные возмущения (18).

Ясно, что и при конечном σ_T для больших значений плотностей μ система подвержена неустойчивости Джинса. Границу этой неустойчивости можно найти из соображений непрерывности. В критическом случае должно существовать решение с нулевым ω , но не отбрасываемое условием $L=0$. После несложной подстановки (18) в (19) убеждаемся, что зоной неустойчивости Джинса является по-прежнему область, определяемая неравенством (17).

4. Вариационный принцип. Дисперсионное уравнение, отвечающее системе (14), как мы установили, приводит к уравнению пятой степени, сложному для общего анализа даже с точки зрения принципа непрерывности. Строго говоря, предыдущие рассуждения еще не доказывают, что при конечном σ_T и нарушении равенства (17) система будет устойчивой - неустойчивость могла бы появиться за счет перехода значения ω через вещественную ось не обязательно в начале координат. Более простое и вместе с тем строгое доказательство необходимости условия (17) для неустойчивости получается вариационным методом. Составим функцию

S так, что

$$S = \mu_* \left(|v_r|^2 + \frac{4\Omega^2}{\Omega_1^2} |\delta v_{\theta}|^2 \right) + \mu_g \left(|v_{r_g}|^2 + \frac{4\Omega^2}{\Omega_1^2} |\delta v_{\theta_g}|^2 \right) - \frac{2\pi G}{k} |\delta\mu_g + \delta\mu_*|^2 + \frac{\sigma_g^2}{\mu_g} |\delta\mu_g|^2. \quad (20)$$

Дифференцирование функции S по времени с учетом (14) дает после ряда сокращений

$$\frac{dS}{dt} = -2\gamma\mu_g\gamma\mu_* \left[|v_{r_g} - v_r|^2 + \frac{4\Omega^2}{\Omega_1^2} |\delta v_{\theta_g} - \delta v_{\theta}|^2 \right] < 0.$$

Конкретный вид (20) подсказывается соображениями, уже высказывавшимися в литературе [12]: при сохранении момента каждой частицы первые два члена правой части (20) представляли бы сумму полных (кинетическая + гравитационная) энергий отдельных частиц. Остальные же члены (20) учитывают энергию сжатия газа и самогравитацию. Однако в нашем случае эта интерпретация имеет только формальное значение, поскольку не выполнено условие сохранения момента, способного передаваться от пыли к газу и обратно за счет трения. Вообще даже без сохранения момента его приращение не может выражаться квадратичной формой, а только линейной. Достаточно представить, что два тонких материальных кольца одинаковой массы m частично обмениваются между собой удельными моментами, равными J' и J'' . Именно, новые моменты пусть равны соответственно $J' = J' + \varepsilon(J'' - J')$, $J'' = J'' + \varepsilon(J' - J'')$, где ε - малый параметр. Тогда получаем приращение энергии $\Delta E = m\varepsilon(J'' - J')(\Omega' - \Omega'')$, то есть при различии угловых скоростей Ω' и Ω'' получается приращение первого порядка.

Единственным исключением является случай твердотельного вращения. Тогда, действительно, S представляет собой приращение по отношению к вращающейся системе координат. В остальных же случаях S можно трактовать как некоторую локальную псевдоэнергию. Формальный характер ее определения не мешает, однако, делать из убывания S соответствующее заключение чисто математическим образом. Действительно, после исключения тривиальных возмущений условием $L=0$ мы можем использовать неравенство Буняковского в форме

$$\mu_g |\delta v_{\theta_g}|^2 + \mu_* |\delta v_{\theta}|^2 \geq \frac{|\mu_g \delta v_{\theta_g} + \mu_* \delta v_{\theta}|^2}{\mu_g + \mu_*} = \frac{\Omega_1^4 (\delta\mu_g + \delta\mu_*)^2}{4k^2 \Omega^2 (\mu_g + \mu_*)},$$

откуда следует знакоопределенность S как квадратичной формы как раз при условии, обратном (17), а тогда убывание S исключает возможность экспоненциального роста возмущений.

Таким образом, условие (17) необходимо и достаточно для

неустойчивости.

Остановимся еще на зависимости инкремента неустойчивости от диссипативного параметра γ . Мыслимы два случая: либо предел инкремента при $\gamma \rightarrow 0$ конечен, либо равен нулю. Согласно установившейся терминологии, эти случаи называем соответственно динамической и вековой неустойчивостью.

В случае $\gamma = 0$ система (14) легко приводится к системе только для двух неизвестных

$$\begin{aligned} \omega^2 \mu_0 v_r &= -2\pi Gk \mu_0 (\mu_g v_{rg} + \mu_0 v_r) + \Omega_1^2 \mu_0 v_r \\ \omega^2 \mu_g v_{rg} &= -2\pi Gk \mu_g (\mu_g v_{rg} + \mu_0 v_r) + (\Omega_1^2 + k^2 \sigma_T^2) \mu_g v_{rg} \end{aligned} \quad (21)$$

самосопряженного типа. Вещественность ω^2 при этом эквивалентна положительной определенности соответствующей квадратичной формы $\bar{S} = \Omega_1^2 (\mu_g v_{rg}^2 + \mu_0 v_r^2) + k^2 \sigma_T^2 \mu_g v_{rg}^2 - 2\pi Gk (\mu_g v_{rg} + \mu_0 v_r)^2$. Условием устойчивости оказывается положительность определителя

$$(\Omega_1^2 - 2\pi Gk \mu_0)(k^2 \sigma_T^2 + \Omega_1^2) - 2\pi Gk \mu_g \Omega_1^2 > 0. \quad (22)$$

В частности, при невыполнении (17) левая часть (22) положительна с некоторым запасом, так что область динамической неустойчивости, как часто бывает, уже области вековой неустойчивости. В пределе $\gamma \rightarrow 0$ критерий (17) не переходит в критерий динамической неустойчивости в связи с тем, что сама величина инкремента при $\gamma \rightarrow 0$ тоже стремится к нулю.

При малых k , как видно из (22), динамическая устойчивость всегда имеет место, а при больших k она исчезает. Однако соответствующее уравнение является кубическим относительно k , и, как мы подтвердим в следующем разделе, может иметь три положительных корня. Тогда на шкале k , кроме длинноволновой зоны (малое k), возникает остров устойчивости. При переходе от динамической устойчивости к вековой должно происходить некоторое срезание зоны устойчивости и топологически ясно, что остров исчезает.

5. *Случай малой плотности пыли.* Случай малых μ_0 интересен тем, что для инкрементов и частот возмущений можно найти достаточно компактное асимптотическое выражение.

При заданных остальных параметрах следует различать три вида асимптотики ω по μ_0 .

Во-первых, возможны колебания, происходящие почти целиком в газовой составляющей. Тогда из наших уравнений (21) получается известная формула

$$\omega^2 = \Omega_1^2 - 2\pi Gk \mu_g + k^2 \sigma_T^2, \quad (23)$$

и в зависимости от значений параметров получается либо сплошь устойчивый диск, либо неустойчивость для некоторых промежуточных k . Если диссипация отсутствует ($\gamma = 0$), то мы имеем дело только с динамической неустойчивостью, и, естественно, граница такой неустойчивости, определенной формулой (23), совпадает с той, которая получается из неравенства (22) при $\mu_* = 0$. Отдельное обсуждение при этом необходимо только для значений $1/k$, малых вместе с μ_* . Тогда из (22) следует существование, кроме вышеупомянутой зоны промежуточных k , еще коротковолновой зоны неустойчивости, определяемой асимптотически как $k > \Omega_1^2 / 2\pi G \mu_*$. Для ω , кроме тривиальной асимптотики $\omega \approx \pm k \sigma_T$ (звуковые волны), получается еще $\omega \approx \pm \sqrt{\Omega_1^2 - 2\pi G k \mu_*}$, причем радиальные движения преобладают в пылевой составляющей. Между двумя зонами неустойчивости Джинса - в газовой и пылевой составляющих - возникает упоминавшийся остров устойчивости. Правда, он находится уже в области, где применение приближения тонкого диска становится сомнительным, так что последний результат может иметь только качественное значение для движения вокруг единого центрального тела. На периферии же некоторых галактик может быть $\Omega_1 \ll \Omega$ (вблизи неустойчивости Линдблада), тогда наши расчеты приобретают большую убедительность.

При конечном γ остается вопрос о возможности медленной раскачки колебаний в газе за счет малого взаимодействия с пылью. Однако простая проверка на основании той же системы (21) показывает, что колебаниям данного типа отвечает положительное значение псевдоэнергии S , так что неустойчивость на их основе возникнуть не может.

Во-вторых, надо учитывать процессы, возникающие, наоборот, в пылевой составляющей. При этом ω стремится к постоянному пределу, а среди возмущений главную роль играют скорости v_r и v_θ , остальные же малы (относительного порядка μ_*). Существенное значение имеют только два первых уравнения (14), и из них следует:

$$\omega = \pm \Omega_1 + i \gamma \mu_g. \quad (24)$$

В (24) легко увидеть наложение эпициклических колебаний отдельных частиц и эффекта трения пыли о газ.

Наконец, остается найти еще одну, пятую частоту. Она соответствует некоторому смешанному процессу, затрагивающему как пыль, так и газ. В результате проб удастся установить, что совместимая система линейных уравнений, выводимая из (14) при переходе $\mu_* \rightarrow 0$, получается, если постулировать пропорциональность ω и μ_* , а среди возмущений относительно малым считать только v_{r*} . Расчеты приводят тогда к формуле

$$\omega = \frac{i \gamma \mu_* k^2 (\Omega_1^2 - 2\pi G k \mu_g) \sigma_T^2}{(\Omega_1^2 - 2\pi G k \mu_g + k^2 \sigma_T^2) (\Omega_1^2 + \gamma^2 \mu_g^2)}. \quad (25)$$

Эта смешанная мода ввиду малости инкремента представляет интерес только в отсутствии неустойчивости Джинса, то есть при положительности знаменателя (25). Тогда формула (25) показывает вековую неустойчивость в случае $\Omega_1^2 < 2\pi Gk\mu_*$, что при $\mu_* = 0$ совпадает с критерием (17).

6. *Обсуждение результатов.* Мы рассмотрели устойчивость двухкомпонентной модели из смеси газа и пыли. Главный результат состоит в том, что при некоторых условиях даже диск, устойчивый по Джинсу в общепринятом смысле, испытывает вековую неустойчивость. Понятие вековой неустойчивости тоже идет от Джинса [13] и ранее от Томсона и Тэта, но в [13], как позднее в [14], оно прилагается к эллипсоидальным фигурам равновесия. У нас вековая неустойчивость срабатывает в квазиоднородном диске, но ее объяснение остается прежним. Конкретно, критерий вековой неустойчивости получается из такого для динамической неустойчивости отбрасыванием тепловой скорости молекул. Поэтому область вековой неустойчивости на шкале волновых чисел k , во-первых, шире, во-вторых, проще определяется. Формально она у нас простирается до $k = \infty$. Из формулы (25) даже виден рост инкремента вековой неустойчивости для больших k . Кстати, точно такой же рост инкремента вековой неустойчивости отмечен в работе [5], несмотря на использование другой модели и неточности со столкновительным членом, указанные нами в вводном разделе. Очевидно, налицо общая причина: в специфических условиях диска гравитация выступает как короткодействующая сила (в отличие, например, от классической теории фигур равновесия [14]). Поэтому и зона динамической неустойчивости всегда располагается в области достаточно больших k для характерных длин волн, лишь немного больших толщины диска. Для планетных колец это означает масштабы длин порядка километра. Вековая неустойчивость простирается до несколько больших длин, но из-за вышеуказанной зависимости инкремента от k предпочтение все равно имеют возмущения с наименьшими возможными длинами волн, точнее, с такими, когда гидродинамическая трактовка становится уже недостаточной, и для описания динамики пыли необходимы уже кинетические уравнения. Это опять-таки происходит для длин волн порядка эпициклического радиуса, который не может сильно отличаться от толщины пылевого диска.

Конкретную оценку инкремента вековой неустойчивости можно в разных приложениях получить хотя бы из (25). Так как величина $1/(\gamma_*)$ имеет смысл времени затухания T движения отдельной частицы в диске (см. (8) и (10)), то обычно по порядку величины формула (25) дает

$$|\alpha| \sim T^{-1} \cdot \left(\frac{k \sigma_T}{\Omega_1} \right)^2,$$

то есть рост возмущений происходит за время, близкое к T . Во всяком случае, во многих реальных приложениях этого достаточно, чтобы считать систему неустойчивой в физическом смысле.

Несмотря на резкое различие инкрементов, динамическая и вековая неустойчивости остаются сходными по своему первоисточнику, которым является выигрыш гравитационной энергии при расслоении диска на узкие кольца. Поэтому вполне естественно и затухание неустойчивостей на длинных волнах.

Все сказанное относится только к линейной стадии развития возмущений. С ростом амплитуды уравнения становятся существенно нелинейными, но общий тезис о гравитационной энергии как стимуле неустойчивости сохраняет силу. Во всяком случае, результатом должно быть обособление узких колечек друг от друга как "материальных" образований. Такие кольцевые образования не могут, однако, поддерживаться длительное время собственной гравитацией: неустойчивость кольцевых фигур галактик хорошо известна [4]. Но в отличие от неустойчивости, порождающей сами кольца, их разрушение связывается уже с несимметричными возмущениями. Результатом должно быть перемешивание участков с большой и малой плотностью, что восстанавливает почти однородное состояние. Может даже показаться, что при этом получается подобие вечного двигателя. На самом деле, конечно, механическая энергия необратимо теряется, но в локальном смысле. Система в целом должна эволюционировать к состоянию с меньшей энергией при том же общем моменте вращения. Практически это означает квазидиффузию вещества, которая при более или менее гладком распределении плотности не ощущается в рамках локального анализа, но постепенно при повторении процессов неустойчивости и перемешивания ведет к глобальным последствиям. В принципе, конечным результатом должно быть падение основной массы вещества на центр с рассеянием на бесконечности той небольшой массы, которая обеспечивает сохранение момента. Другой, разумеется, вопрос, успевает ли такая эволюция произойти за время существования системы конкретного вида и не перебивается ли она процессами иной природы, например, образованием зародышей спутников.

Кроме того, разделение процесса на симметричную стадию кольцеобразных структур и асимметричную стадию их разрушения, возможно, несколько идеализирует ситуацию. В какой-то степени асимметризация и неустойчивость Джинса могут накладываться друг на друга во времени: некоторые указания на это имеются в известных работах [15,16].

STABILITY OF A GALACTIC DISK WITH THE LAW OF ROTATION DEFINED BY THE EXTERNAL FIELD

V.A.ANTONOV, A.S.BARANOV

The stability of the galactic disk, which is in the force field of a massive body has been studied. The mutual friction of the gaseous and dust components has been taken into account. Criteria of both dynamical and secular instability have been found. Asymptotic expressions of increments for the case of the small density of dust have been obtained. The cosmogonical significance of the results has been discussed.

Key words: galactic disk:dynamical and secular instability:gaseous and dust components

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С.Баранов, Астрон. ж., 68, 1160, 1991.
2. А.Томре, Astrophys. J., 139, 1217, 1964.
3. В.С.Сафронов, Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет, Наука, М., 1969.
4. В.Л.Поляченко, А.М.Фридман, Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, Наука, М., 1976.
5. E.Griv, Tz.Chiuuech, Astron. Astrophys., 311, 1033, 1996.
6. К.Ф.Огородников, Динамика звездных систем, Физматгиз, М., 1958.
7. B.G.Elmegeen, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 275, 944, 1995.
8. Л.С.Марочник, А.А.Сучков, Бюлл. Ин-та астрофизики Таджикской ССР, 58, 3, 1971.
9. C.J.Jog, P.M.Solomon, Astrophys. J., 276, 114, 1984.
10. Н.Н.Горьковский, А.М.Фридман, Физика планетных колец, Наука, М., 1994.
11. А.Н.Мальцев, Алгебраические системы, Наука, М., 1970.
12. Б.Линдبلاد, Динамика Галактики, в сб.: "Строение звездных систем" (ред. П.Н.Холопов), ИИЛ, М., 1962.
13. J.H.Jeans, Astronomy and Cosmogony, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1929.
14. С.Чандрасекар, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
15. P.Goldreich, D.Linden-Bell, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 130, 97, 1965.
16. P.Goldreich, D.Linden-Bell, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 130, 125, 1965.