АСТРОФИЗИКА

ТОМ 47 ФЕВРАЛЬ, 2004 ВЫПУСК 1

УДК: 52-64

ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ. I

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 4 августа 2003

Данная серия работ посвящена задачам многократного рассеяния света в плоскопараллельной неоднородной атмосфере. Предлагаемый в ней подход основывается на методе сложения слоев Амбарцумяна. Основная цель - показать, что при решении различных, в том числе стандартных, задач теории переноса излучения можно избежать трудностей, возникающих при рассмотрении задач с условиями, заданными на границах среды, путем сведения их к задачам с начальными условиями. В настоящей работе для иллюстрации обсуждается простейшая одномерная задача о диффузном отражении и пропускании для неоднородной атмосферы конечной оптической толщины. Суть применяемого при этом подхода заключается в том, что сначала определяются коэффициенты отражения и пропускания атмосферы, которые, как известно, являются решением задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений. Показывается, в частности, что введением вспомогательных функций P и S становится возможным заменить указанную систему системой линейных уравнений. После определения отражательной и пропускательной способностей атмосферы поле излучения в ней находится непосредственно без решения каких-либо новых уравнений. Отметим, что такой подход позволяет получить искомые интенсивности одновременно для семейства атмосфер различной оптической толщины. Подробно рассматриваются два частных примера функциональной зависимости коэффициента рассеяния λ от оптической глубины, для которых решения соответствующих уравнений выражаются через элементарные функции. Приводятся результаты численных расчетов. Дается их физическое истолкование, демонстрирующее специфику переноса излучения в неоднородных атмосферах.

1. *Введение.* Обычно при интерпретации излучения тех или иных космических объектов приходится прибегать к различным упрощающим предположениям относительно их геометрии и физических свойств. Например, часто предполагается, что излучающая среда однородна и стационарна, между тем, как заведомо известно, что она обладает достаточно сложной структурой и подвержена временным изменениям. Предполагается, что решение указанных модельных задач позволяет, отвлекаясь от деталей, находить в первом приближении некоторые, возможно, наиболее существенные, характеристики исследуемых объектов. Однако появление высокоточной измерительной аппаратуры, позволяющей получить данные с большим пространственным и спектральным разрешением, дает возможность исследовать изученные ранее объекты более подробно. Ярким примером такого типа объектов могут служить солнечные протуберанцы. Внеатмосферные наблюдения в рамках программы SOHO дают богатый материал для детального изучения неоднородной структуры этих объектов и определения характеристик пространственных и временных

изменений их поверхностной яркости в линиях и непрерывном спектре. Новые наблюдательные данные настоятельно диктуют необходимость в развитии соответствующих разделов теории переноса излучения и разработке гибких вычислительных схем. Именно в этом заключается конкретная мотивация данной работы.

В наших предыдущих работах [1-4] основное внимание уделялось эффекту физических неоднородностей, связанному с распределением внутренних источников энергии, и геометрическим факторам. При рассмотрении многократного рассеяния в частотах линии коэффициент рассеяния (или, как принято часто называть, вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния) λ принимался постоянным внутри излучающего объема. Однако, очевидно, что при интерпретации излучения в оптически толстых линиях такое предположение может оказаться грубым.

В данной серии работ мы рассмотрим перенос излучения в плоско-параллельной атмосфере в предположении, что все величины, определяющие элементарный акт рассеяния и распределение первичных источников энергии, могут меняться в атмосфере произвольным образом. Предлагаемый нами подход основывается на методе сложения слоев в том виде, в котором был сформулирован Амбарцумяном (см. [5-7]).

2. *Метод сложения слоев для неоднородной атмосферы.* Наше исследование мы начнем с воспроизведения известных соотношений, полученных Амбарцумяном в работе [5] для однородных сред. Если однородная рассеивающая и поглощающая атмосфера с оптической толщиной τ_0 разделена на две части, каждая из которых имеет толщину соответственно τ_1 и τ_2 (см. рис.1), то для коэффициентов пропускания q и отражения r этих сред имеют место соотношения, называемые законами сложения указанных величин

$$q(\tau_1+\tau_2)=\frac{q(\tau_1)q(\tau_2)}{1-r(\tau_1)r(\tau_2)}, \tag{1}$$

$$r(\tau_1+\tau_2)=r(\tau_2)+\frac{r(\tau_1)q^2(\tau_2)}{1-r(\tau_1)r(\tau_2)}. \tag{2}$$

Заметим, что величины q и r обладают вероятностным смыслом и могут быть истолкованы, соответственно, как вероятность прохождения и отражения фотона, падающего на среду.

Если заменить τ_2 бесконечно малой величиной Δ и учесть, что

$$q(\Delta)=1-\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\Delta, \quad r(\Delta)=\frac{\lambda}{2}\Delta, \tag{3}$$

то, переходя к пределу при $\Delta\to 0$, находим

$$\frac{dq}{d\tau_0}=-\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)q(\tau_0)+\frac{\lambda}{2}q(\tau_0)r(\tau_0), \tag{4}$$

$$\frac{dr}{d\tau_0} = \frac{\lambda}{2} - (2-\lambda) r(\tau_0) + \frac{\lambda}{2} r^2(\tau_0). \tag{5}$$

Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений удовлетворяет начальным условиям $q(0)=1$, $r(0)=0$.

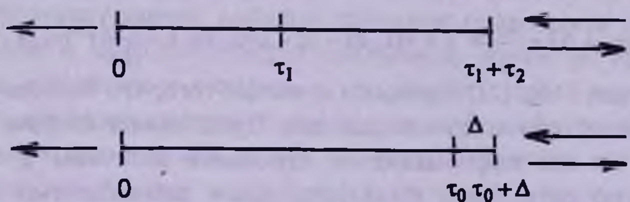

Рис.1. Перенос излучения в атмосфере, состоящей из двух компонентов.

Рассмотрим теперь неоднородную атмосферу и покажем, что уравнения (4) и (5) остаются в силе и в случае, когда величина λ меняется с глубиной. Очевидно, что оптические свойства неоднородной атмосферы зависят от направления падающего на нее излучения, поэтому можно предположить, что они будут описываться уже не двумя, а четырьмя параметрами. Для коэффициентов пропускания и отражения атмосферы, освещаемой справа на рис.1, мы сохраним прежние обозначения q и r. В то же время введем новые обозначения $\bar{q}$ и $\bar{r}$ для аналогичных величин, если освещается противоположная граница среды.

Обращаясь вновь к составной атмосфере, схематически изображенной на рис.1, на основе простых вероятностных соображений можно написать*

$$q(\tau_1+\tau_2) = q(\tau_1) q(\tau_2)\left[1 + r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2) + r^2(\tau_1)\bar{r}^2(\tau_2) + \ldots\right], \tag{6}$$

$$r(\tau_1+\tau_2) = r(\tau_2) + q(\tau_2)\bar{q}(\tau_2) r(\tau_1)\left[1 + r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2) + r^2(\tau_1)\bar{r}^2(\tau_2) + \ldots\right]. \tag{7}$$

Появление бесконечных сумм обусловлено взаимными отражениями фотона от двух составляющих среды. Производя суммирование в приведенных соотношениях, находим

$$q(\tau_1+\tau_2) = \frac{q(\tau_1) q(\tau_2)}{1 - r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)}, \tag{8}$$

$$r(\tau_1+\tau_2) = r(\tau_2) + \frac{q(\tau_2) r(\tau_1)\bar{q}(\tau_1)}{1 - r(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)}, \tag{9}$$

причем $q(0)=1$, $r(0)=0$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным при рассмотрении

---

* *Следует отметить, что при заданной функциональной зависимости $\lambda(\tau)$ величины r; $\bar{r}$ и q, описывающие отражательную и пропускательную способности слоя τ_2 отличаются от аналогичных величин для слоя τ_1 не только оптической толщиной, но и промежутком изменения функции $\lambda(\tau)$. Тем не менее, для краткости мы пользуемся одинаковыми обозначениями, что не должно привести к недоразумениям, поскольку в данной серии работ слой τ_2, как правило, заменяется бесконечно тонким слоем с известными оптическими свойствами.*

однородной атмосферы. Полагая $\tau_1 = \tau_0$ и заменяя τ_2 бесконечно тонким слоем Δ, для которой $\lambda = \lambda(\tau_0)$, имеем

$$q(\tau_0+\Delta) = q(\tau_0)\left[1-\left(1-\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\right)\Delta\right] + \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\Delta\, q(\tau_0) r(\tau_0), \tag{10}$$

$$r(\tau_0+\Delta) = \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\Delta + r(\tau_0)[1-(2-\lambda(\tau_0))\Delta] + \frac{\lambda(\tau_0)}{2} r^2(\tau_0)\Delta. \tag{11}$$

Соотношения (10), (11) написаны с учетом того, что бесконечно тонкий слой Δ может считаться однородным. Представляет интерес то обстоятельство, что вся информация об изменении величины λ с глубиной задается, по сути дела, функциональной зависимостью $\lambda(\tau_0)$. Это является характерной особенностью применяемого подхода. Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, приходим к уравнениям, аналогичным (4) и (5) и получаемым из последних простой заменой λ на $\lambda(\tau_0)$:

$$\frac{dq}{d\tau_0} = -\left[1-\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\right] q(\tau_0) + \frac{\lambda(\tau_0)}{2} q(\tau_0) r(\tau_0), \tag{12}$$

$$\frac{dr}{d\tau_0} = \frac{\lambda(\tau_0)}{2} - [2-\lambda(\tau_0)] r(\tau_0) + \frac{\lambda(\tau_0)}{2} r^2(\tau_0), \tag{13}$$

при условии $q(0)=1$, $r(0)=0$.

3. *Функции P и S.* Покажем, что решение нелинейной системы уравнений (12), (13) может быть сведено к решению линейной системы уравнений. Для этого, следуя работе [8], введем в рассмотрение функции $P(\tau_0)$ и $S(\tau_0)$, выражающиеся через коэффициенты пропускания и отражения посредством следующих простых соотношений

$$P(\tau_0) = \frac{1}{q(\tau_0)}, \quad S(\tau_0) = \frac{r(\tau_0)}{q(\tau_0)}. \tag{14}$$

Делением обеих частей уравнения (12) на q^2 приходим непосредственно к первому из искомых уравнений

$$\frac{dP}{d\tau_0} = \left[1-\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\right] P(\tau_0) - \frac{\lambda(\tau_0)}{2} S(\tau_0). \tag{15}$$

Далее, с помощью полученного уравнения имеем

$$\frac{dr}{d\tau_0} = \frac{d}{d\tau_0}\left(\frac{S}{P}\right) = \frac{1}{P(\tau_0)}\frac{dS}{d\tau_0} - [2-\lambda(\tau_0)]\frac{S(\tau_0)}{P(\tau_0)} + \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\left(\frac{S(\tau_0)}{P(\tau_0)}\right)^2. \tag{16}$$

С другой стороны, уравнение (13) может быть переписано через функции P и S в виде

$$\frac{dr}{d\tau_0} = \frac{\lambda(\tau_0)}{2} - [2-\lambda(\tau_0)]\frac{S(\tau_0)}{P(\tau_0)} + \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\left(\frac{S(\tau_0)}{P(\tau_0)}\right)^2. \tag{17}$$

Сопоставляя уравнения (16) и (17), окончательно находим

$$\frac{dS}{d\tau_0} = \frac{\lambda(\tau_0)}{2} P(\tau_0) - \left[1 - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\right] S(\tau_0). \tag{18}$$

Уравнения (15) и (18) представляют собой искомую систему линейных дифференциальных уравнений, связанных начальными условиями $P(0) = 1$, $S(0) = 0$. Решение данной системы позволяет определить не только отражательную и пропускательную способности семейства атмосфер с различными оптическими толщинами, но и найти, как будет показано ниже, поле излучения внутри указанных атмосфер. Другими словами, полное решение одномерной задачи переноса излучения для атмосфер разных оптических толщин, не содержащих источников энергии, сводится к определению функций $P(\tau_0)$ и $S(\tau_0)$ из системы уравнений (15), (18). Последняя может быть представлена в более компактной векторно-матричной форме

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\tau_0} = \mathbf{A}(\tau_0)\mathbf{Y}(\tau_0), \tag{19}$$

где

$$\mathbf{Y}(\tau_0) = \begin{pmatrix} P(\tau_0) \\ S(\tau_0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(\tau_0) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda(\tau_0)}{2} & -\frac{\lambda(\tau_0)}{2} \\ \frac{\lambda(\tau_0)}{2} & -\left(1 - \frac{\lambda(\tau_0)}{2}\right) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

причем $\mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Существуют различные схемы для численного решения задачи с начальными условиями для систем линейных дифференциальных уравнений (см., например, [8-10]). В некоторых частных случаях система уравнений (15), (18) допускает аналитические решения, выражающиеся через элементарные и специальные функции (см. раздел 5). Эти результаты приобретают особую важность при рассмотрении стохастических задач переноса, когда величина λ подвергается случайным изменениям.

При $\lambda = \text{const}$ решение задачи записывается в виде матричной экспоненты. С учетом того, что $\mathbf{A}^2 = [1 - \lambda(\tau_0)]\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ - единичная матрица), находим

$$P(\tau_0) = \frac{1}{4k}\left[(1+k)^2 e^{k\tau_0} - (1-k)^2 e^{-k\tau_0}\right], \quad S(\tau_0) = \frac{1-k^2}{2k}\,\mathrm{sh}(k\tau_0), \tag{21}$$

где $k = \sqrt{1-\lambda}$. Легко проверить, что полученные формулы приводят к известным выражениям для коэффициентов отражения и пропускания однородной атмосферы (см. [7]).

В заключение настоящего раздела отметим, что при допущении о дифференцируемости $\lambda(\tau_0)$ для каждой из функций $P(\tau_0)$, $S(\tau_0)$ могут быть написаны линейные дифференциальные уравнения второго порядка

$$\frac{d^2P}{d\tau_0^2}-\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{dP}{d\tau_0}-\left(1-\lambda-\frac{\lambda'}{\lambda}\right)P(\tau_0)=0\,, \tag{22}$$

$$\frac{d^2S}{d\tau_0^2}-\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{dS}{d\tau}-\left(1-\lambda+\frac{\lambda'}{\lambda}\right)S(\tau_0)=0\,. \tag{23}$$

Последние получаются из уравнений (15), (18) после ряда несложных преобразований. В качестве начальных условий имеем, соответственно,

$$P(0)=1,\quad P'(0)=1-\frac{\lambda(0)}{2};\quad S(0)=0\,,\quad S'(0)=\frac{\lambda(0)}{2}\,. \tag{24}$$

При некоторых аналитических выкладках может оказаться полезным уравнение для функции $T(\tau_0)=P(\tau_0)+S(\tau_0)$, которое имеет особенно простой вид

$$\frac{d^2T}{d\tau_0^2}-[1-\lambda(\tau_0)]T(\tau_0)=0\,, \tag{25}$$

при начальных условиях $T(0)=1$, $T'(0)=1$.

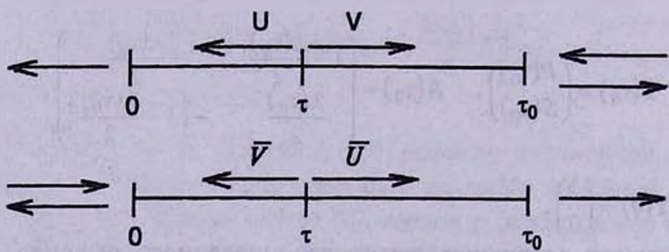

Рис.2. Поле излучения в атмосфере, состоящей из двух компонентов.

4. ***Поле излучения внутри неоднородной атмосферы.*** Пусть имеется одномерная атмосфера оптической толщины τ_0, на границу τ_0 которой падает фотон (см. рис.2). Введем в рассмотрение функции $U(\tau,\tau_0)$ и $V(\tau,\tau_0)$, обозначающие вероятность того, что этот фотон окажется, вообще говоря, после многократного рассеяния, на оптической глубине τ движущимся по направлению к границам 0 и τ_0, соответственно. Нетрудно убедиться, что указанные вероятности полностью определяют поле излучения в атмосфере. Действительно, если на атмосферу падает излучение некоторой заданной интенсивности I_0, то переход от вероятностей к интенсивностям, очевидно, будет совершаться простым перемножением соответствующей вероятности на I_0. Уравнения переноса излучения в терминах функций U и V записываются в виде

$$\frac{dU}{d\tau}=\left[1-\frac{\lambda(\tau)}{2}\right]U(\tau,\tau_0)-\frac{\lambda(\tau)}{2}V(\tau,\tau_0)\,, \tag{26}$$

$$\frac{dV}{d\tau}=\frac{\lambda(\tau)}{2}U(\tau,\tau_0)-\left[1-\frac{\lambda(\tau)}{2}\right]V(\tau,\tau_0)\,, \tag{27}$$

При классическом подходе к решению задачи переноса уравнения (26), (27) решаются при граничных условиях $U(\tau_0, \tau_0) = 1$, $V(0, \tau_0) = 0$. Мы рассмотрим задачу с начальными условиями, выбирая в качестве последних условия на границе τ_0: $U(0, \tau_0) = q(\tau_0)$ и $V(0, \tau_0) = 0$.

Исходя из вероятностного смысла величин U и V, можно написать два простых соотношения

$$V(\tau, \tau_0) = r(\tau)U(\tau, \tau_0), \quad q(\tau_0) = q(\tau)U(\tau, \tau_0). \tag{28}$$

Насколько нам известно, второе из этих соотношений в литературе не приводилось. Между тем из него вытекает ряд далеко идущих следствий. Из уравнений (28), в частности, получаем

$$U(\tau, \tau_0) = \frac{q(\tau_0)}{q(\tau)} = q(\tau_0)P(\tau), \quad V(\tau, \tau_0) = r(\tau)\frac{q(\tau_0)}{q(\tau)} = q(\tau_0)S(\tau). \tag{29}$$

Таким образом, величины $U(\tau, \tau_0)$ и $V(\tau, \tau_0)$, как функции от τ, лишь постоянным множителем $q(\tau_0)$ отличаются от введенных в предыдущем параграфе функций P и S. Мы видим, что поле излучения внутри атмосферы определяется целиком отражательной и пропускательной способностями ее отдельных частей. Другими словами, знание коэффициентов отражения и пропускания для семейства атмосфер с различными оптическими толщинами, но с данным типом неоднородностей позволяет определить интенсивность излучения на произвольной оптической глубине непосредственно, не решая каких-либо новых уравнений. Более того, тот факт, что переменные у величин U и V разделяются, в значительной мере облегчает нахождение указанных интенсивностей, поскольку удается получить нужное решение сразу для семейства атмосфер, имеющих различные оптические толщины. Важно также, что интенсивности, определяющие поле излучения внутри среды, удовлетворяют полученным выше линейным дифференциальным уравнениям второго порядка (22), (23), которые в ряде случаев разрешимы аналитически.

Уравнения (29) позволяют выявить некоторые особенности поля излучения в атмосфере. Так, например, из них следует, что потоки излучения в обоих направлениях на некоторой глубине τ в атмосферах с различной оптической толщиной пропорциональны пропускательным способностям этих атмосфер. С другой стороны, интенсивности излучения на различных глубинах τ внутри данной атмосферы пропорциональны соответствующим непрозрачностям $q(\tau)$.

5. *Свойство полярности.* До сих пор мы предполагали, что излучение извне падает на границу τ_0, как это показано на рис.1 и 2 (верхний рисунок). Рассмотрим теперь случай, когда освещается противоположная граница атмосферы. Рассуждения, аналогичные

проведенным в разделе 2, приводят к следующим дифференциальным уравнениям для коэффициентов пропускания и отражения

$$\frac{d\bar{q}}{d\tau_0}=-\left[1-\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\right]\bar{q}(\tau_0)+\frac{\lambda(\tau_0)}{2}\bar{q}(\tau_0)r(\tau_0), \tag{30}$$

$$\frac{d\bar{r}}{d\tau_0}=\frac{\lambda(\tau_0)}{2}q(\tau_0)\bar{q}(\tau_0), \tag{31}$$

причем $\bar{q}(0)=1$, $\bar{r}(0)=0$. Сравнивая уравнения (12) и (30), мы заключаем, что величины $q(\tau_0)$ и $\bar{q}(\tau_0)$ являются решением одной и той же задачи Коши для линейного дифференциального уравнения. Поэтому имеем $\bar{q}(\tau_0)=q(\tau_0)$, что является выражением свойства обратимости оптических явлений. С другой стороны, в отличие от однородной атмосферы, величины $r(\tau_0)$ и $\bar{r}(\tau_0)$ определяются из различных уравнений (13) и (31). Таким образом, свойство полярности, заключающееся в различии оптических характеристик неоднородной атмосферы в зависимости от направления падающего на нее излучения, в одномерном случае относится лишь к отражательной способности атмосферы. Данный результат, как мы убедимся в дальнейшем, легко обобщается, если рассеяние излучения происходит с перераспределением по частотам или рассматривается трехмерная задача. Выводы, относящиеся к этому последнему случаю, содержатся в монографии Соболева [12]. Заметим также, что свойство полярности неоднородной атмосферы впервые отмечается в работе Прайзендорфера [13], в которой автор полагает, что указанное свойство приводит к удвоению объема вычислений. Однако, как мы убедились, это верно лишь в отношении отражательной способности атмосферы. На основе приведенных соображений можно написать

$$\bar{r}(\tau_0)=\frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}\lambda(t)q^2(t)\,dt. \tag{32}$$

Знание величины $\bar{r}(\tau_0)$ позволяет легко определить поле излучения внутри атмосферы, которая освещается со стороны границы 0. По аналогии с величинами $U(\tau,\tau_0)$ и $V(\tau,\tau_0)$, введем в рассмотрение для этого случая функции $\bar{U}(\tau,\tau_0)$ и $\bar{V}(\tau,\tau_0)$, представляющие собой вероятность того, что падающий на среду фотон в результате многократного рассеяния окажется на глубине τ движущимся соответственно по направлению границ τ_0 и 0. Теперь вместо соотношений (29) будем иметь

$$\bar{U}(\tau,\tau_0)=q(\tau_0)P(\tau_0-\tau),\quad \bar{V}(\tau,\tau_0)=\bar{U}(\tau,\tau_0)\bar{r}(\tau_0-\tau). \tag{33}$$

Таким образом, можно заключить, что после решения системы линейных дифференциальных уравнений (15), (18) для функций $P(\tau_0)$ и $S(\tau_0)$ поле излучения в неоднородной атмосфере находится непосредственно по формулам (29) и (33) в зависимости от того, с какой стороны она освещается. Следует также отметить, что указанным способом строится решение задачи диффузного отражения и пропускания для семейства атмосфер разных оптических толщин.

6. *Два типа атмосфер.* Если явный вид функциональной зависимости λ от τ_0 известен, то система уравнений (15), (18) может быть решена с помощью одной из вычислительных схем, существующих для задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений. Однако в некоторых случаях эта система сводится к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений известных типов, решения которых выражаются через специальные и элементарные функции. Так, например, при $\lambda(\tau_0)=1/(1+\tau_0)$ решение уравнений (22), (23) выражается через функции Макдональда. Особый интерес представляют случаи, допускающие решения в элементарных функциях. Так, при $\lambda(\tau_0)=\exp(-m\tau_0)$ $(m>0)$ решения выражаются через функции Бесселя порядка $(m\pm 2)/m$, которые при $m=4$ дают

$$P(\tau_0)=e^{\tau_0}\cos x-\frac{1}{2}e^{-\tau_0}\sin x,\quad S(\tau_0)=\frac{1}{2}e^{-\tau_0}\sin x\,, \tag{34}$$

где принято обозначение $x=\left(1-e^{-2\tau_0}\right)/2$.

Теперь более подробно рассмотрим два частных примера, когда решения уравнений (22) и (23) находятся особенно просто. Кроме того, эти примеры, на наш взгляд, наглядно иллюстрируют специфику переноса излучения в неоднородной атмосфере.

а) Пусть $\lambda(\tau_0)=1/\left(1+ae^{-\tau_0}\right)$, где a - некоторый положительный параметр. Другими словами, рассмотрим случай, когда величина λ монотонно возрастает с глубиной в атмосфере. Такие атмосферы впредь мы будем называть атмосферами первого типа. Тогда $1-\lambda-(\lambda'/\lambda)=0$, и порядок уравнения (22) может быть понижен на один. Решение полученного однородного уравнения записывается в виде $P'(\tau_0)=P'(0)\lambda(\tau_0)/\lambda(0)$, которое после интегрирования дает

$$P(\tau_0)=P(0)+(1+a)P'(0)\Lambda(\tau_0)\,, \tag{35}$$

где

$$\Lambda(\tau_0)=\int_0^{\tau_0}\lambda(t)\,dt\,. \tag{36}$$

Далее, с помощью уравнений (35) и (15) имеем

$$S(\tau_0)=\left(1+2ae^{-\tau_0}\right)P(\tau_0)-2(1+a)P'(0)\,. \tag{37}$$

Подставляя начальные значения функции $P(\tau_0)$ из (24), с учетом соотношений (14), окончательно получаем

$$q(\tau_0)=\left[1+\left(a+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{e^{\tau_0}+a}{1+a}\right]^{-1}, \tag{38}$$

$$r(\tau_0) = 1 + 2ae^{-\tau_0} - (1 + 2a)q(\tau_0). \tag{39}$$

Рассмотрим несколько предельных случаев. Как нетрудно видеть, при $\tau_0 \to \infty$, $q(\tau_0) \to 0$ и $r(\tau_0) \to 1$. Если $a = 0$, то есть $\lambda = 1$, мы имеем чисто рассеивающую атмосферу, для которой соотношения (38) и (39) приводят к хорошо известным из теории однородных атмосфер формулам: $q(\tau_0) = 2/(2 + \tau_0)$, $r(\tau_0) = 1 - q(\tau_0)$. При $a \to \infty$ в атмосфере преобладает процесс чистого поглощения, и в пределе имеем, как и следовало ожидать, $q(\tau_0) = e^{-\tau_0}$, $r(\tau_0) = 0$. Более подробное представление о поведении коэффициентов отражения в зависимости от оптической толщины можно будет получить на основе результатов численных расчетов, которые обсуждаются ниже.

Последней характеристикой рассматриваемой атмосферы является величина $\bar{r}(\tau_0)$, которая определяется из уравнения (32). Однако, как будет показано ниже, можно предложить другой, более простой способ нахождения этой функции, при котором используются результаты следующей задачи.

b) Допустим теперь, что $\lambda(\tau_0)$ монотонно убывает с увеличением τ_0 по закону $\lambda(\tau_0) = 1/\left(1 + ae^{\tau_0}\right)$, где, как и прежде, a - некоторый положительный параметр. Такую атмосферу мы будем называть атмосферой второго типа, в отличие от рассмотренной в предыдущем примере. Легко видеть, что $1 - \lambda + (\lambda'/\lambda) = 0$, и порядок уравнения (23) может быть понижен. В результате решение записывается в виде

$$S(\tau_0) = S(0) + (1 + a)S'(0)\Lambda(\tau_0). \tag{40}$$

Тогда из уравнения (15) находим

$$P(\tau_0) = \left(1 + 2ae^{\tau_0}\right)S(\tau_0) + 2(1 + a)S'(0). \tag{41}$$

Далее, принимая во внимание начальные условия (24) и соотношения (14), после несложных преобразований получаем

$$q(\tau_0) = \left[1 + \left(ae^{\tau_0} + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{1 + a}{e^{-\tau_0} + a}\right]^{-1}, \tag{42}$$

$$r(\tau_0) = \frac{1 - q(\tau_0)}{1 + 2ae^{\tau_0}}. \tag{43}$$

Мы видим, что, как и в предыдущем примере, $q(\tau_0) \to 0$ при $\tau_0 \to \infty$, в то время как $r(\tau_0) \to 0$. Физический смысл данного факта заключается в том, что с увеличением τ_0 часть атмосферы, на которую падает извне излучение, термализует кванты прежде, чем они достигнут тех слоев, где могут подвергаться рассеянию. Предельные значения величин $q(\tau_0)$ и $r(\tau_0)$ при $a \to 0$ и $a \to \infty$ такие же, как и для атмосфер первого типа.

Полученные результаты позволяют легко определить коэффициент отражения $\bar{r}(\tau_0)$, соответствующий случаю, когда атмосфера освещается со стороны границы 0. Рассмотрим атмосферу первого типа данной оптической толщины τ_0, для которой зависимость λ от оптической глубины τ задается формулой $\lambda(\tau)=1/\left(1+ae^{-\tau}\right)$. Нетрудно видеть, что в результате преобразования $\tau \to \tau_0-\tau$ получаем атмосферу, которая с точки зрения наблюдателя со стороны границы τ_0 характеризуется таким же изменением λ с глубиной, как первоначальная атмосфера для наблюдателя со стороны границы 0. После преобразования зависимость λ от глубины задается формулой $\lambda(\tau)=1/\left(1+\tilde{a}e^{\tau}\right)$, где $\tilde{a}=ae^{-\tau_0}$. Такая атмосфера принадлежит ко второму типу, что позволяет применить полученную выше формулу (43), предварительно производя в ней замену $a \to \tilde{a}=ae^{-\tau_0}$. В итоге получаем

$$\bar{r}(\tau_0)=\frac{1-q(\tau_0)}{1+2a}, \tag{44}$$

где $q(\tau_0)$ задается формулой (38). Легко проверить, что уравнение (32) приводит к тому же результату.

Аналогичным образом для атмосфер второго типа получаем

$$\bar{r}(\tau_0)=1+2a-\left(1+2ae^{\tau_0}\right)q(\tau_0), \tag{45}$$

где $q(\tau_0)$ определяется формулой (42). Заметим, что описанная процедура "обращения" среды может быть также использована при выводе доказанного выше равенства $\bar{q}(\tau_0)=q(\tau_0)$.

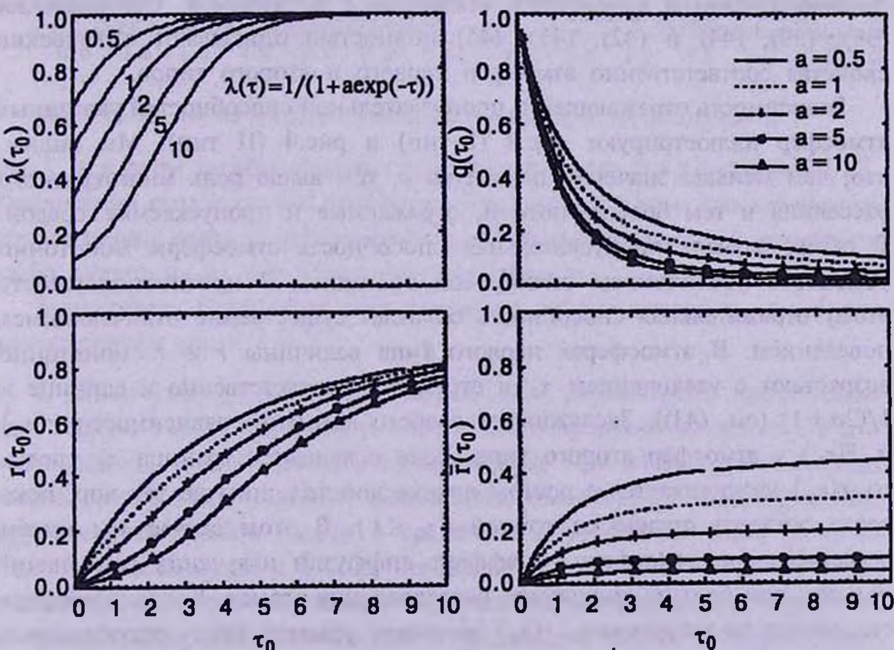

Рис.3. Зависимость коэффициентов отражения и пропускания от оптической толщины и значений параметра a для атмосферы первого типа $(\lambda(\tau_0)=1/(1+ae^{-\tau_0}))$.

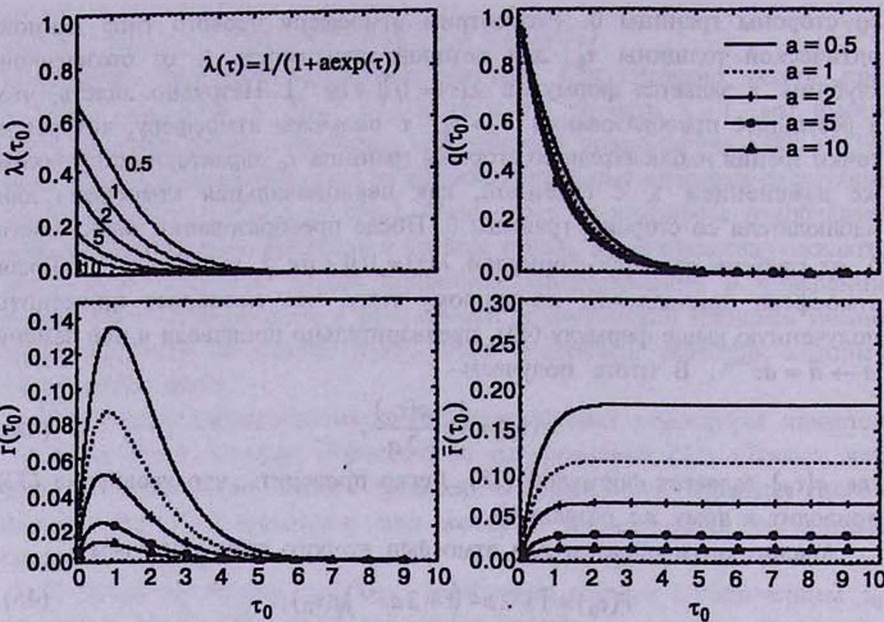

Рис.4. То же, что на рис.3, для атмосферы второго типа ($\lambda(\tau_0)=1/(1+ae^{-\tau_0})$).

Таким образом, мы рассмотрели два типа атмосфер с взаимно противоположным изменением величины λ с глубиной. Соотношения (38), (39), (44) и (42), (43), (45) полностью описывают оптические свойства соответственно атмосфер первого и второго типов.

Зависимость отражающей и пропускательной способностей указанных атмосфер иллюстрируют рис.3 (I тип) и рис.4 (II тип). Мы видим, что, чем меньше значение параметра a, тем выше роль многократного рассеяния и тем больше потоки, отражаемые и пропускаемые средой. В обоих случаях пропускательная способность атмосферы монотонно убывает с увеличением оптической толщины. В противоположность этому отражательная способность обладает существенно отличающимся поведением. В атмосферах первого типа величины r и $\bar{r}$ монотонно возрастают с увеличением τ_0 и стремятся соответственно к единице и $1/(2a+1)$ (см. (43)). Заслуживают особого внимания зависимости $r(\tau_0)$ и $\bar{r}(\tau_0)$ у атмосфер второго типа. Если освещается граница τ_0 среды, то $r(\tau_0)$ увеличивается с ростом оптической толщины до тех пор, пока среда остается оптически тонкой ($\tau_0 \le 1$). В этом случае мы имеем рассеивающую атмосферу, и эффект диффузии излучения тем значительнее, чем больше количество рассеивающих атомов. Когда атмосфера становится непрозрачной, $r(\tau_0)$ начинает убывать ввиду преобладания процессов термализации в той части атмосферы, на которую падает извне излучение. В заключение заметим, что предельное значение

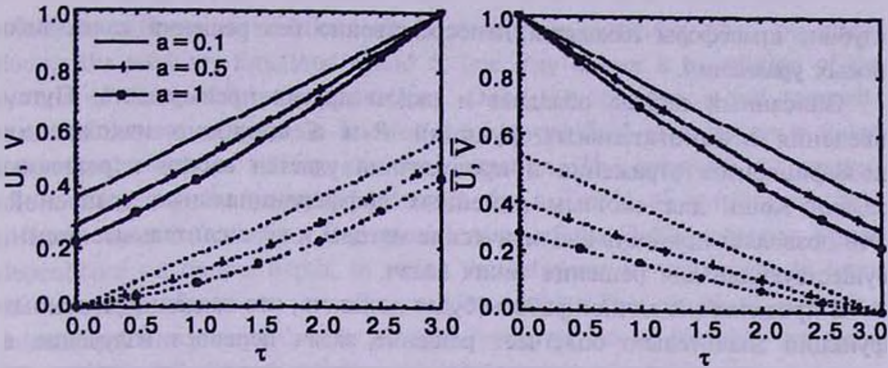

Рис.5. Поле излучения в атмосфере первого типа ($\lambda(\tau)=1/(1+ae^{-\tau})$) оптической толщины $\tau_0=3$ для отмеченных значений параметра a. Сплошные линии соответствуют функциям $U(\tau,\tau_0)$ и $\overline{U}(\tau,\tau_0)$, а пунктирные - $V(\tau,\tau_0)$ и $\overline{V}(\tau,\tau_0)$.

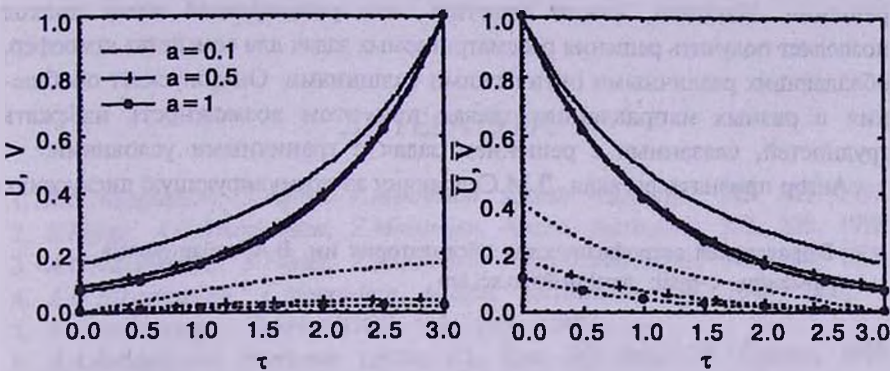

Рис.6. То же, что на рис.3, для атмосферы второго типа ($\lambda(\tau)=1/(1+ae^{\tau})$).

$\overline{r}(\tau_0)$ и в этом случае меньше единицы и равно $1+2a-2/\ln[1+(1/a)]$. Физический смысл такого поведения заключается в том, что добавление поглощающих слоев к противоположной границе освещаемой атмосферы слабо влияет на ее отражательную способность.

Зависимость интенсивностей излучения внутри атмосфер двух типов иллюстрируют рис.5 и 6.

7. *Заключительные замечания*. Мы рассмотрели простейшую одномерную задачу диффузного отражения и пропускания излучения для неоднородной плоскопараллельной атмосферы. При классическом подходе вопрос о нахождении поля излучения в такой атмосфере сводится к решению двухточечной краевой задачи с граничными условиями типа Штурма. Подход, предлагаемый в работе, основывается на методе сложения слоев и заключается в том, что сначала определяются коэффициенты отражения и пропускания, которые являются решением задачи с начальными условиями. После этого интенсивности излучения на любой оптической

глубине атмосферы находятся непосредственно без решения каких-либо новых уравнений.

Описанный подход обладает и рядом других преимуществ. Путем введения вспомогательных функций P и S вопрос о нахождении коэффициентов отражения и пропускания удается свести к решению задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений. Это позволяет привлечь аналитические методы и вычислительные схемы, существующие для решения таких задач.

В продолжение данной работы будет показано, что введение указанных функций значительно облегчает решение задач переноса излучения в многокомпонентной атмосфере. Мы показали также, что каждая из функций P и S удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка. В ряде случаев эти уравнения допускают аналитические решения. Наконец, важно отметить, что развиваемый нами подход позволяет получить решения рассматриваемых задач для семейства атмосфер, обладающих различными оптическими толщинами. Он допускает обобщения в разных направлениях, давая при этом возможность избежать трудностей, связанных с решением задач с граничными условиями.

Автор признателен акад. Д.М.Седракяну за стимулирующую дискуссию.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна, Армения, e-mail: narthur@bao.sci.am

RADIATIVE TRANSFER IN INHOMOGENEOUS ATMOSPHERE. I

A.G.NIKOGHOSSIAN

This series of papers is devoted to the problems of the multiple scattering of radiation in the plane-parallel inhomogeneous atmospheres. The approach proposed is based on the Ambartsumian method of addition of layers. The main goal is to show that one may avoid the difficulties connected with solving the boundary-value problems, to which various problems including the standard ones of radiative transfer are led, by reducing them to the initial-value problems. For the purpose of exposition, the present paper deals with the simplest one-dimensional problem of diffuse reflection and transmission of radiation for a medium of finite optical thickness. The crux of the applied approach is that we start with determining the reflection and transmission coefficients of an atmosphere by solving a Cauchi problem for nonlinear differential equations. It is shown, in particular, that, by introducing the auxiliary functions P and S, one may reduce it to solution of the system of linear differential equations. Once the reflectance and transmittance of the atmosphere are known, the internal field of radiation is found immediately without solving any new equation. The approach we propose allows obtaining the requisite quantities for a family of atmospheres with different optical thickness. Two special cases of the single-scattering albedo dependence on optical depth, in which the solutions are expressible in terms of elementary functions, are discussed at length. The results of numerical calculations are presented with physical interpretation to illustrate the specificity of the transfer of radiation in inhomogeneous atmosphere.

Key words: *radiative transfer - methods analytical - methods numerical*

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.G.Nikoghossian*, *S.Pojoga*, *Z.Mouradian*, Astron. Astrophys., **325**, 813, 1997.
2. *S.Pojoga*, *A.G.Nikoghossian*, *Z.Mouradian*, Astron. Astrophys., **332**, 325, 1998.
3. *A.G.Nikoghossian*, *S.Pojoga*, *Z.Mouradian*, Astron. Astrophys., **342**, 785, 1999.
4. *A.G.Nikoghossian*, *Z.Mouradian*, Astron. Astrophys., **360**, 1086, 2000.
5. *В.А.Амбарцумян*, ДАН СССР, **43**, 106, 1944.
6. *В.А.Амбарцумян*, Научные труды, т.1, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
7. *В.В.Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
8. *Д.М.Седракян*, *А.Ж.Хачатрян*, Астрофизика, **42**, 419, 1999.
9. *L.Collatz*, The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer Verlag, Berlin, 1960.
10. *L.S.Berezin*, *N.P.Zhidkhov*, Computing Methods, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
11. *Н.С.Бахвалов*, Численные методы, т.1, Наука, М., 1973.
12. *В.В.Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
13. *R.W.Preisendorfer*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **44**, 323, 1958.