

УДК: 524.354.6

ДВУХМЕРНЫЙ РАСЧЕТ ДИНАМИКИ КОЛЛАПСА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЯДРА С ОБРАЗОВАНИЕМ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ НА АДАПТИВНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Н.В.АРДЕЛЯН¹, Г.С.БИСНОВАТЫЙ-КОГАН²,
К.В.КОСМАЧЕВСКИЙ¹, С.Г.МОЙСЕЕНКО²

Поступила 16 сентября 2003

В работе изложены результаты двухмерного численного моделирования задачи о коллапсе вращающегося ядра и формировании нейтронной звезды с сильным дифференциальным вращением во внешних областях. Для расчетов использовался специально разработанный численный метод, основанный на полностью консервативной неявной операторно-разностной схеме для задач гравитационной газовой динамики в лагранжеских переменных на треугольной сетке переменной структуры. В результате коллапса ударная волна отскока приводит к выбросу малого количества вещества. Это не позволяет объяснить взрыв сверхновой II типа. Полученная в расчетах сильная дифференциальность вращения при наличии даже слабого начального магнитного поля должна привести к росту магнитного давления, возникновению ударной МГД волны, передаче энергии вращения в радиальную энергию разлета (магниторотационному взрыву сверхновой).

1. *Введение.* Задача о коллапсе железного ядра и взрыве сверхновой звезды неоднократно моделировалась в одномерной постановке [1-6]. Ввиду того, что в одномерной сферически-симметричной модели взрыва получить не удалось, основное внимание в последние годы уделяется двух- и даже трехмерным моделям.

В работе [7] представлены результаты расчетов задачи о коллапсе ядра и взрыве сверхновой в рамках двухмерной гидродинамики (кусочно-параболический метод PPM) и двухмерного переноса нейтрино. В этой работе была получена сильная конвекция за фронтом отраженной ударной волны, которая привела к достаточно мощному, для объяснения сверхновой, сильно несимметричному взрыву. Двухмерное моделирование коллапса и взрыва сверхновой, проведенное при помощи метода PPM в работах [8], [9], не дали достаточной мощности взрыва.

Подробные двухмерные расчеты задачи о взрыве сверхновой методом SPH (метод сглаженных частиц) были проведены в работе [10]. В этой работе был получен взрыв сверхновой, однако расчеты, проведенные в [11] при той же постановке задачи, но с использованием другой численной схемы показали, что взрыва не происходит.

В трехмерной постановке задача о взрыве сверхновой моделировалась

при помощи метода SPH [12]. В этой работе, как и в более ранней работе [10], происходит взрыв сверхновой. При применении метода SPH для моделирования сверхновой взрыв происходит на стадии расчетов, когда применимость данного численного метода неоправдана, так как в атмосфере, окружающей формирующуюся нейтронную звезду, слишком мало частиц и пространственное разрешение применяемого метода невелико.

Двухмерные расчеты с более точным учетом физических эффектов изложены в работе [13], где было учтено вращение и нейтринная конвекция, а нейтринные потери впервые рассчитывались путем решения уравнения Больцмана. Результаты этих расчетов показали, что коллапс ядра не приводит к взрыву сверхновой. Возникающая ударная волна отходит от центра звезды на расстояние порядка 100-200 км и останавливается. В настоящий момент результаты численного моделирования коллапса и взрыва сверхновой, основанные на модели нейтринной конвекции, сильно зависят от применяемого численного метода и деталей физической постановки применяемой методики учета нейтринного излучения.

Наиболее перспективной моделью взрыва сверхновых, связанных с коллапсом ядра и образованием нейтронной звезды, на наш взгляд, является магниторотационный механизм [14]. В этом механизме взрыв должен произойти благодаря перекачке энергии вращения звезды в энергию разлета (взрыва) при помощи магнитного поля. В этом случае нейтрино не играют определяющей роли для взрыва. Полное решение задачи о магниторотационном взрыве сверхновой весьма сложно, поэтому ее решение ведется нами путем последовательного усложнения задачи и приближения ее к реалистичной постановке. После расчета одномерных моделей [15,16], показавших высокую эффективность магниторотационного механизма по передаче энергии вращения в энергию взрыва, было начато исследование модели в двухмерном приближении.

Моделирование магниторотационного взрыва состоит из двух этапов:

- 1) Расчет коллапса и получение модели нейтронной звезды с быстрым и сильно дифференциальным вращением.
- 2) Расчет усиления тороидального магнитного поля при дифференциальном вращении и формирование магниторотационного взрыва.

Первая задача решалась многими авторами для получения взрыва сверхновой. При численном моделировании задач о коллапсе в астрофизике чаще всего используются численные методы эйлерового типа. Современные явные разностные схемы в эйлеровых переменных хорошо зарекомендовали себя при решении различных задач астрофизики. При численном моделировании задачи о коллапсе возникает проблема потери точности вблизи центра звезды при использовании однородной сетки. В последнее время этот недостаток преодолен благодаря применению процедуры автоматического сгущения сетки (AMR - auto-

matic mesh refinement). Другая сложность применения эйлеровых методов в задачах о коллапсе - наличие свободной границы. При использовании эйлеровых переменных внешняя (свободная) граница звезды задавалась либо как твердая непроницаемая стенка, либо на этой границе ставились условия свободного протекания. Такие граничные условия не всегда позволяют правильно описать свободную границу и могут привести к заметным ошибкам в расчетах.

В настоящее время для численного моделирования задач гравитационной газовой динамики, в частности, задачи о коллапсе, используется метод сглаженных (крупных) частиц (SPH smooth particle hydrodynamics). Метод SPH является лагранжевым, не использует сетки, но по точности существенно уступает сеточным методам при сопоставимом числе частиц и точек сетки.

Численный метод, используемый в данной работе, описан в [17,18]. Это неявная полностью консервативная операторно-разностная схема на треугольной сетке переменной структуры в лагранжевых переменных. Данный метод был впервые применен для численного исследования задач о коллапсе протозвездного облака в [19], и для исследования коллапса массивного вращающегося белого карлика после потери устойчивости [20]. В этих работах расчеты проводились на маломощных компьютерах, на сетке малой размерности. Структура сетки в этих расчетах не менялась.

Более детальные расчеты задачи о коллапсе холодного быстровращающегося протозвездного облака были проведены в [21]. Этим методом была исследована задача о коллапсе вращающегося замагниченного протозвездного облака [22].

Метод показал свою высокую эффективность и при решении задач физики плазмы [23].

Неявность используемого метода позволяет рассчитывать задачи, в которых есть необходимость делать большие временные шаги существенно больше, чем характерные временные шаги задаваемые ограничением Куранта. Использование лагранжевых переменных дает возможность проводить расчеты задач, в которых происходит сильное сжатие и разрежение вещества, решать задачи при наличии свободной границы без применения специальных процедур. Применение сетки переменной структуры позволяет избежать искажения сетки при расчетах течений с сильными сдвиговыми деформациями и динамически ее адаптировать к особенностям течения.

Все вышеперечисленные особенности характерны для задач о коллапсе и магниторотационном взрыве сверхновой. При реалистических значениях магнитных полей нейтронных звезд фаза усиления поля и формирования магниторотационного взрыва на несколько порядков превышает время

коллапса. Для решения подобных "жестких" задач с различными характерными временами, часто используемые в астрофизике явные разностные схемы оказываются непригодными из-за ограничения Куранта на шаг по времени; в такой ситуации необходимо использовать неявные методы. При проведении расчетов задач о коллапсе и магнито-ротационном взрыве сверхновой возникает необходимость решения задачи со свободной границей; применение лагранжевых переменных в такой ситуации более удобно чем эйлеровых. В задачах о коллапсе происходит сильное и неоднородное сжатие вещества и для того, чтобы на сетке небольшой размерности разрешить особенности течения в области сильного сжатия, нужно применять динамически адаптивную сетку.

В настоящей работе представлены двухмерные расчеты коллапса и образование быстровращающейся нейтронной звезды. Постановка и начальные данные в настоящей статье взяты из работы [20]. В качестве предсверхновой рассматривался однородно вращающийся белый карлик с периодом $P_0 \sim 2.5$ с и с массой выше чандрасекаровского предела. Уравнение состояния и нейтринные потери использовались в виде приближенных формул, где учитывались основные физические процессы: релятивизм и вырождение электронов, ядерное отталкивание нуклонов при сверхъядерных плотностях, диссоциация железа при высоких температурах. При рассмотрении нейтринных потерь эффективно учитывалась непрозрачность среды относительно распространения нейтрино путем введения обрезającego множителя, что является одним из вариантов "метода ограничения потока" при описании переноса излучения или нейтрино [24].

Основные отличия данной работы от работы [20] в следующем: при проведении расчетов использовалась перестройка сетки, что позволило избежать искажения ячеек сетки, адаптировать сетку и провести расчеты до стадии формирования дифференциально вращающейся нейтронной звезды. Динамическая адаптация сетки позволила провести расчеты задачи о коллапсе ядра с высокой точностью, используя сетку небольшой размерности (~ 5000 узлов, ~ 10000 ячеек). В данной работе в уравнении состояния была учтена диссоциация железа и использован более реалистичский вариант ограничения нейтринного потока в условиях большой оптической толщи по поглощению нейтрино.

Полученные результаты для кривой блеска нейтринного излучения оказались хорошо совпадающими с результатами других авторов [25], где использовались гораздо более сложные уравнения состояния и способы учета нейтринных потерь. В результате расчета была получена дифференциально вращающаяся конфигурация, состоящая из быстро вращающегося ядра нейтронной звезды и медленно вращающейся оболочки.

2. *Уравнения состояния.* Для расчетов использовалось уравнение

состояния, приведенное в [20]:

$$P = P(\rho, T) = P_0(\rho) + \rho \mathcal{R} T + \frac{\sigma T^4}{3},$$

$$P_0(\rho) = \begin{cases} P_0^{(1)} = b_1 \rho^{1/3} / (1 + c_1 \rho^{1/3}), & \rho \leq \rho_1, \\ P_0^{(k)} = a \cdot 10^{b_k (\log \rho - 8.419)^2} & \rho_{k-1} \leq \rho \leq \rho_k, \quad k = \overline{2, 6} \end{cases} \quad (1)$$

$$b_1 = 10.1240483 \quad c_1 = 10^{-2.257} \quad \rho_1 = 10^{9.419}$$

$$b_2 = 1. \quad c_2 = 1.1598 \quad \rho_2 = 10^{11.5519}$$

$$b_3 = 2.5032 \quad c_3 = 0.356293 \quad \rho_3 = 10^{12.26939}$$

$$b_4 = 0.70401515 \quad c_4 = 2.117802 \quad \rho_4 = 10^{14.302}$$

$$b_5 = 0.16445926 \quad c_5 = 1.237985 \quad \rho_5 = 10^{15.0388}$$

$$b_6 = 0.86746415 \quad c_6 = 1.237985 \quad \rho_6 \gg \rho_5$$

$$a = 10^{26.1673},$$

здесь P - давление, ρ - плотность, T - температура. В формуле $P_0(\rho)$ величина ρ есть полная плотность массы-энергии с учетом взаимодействия. Для холодного вырожденного вещества $P_0(\rho)$ является аппроксимацией таблиц из [26,27].

В окрестности точек $\rho = \rho_k$ в формуле (1) функция $P_0(\rho)$ сглаживалась так же, как и в [20], для того, чтобы обеспечить непрерывность производных $dP_0/d\rho$:

$$P_0(\rho) = \begin{cases} P_0^{(k)}, & \rho \in [\rho_{k-1} + \xi_{k-1}, \rho_k - \xi_k], \quad k = \overline{1, 6}, \quad \rho_0 + \xi_0 = 0, \\ \theta_k P_0^{(k)} + (1 - \theta_k) P_0^{(k+1)}, & \rho \in [\rho_k - \xi_k, \rho_k + \xi_k], \quad k = \overline{1, 5}, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\theta_k = \theta(\rho) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2\xi_k}(\rho - \rho_k)\right), \quad \xi_k = 0.01\rho_k.$$

Энергия единицы массы определяется следующим образом:

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\rho) + \frac{3}{2} \mathcal{R} T + \frac{\sigma T^4}{\rho} + \varepsilon_{Fe}(\rho, T). \quad (3)$$

Здесь \mathcal{R} - газовая постоянная, σ - постоянная плотности излучения, величина $\varepsilon_0(\rho)$ задается следующим термодинамическим соотношением

$$\varepsilon_0(\rho) = \int_0^{\rho} \frac{P_0(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}^2} d\tilde{\rho}. \quad (4)$$

Введенный здесь член ε_{Fe} в уравнении (3) учитывает распад железа на нуклоны и был принят в виде:

$$\varepsilon_{Fe}(\rho, T) = \frac{E_{b, Fe}}{A_{m, Fe}} \left(\frac{T - T_{0Fe}}{T_{1Fe} - T_{0Fe}} \right). \quad (5)$$

Предполагалось, что в области диссоциации железа оно составляет основ-

ную долю массы, $E_{b,Fe} = 8 \cdot 10^5$ эрг - энергия связи железа, $A = 56$ - атомный вес железа, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24}$ г - масса протона, $T_{0Fe} = 0.9 \cdot 10^{10}$ К, $T_{1Fe} = 1.1 \cdot 10^{10}$ К. Для использования в численных процедурах, формула (5) была несколько модифицирована ("сглажена"):

$$\varepsilon_{Fe}(\rho, T) = \frac{E_{b,Fe}}{A m_p} \left(1 + \sin \left(\pi \left(\frac{T - T_{0Fe}}{T_{1Fe} - T_{0Fe}} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) / 2. \quad (6)$$

Нейтринные потери от Урка-процессов задаются следующим соотношением [1]:

$$f(\rho, T) = \frac{1.3 \cdot 10^9 \varepsilon(\bar{T}) \bar{T}^6}{1 + (7.1 \cdot 10^{-5} \rho \bar{T})^{2/3}} \text{ эрг г}^{-1} \text{ с}^{-1}, \quad (7)$$

$$\varepsilon(\bar{T}) = \begin{cases} 1, & \bar{T} < 7, \\ 664.31 + 51.024(\bar{T} - 20), & 7 \leq \bar{T} \leq 20, \\ 664.31, & \bar{T} > 20, \end{cases} \quad (8)$$

$$\bar{T} = T \cdot 10^{-9}.$$

При расчетах в уравнение энергии были включены также нейтринные потери, связанные с аннигиляцией пар, фоторождением нейтрино, а также с плазменными нейтрино, которые аппроксимировались интерполяционными формулами из [28]:

$$Q_{tot} = Q_{pair} + Q_{photo} + Q_{plasm}. \quad (9)$$

Все три слагаемых в (9) записываются в общем виде следующим образом:

$$Q_d = K(\rho, \alpha) e^{-c\xi} \frac{a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2}{\xi^3 + b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 + b_3 \alpha^3}. \quad (10)$$

Для $d = pair$, $K(\rho, \alpha) = g(\alpha) e^{-2\alpha}$,

$$g(\alpha) = 1 - \frac{13.04}{\alpha^2} + \frac{133.5}{\alpha^4} + \frac{1534}{\alpha^6} + \frac{918.6}{\alpha^8};$$

Для $d = photo$, $K(\rho, \alpha) = (\rho/\mu_z) \alpha^{-5}$;

Для $d = plasm$, $K(\rho, \alpha) = (\rho/\mu_z)^3$;

$$\xi = \left(\frac{\rho/\mu_z}{10^9} \right)^{1/3} \alpha.$$

Здесь $\mu_z = 2$ - число нуклонов на один электрон. Коэффициенты c , a_p , b_i для различных d приведены в табл.1 из [28]

Общая формула для нейтринных потерь имеет вид:

$$F(\rho, T) = (f(\rho, T) + Q_{tot}) e^{-\tau_\nu/10}. \quad (11)$$

Сомножитель $e^{-\tau_\nu/10}$ в формуле (11), где $\tau_\nu = S_\nu n l_\nu$, ограничивает поток нейтрино в условиях ненулевой толщи τ_ν по взаимодействию нейтрино с веществом. Сечение нейтринного взаимодействия с веществом

Таблица 1

| | a_0 | a_1 | a_2 | b_1 | b_2 | b_3 | c |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|-----------|---------|
| $10^8 \text{ K} \leq T \leq 10^{10} \text{ K}$ | | | | | | | |
| pair | 5.026(19) | 1.745(20) | 1.568(21) | 9.383(-1) | -4.141(-1) | 5.829(-2) | 5.5924 |
| photo | 3.897(10) | 5.906(10) | 4.693(10) | 6.290(-3) | 7.483(-3) | 3.061(-4) | 1.5654 |
| plasm | 2.146(-7) | 7.814(-8) | 1.653(-8) | 2.581(-2) | 1.734(-2) | 6.990(-4) | 0.56457 |
| $10^{10} \text{ K} \leq T \leq 10^{11} \text{ K}$ | | | | | | | |
| pair | 5.026(19) | 1.745(20) | 1.568(21) | 1.2383 | -8.1141(-1) | 0.0 | 4.9924 |
| photo | 3.897(10) | 5.906(10) | 4.693(10) | 6.290(-3) | 7.483(-3) | 3.061(-4) | 1.5654 |
| plasm | 2.146(-7) | 7.814(-8) | 1.653(-8) | 2.581(-2) | 1.734(-2) | 6.990(-4) | 0.56457 |

S_ν представлялось в виде $S_\nu = 10^{-44} T^2 / (0.5965 \cdot 10^{10})^2$, концентрация нуклонов есть $n = \rho/m_p$, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24}$ г, а характерный масштаб длины, определяющий толщину по поглощению нейтрино l_ν , принимался равным характерной величине изменения плотности, где

$$l_\nu = \frac{\rho}{|\nabla \rho|} = \frac{\rho}{\left((\partial \rho / \partial r)^2 + (\partial \rho / \partial z)^2 \right)^{1/2}}. \quad (12)$$

Величина l_ν монотонно убывает к поверхности, достигая максимума в центре, и приблизительно равна толщине вещества поглощающего нейтрино. Множитель 1/10 в выражении $e^{-\tau/l_0}$ использован потому, что в вырожденном веществе горячей нейтронной звезды только примерно 1/10 часть нуклонов в окрестности энергии Ферми участвует в процессах взаимодействия с нейтрино.

3. *Основные уравнения.* Задача о коллапсе ядра описывается системой уравнений гравитационной газовой динамики:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot v = 0, \quad \rho \frac{dv}{dt} = -\nabla(P) - \rho \nabla \Phi, \\ \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + P \nabla \cdot v + \rho F(\rho, T) = 0, \quad \Delta \Phi = 4\pi G \rho, \end{aligned} \quad (13)$$

где $x = (r, \varphi, z)$ - пространственные координаты, $v = (v_r, v_\varphi, v_z)$ - вектор скорости, $d/dt = \partial/\partial t + v \cdot \nabla$ - полная производная по времени, Φ - гравитационный потенциал, G - гравитационная постоянная, $F(\rho, T)$ - функция нейтринных потерь. Решение ищется в приближении осевой и экваториальной симметрии ($r \geq 0, z \geq 0$). На оси вращения ($r=0$) задаются следующие граничные условия: $(\nabla \Phi)_r = 0, v_r = 0$, на экваториальной плоскости ($z=0$) граничные условия имеют вид: $(\nabla \Phi)_z = 0, v_z = 0$. Кроме того, на свободной границе задается нулевое граничное давление (граница с вакуумом): $P_{\text{св.г.}} = 0$. В выражении для внутренней энергии (3) присутствует трудно вычисляемая функция $\varepsilon_0(\rho)$. Обозначим:

$$\varepsilon^* = \frac{3}{2} \mathcal{R} T + \frac{\sigma T^4}{\rho} + \varepsilon_{fe}(\rho, T),$$

$$P^* = \rho \mathcal{R} T + \frac{\sigma T^4}{3}.$$

Тогда уравнение энергии из (13) с учетом соотношения (4) записывается в виде:

$$\rho \frac{d\varepsilon^*}{dt} + P^* \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho F(\rho, T) = 0, \quad (14)$$

и отпадает необходимость использовать функцию $\varepsilon_0(\rho)$ в явном виде.

4. Переход к безразмерным переменным; начальные условия.

В качестве основных масштабных коэффициентов выберем

$$r_0 = 1.35 \cdot 10^8 \text{ см}, \quad \rho_0 = 10^9 \text{ г/см}^3, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г с}^2). \quad (15)$$

Для обезразмеривания задачи представим основные размерные величины в виде (величины со знаком \sim - безразмерные величины):

$$\begin{aligned} r &= \tilde{r} r_0, \quad z = \tilde{z} r_0, \quad \rho = \tilde{\rho} \rho_0, \quad v = \tilde{v} v_0, \\ t &= \tilde{t} t_0, \quad v_r = \tilde{v}_r v_0, \quad v_\varphi = \tilde{v}_\varphi v_0, \quad v_z = \tilde{v}_z v_0, \quad p = \tilde{p} p_0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$T = \tilde{T} T_0, \quad \Phi = \tilde{\Phi} \Phi_0 = \tilde{\Phi} 4\pi G \rho_0 r_0^2, \quad \varepsilon = \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0, \quad (17)$$

где

$$v_0 = \sqrt{4\pi G \rho_0 r_0^2} = 3.908 \cdot 10^9 \text{ см/с}, \quad t_0 = \frac{r_0}{v_0},$$

$$p_0 = \rho_0 v_0^2, \quad T_0 = \frac{v_0^2}{\mathcal{R}}, \quad \Phi_0 = 4\pi G \rho_0 r_0^2, \quad \varepsilon_0 = v_0^2.$$

Система уравнений (13) записывается в следующей безразмерной форме (знак \sim опущен):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(P) - \rho \nabla \Phi, \\ \rho \frac{d\varepsilon^*}{dt} + P^* \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho F(\rho, T) &= 0, \quad \Delta \Phi = 4\pi G \rho. \end{aligned} \quad (18)$$

В качестве начальной модели была выбрана модель I из работы [20], т.е. была рассчитана сферически-симметричная стационарная модель с центральной плотностью $\rho_c = 4.5 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$. Выбранное значение центральной плотности соответствует максимуму на кривой зависимости массы звезды от центральной плотности $M_S(\rho_c)$ при $T=0$. Масса такой сферически-симметричной звезды равна $M = 1.0042 M_\odot$.

Для задания начальной модели плотность звезды в каждой точке, а, следовательно, и масса звезды, была увеличена на 20%. Температура в звезде была задана соотношением: $T = \delta \rho^{2/3}$, где $\delta = 1 \text{ (К см}^2 \text{ г}^{-2/3})$. Кроме того, в начальный момент времени $t=0$, задавалось твердотельное вращение с угловой скоростью $\omega = 2.519 \text{ с}^{-1}$, что соответствует периоду

$\tau = 2.496 \text{ с}$, $v_r = v_z = 0$. Начальная энергия вращения составляет 0.571% от гравитационной, а начальная внутренняя энергия, включая энергию вырождения, составляет 72.7% от гравитационной. Исследуемая начальная модель неустойчива относительно сжатия и сразу после начала расчетов происходит быстрый коллапс.

5. Метод расчета. Для численного моделирования задачи о коллапсе ядра и образовании быстровращающейся нейтронной звезды использовалась неявная операторно-разностная полностью консервативная схема на треугольной сетке переменной структуры в лагранжевых переменных, предложенная и исследованная в [18] и более ранних работах этих же авторов.

Решение задачи представляет собой последовательность расчета временных шагов. Расчет каждого временного шага разбивается на две части.

Первая часть - расчет значений функций на следующем временном слое при помощи неявной полностью консервативной операторно-разностной схемы на треугольной сетке в лагранжевых переменных [17, 18]. В результате чего в том числе меняются и координаты узлов сетки.

Вторая часть предполагает осуществление анализа качества сетки, ее исправление и адаптацию (перестройка сетки). Необходимость исправления качества сетки определяется возможным появлением "плохих" ячеек, т.е. треугольников, сильно отличающихся от равносторонних. Динамическая адаптация сетки позволяет сгущать ее в тех частях расчетной области, где необходимо увеличить пространственное разрешение и разрежать сетку там, где течение является гладким, что позволяет существенно уменьшить размерность используемой сетки и, следовательно, сократить затраты компьютерного времени.

Процедура перестройки сетки, в свою очередь, состоит из двух этапов. Первый - локальное изменение структуры сетки. Второй - определение значений сеточных функций в областях измененной структуры. Локальное изменение структуры расчетной сетки сводится к трем локальным операциям:

1. Замена диагонали четырехугольника, образованного двумя треугольниками, на другую диагональ.
2. Объединение двух соседних узлов сетки.
3. Добавление нового расчетного узла на середину связи между соседними узлами.

Исправление структуры сетки осуществляется при помощи первых двух операций. Адаптация сетки происходит при помощи операций 2 и 3. Рисунки, наглядно поясняющие эти операции, приведены в [21].

На втором этапе перестройки сетки вычисляются значения сеточных функций в узлах и ячейках, участвовавших в изменении структуры сетки.

Применение простой переинтерполяции при пересчете сеточных функций приводит к нарушению законов сохранения и существенным погрешностям в расчетах в областях с большими градиентами решения (например, на ударных волнах). Проблема пересчета сеточных функций состоит в том, чтобы численная ошибка, вносимая процедурой пересчета, была бы минимальной. Для этого минимизировалась не только ошибка, вносимая в значения сеточных функций, но также и в градиенты этих функций. Кроме того, необходимо, чтобы при пересчете выполнялись законы сохранения (массы, импульса, энергии) в окрестности локальной перестройки. Метод пересчета сеточных функций основан на минимизации функционалов, содержащих значения пересчитываемых функций, их градиентов и сеточных аналогов законов сохранения [17]. При решении данной задачи был предложен и использован метод условной минимизации функционалов, обеспечивающий точное выполнение законов сохранения.

В задачах о коллапсе и магниторотационном взрыве сверхновой точное выполнение законов сохранения важно, так как при расчетах необходимо проделать большое количество временных шагов, что может привести к накоплению ошибок. Специфика данного типа задач состоит в том, что даже слабое нарушение законов сохранения при численном расчете может привести к качественному искажению результатов.

Процедура перестройки сетки позволяет не только "исправлять" лагранжеву сетку, но также и динамически адаптировать ее при помощи задания различных критериев перестройки в различных частях расчетной области. Это позволяет сгустить сетку в той части расчетной области, где это необходимо, что позволяет локально увеличить точность расчетов. Возможно также сделать сетку менее подробной в тех частях расчетной области, где течение является "гладким". Процедура разрежения сетки позволяет уменьшить размерность сетки не уменьшая точности численного решения.

Для адаптации сетки можно использовать геометрические критерии, т.е. ограничения на размеры ячейки, которые определяются только ее координатами, но такие критерии адаптации годятся только для расчета течений простой или легко предсказуемой структуры. Для адаптации сетки при расчете сложных течений или течений, структура которых неизвестна, лучше применять динамические критерии, т.е. критерии, определяемые поведением решения. Динамические критерии, использованные при проведении расчетов в данной работе были предложены в [21].

В качестве локального критерия выбирается характерная длина стороны ячейки сетки l_k . Рассмотрим пример критерия, где l_k задается как функция ρ и $\text{grad}\rho$. Введем функцию

$$f(\rho, \text{grad}\rho) = \frac{\alpha}{(\rho + \varepsilon)^n} + \frac{\beta}{(|\text{grad}\rho| + \varepsilon)^2}, \quad (19)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. γ_1, γ_2 - показатели степени, $\text{grad} \rho$ - сеточный аналог градиента плотности. В предельных случаях:

$\alpha = 1, \beta = 0$, f - зависит только от плотности;

$\alpha = 0, \beta = 1$; f - зависит только от градиента плотности.

Пусть N - общее количество ячеек сетки. Характерную длину стороны l_k ячейки с номером k будем вычислять как функцию от плотности, градиента плотности и (неявно) координат r, z по формуле

$$l_k = 2\sqrt{\frac{s_k}{3}}, \quad s_k = \frac{f(\rho_k, \text{grad}\rho_k)}{\sum_{n=1}^N f(\rho_n, \text{grad}\rho_n)} S. \quad (20)$$

Здесь S - площадь расчетной области, состоящей из треугольных ячеек, суммирование в знаменателе проводится по всем ячейкам сетки. Заметим,

что $S = \sum_{k=1}^N s_k$, а s_k равна площади равностороннего треугольника с длиной стороны l_k . В наших расчетах функция f из формулы (19) использовалась в виде $f(\rho_k) = 1/(\rho_k + \varepsilon)^{0.5}$.

Описанный критерий применяется следующим образом: если длина стороны i -й ячейки сетки больше чем $2l_k$, то на середину стороны этой ячейки добавляется новый узел, если длина стороны i -й ячейки сетки меньше чем $0.7l_k$, то применяется процедура удаления одного из узлов составляющих эту сторону ячейки. Применение описанного критерия динамической адаптации позволило не только адаптировать сетку к особенностям решения, но и обеспечить приемлемую точность расчетов при малом изменении общего количества узлов и ячеек расчетной сетки. В описываемых расчетах общее количество используемых узлов (5000) и ячеек (10000) сетки изменялось не более чем на 5%. В момент максимального сжатия минимальные размеры ячейки таковы, что при использовании равномерной сетки для получения такого же пространственного разрешения понадобилась бы сетка размерностью $\sim 1000 \times 1000$ (!) ячеек.

Расчет гравитационного потенциала в данной работе впервые в рамках применяемого численного метода выполняется на основе метода конечных элементов повышенного порядка [29]. Это позволило увеличить точность расчетов и устранить потерю аппроксимации при вычислении гравитационной силы вблизи оси z .

Для сквозного счета ударных волн в разностную схему была введена линейная искусственная вязкость [30].

6. Результаты расчетов. На рис.1 приведена сетка с треугольными ячейками в начальный момент расчетов. На начальном этапе коллапс происходит плавно, звезда сжимается сильнее в направлении оси z из-за наличия центробежной силы. В момент времени $t = 0.1206$ с - центральная плотность составляла $\rho_c = 9.727 \cdot 10^{10}$ г/см³.

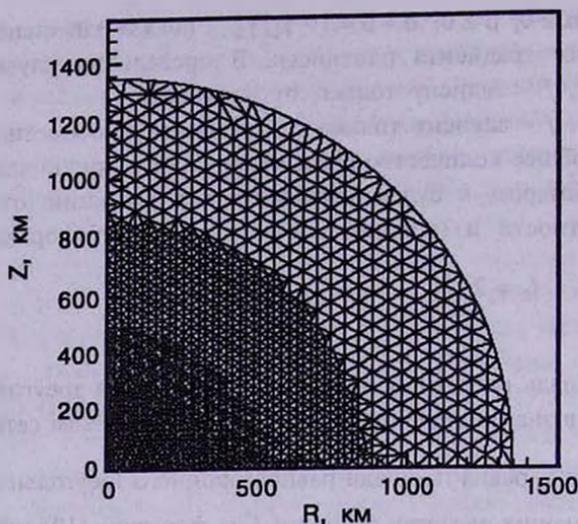


Рис.1. Треугольная сетка в начальный момент времени $t=0$.

В момент времени $t=0.1377$ с на расстоянии $\sim 6 \cdot 10^5$ см начинается формирование ударной волны (рис.2). За фронтом ударной волны температура вещества резко повышается и это приводит к "включению"

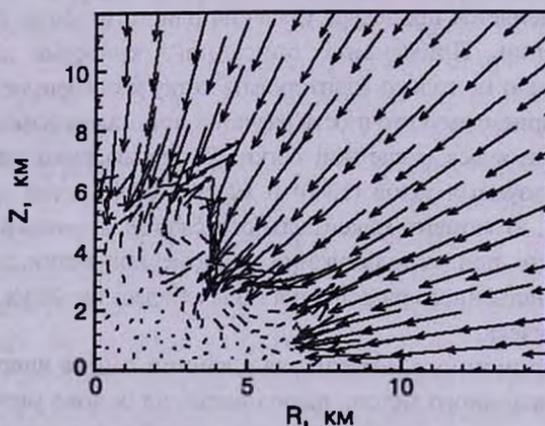


Рис.2. Поле скоростей в центральной части расчетной области в момент времени $t=0.1377$ с.

нейтринных потерь (рис.3). Вещество звезды, находящееся снаружи от фронта ударной волны, продолжает коллапсировать по направлению к центру звезды. Затем плотность в центральной области звезды начинает быстро расти и в момент времени $t=0.1424$ с достигает своего максимума $\rho_{c, \max} = 5.665 \cdot 10^{14}$ г/см³. Ударная волна движется от центра звезды, за ее фронтом происходит остановка вещества "налипающего" на центральное ядро. При этом сама ударная волна движется от центра звезды, ее фронт испытывает сильные возмущения (рис.4, 5). В момент

времени $t = 0.1487$ с фронт ударной волны представляет собой эллипсоид вращения с полуосями ~ 60 км у оси z и ~ 100 км у экватора. За фронтом ударной волны происходит интенсивное перемешивание вещества, которое может привести в дальнейшем (при магниторотационном взрыве сверхновой) к выбросу радиоактивных элементов, регистрируемых при наблюдениях сверхновых. Причины возникновения перемешивания и результаты его моделирования при коллапсе и взрыве сверхновой мы планируем представить в последующих работах.

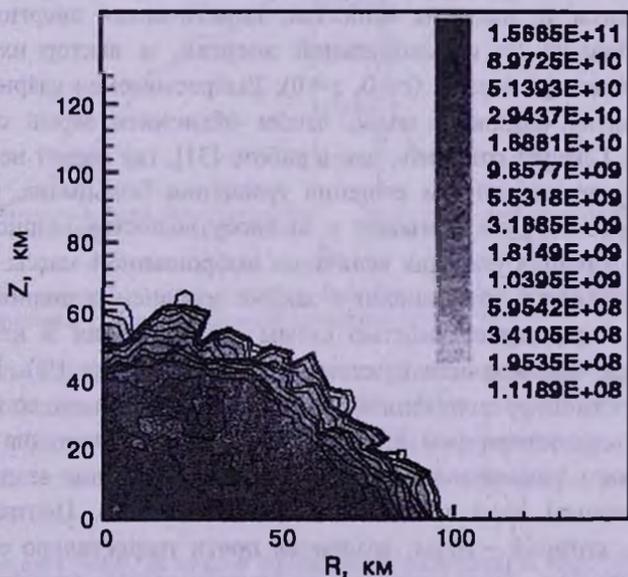
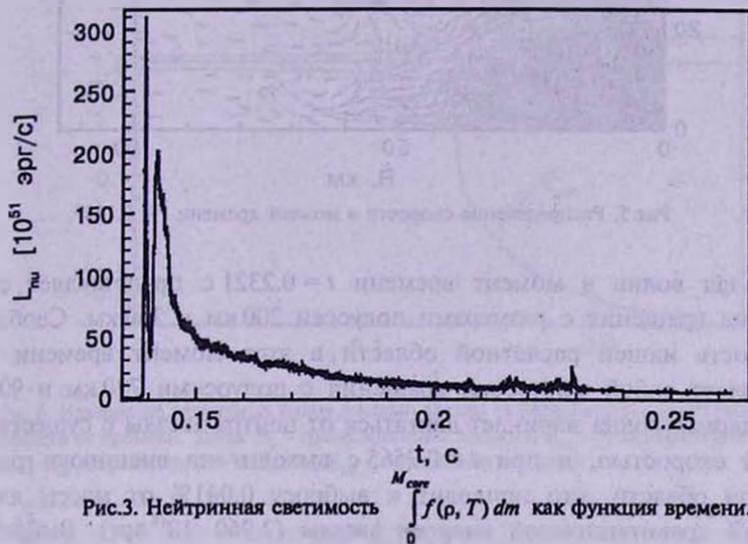


Рис.4. Распределение температуры в момент времени $t = 0.1487$.

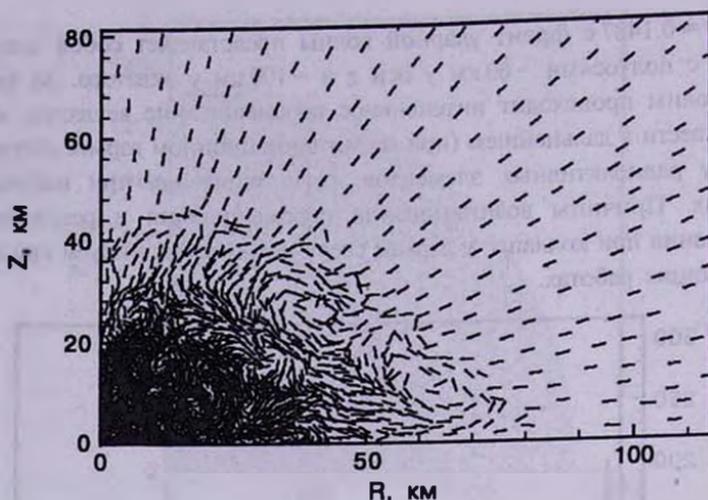


Рис.5. Распределение скорости в момент времени $t = 0.1487$.

Ударная волна в момент времени $t = 0.2321$ с представляет собой эллипсоид вращения с размерами полуосей 200 км и 260 км. Свободная поверхность нашей расчетной области в этот момент времени тоже представляет собой эллипсоид вращения с полуосями 720 км и 900 км. Затем ударная волна начинает двигаться от центра звезды с существенно большей скоростью, и при $t = 0.2565$ с выходит на внешнюю границу расчетной области, что приводит к выбросу 0.041% от массы ядра и 0.001186% гравитационной энергии звезды ($2.960 \cdot 10^{48}$ эрг). Выброшенными считаются те частицы вещества, кинетическая энергия которых становится больше их потенциальной энергии, и вектор их скорости направлен от центра звезды ($r=0$, $z=0$). Выбрасываемая ударной волной масса и энергия слишком малы, чтобы объяснить взрыв сверхновой второго типа. Следует отметить, что в работе [31], где расчет нейтринного излучения проводился путем решения уравнения Больцмана, результаты двумерных расчетов не приводят к выбросу вещества ударной волной. Полученные в наших расчетах величины выброшенной массы и энергии столь незначительны, что ошибки в законе сохранения полной энергии, связанные с неконсервативностью схемы при введении в нее гравитационной силы, оказываются существенно большими ($\sim 1\%$). Вследствие этого реальность цифр полученного выброса и само его существование не может считаться достоверным. На рис.6 представлено изменение различных видов энергии в зависимости от времени. На конечном этапе расчетов сколлапсировавшее ядро вращается дифференциально. Центральная его часть, радиус которой ~ 10 км, вращается почти твердотельно с периодом вращения 0.00152 с. При удалении от центра звезды угловая скорость быстро убывает. Частицы вещества, находящиеся на внешней границе,

вблизи экваториальной плоскости вращаются с периодом 0.31 с. Распределение периода вращения и угловой скорости в экваториальной плоскости приведено на рис.7. Как видно из этого рисунка, ядро после коллапса вращается сильно дифференциально. Зависимость угловой скорости от радиальной координаты $\omega(r)$, полученная в наших расчетах, довольно близка к результатам, полученным ранее в работе [32].

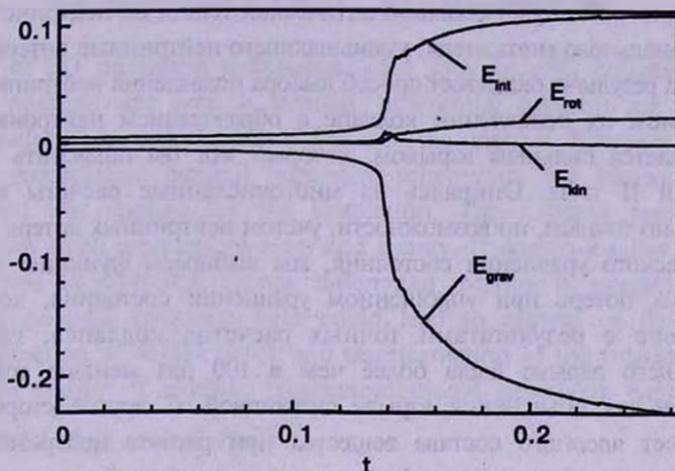


Рис.6. Изменение различных видов энергии (в безразмерном виде) при коллапсе в зависимости от времени. Здесь: E_{grav} - гравитационная энергия, E_{kin} - кинетическая полоидальная энергия, E_{rot} - вращательная энергия, E_{int} - внутренняя энергия.

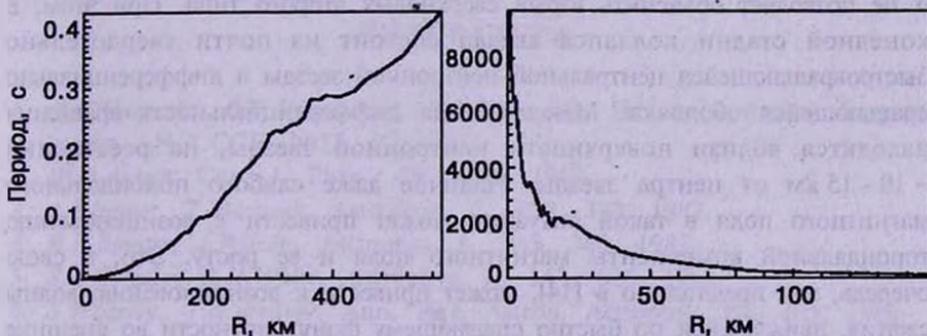


Рис.7. Зависимость периода вращения (слева) в секундах и угловой скорости (справа) в с^{-1} от координаты r , в экваториальной плоскости ($z=0$).

Расчеты задачи о коллапсе ядра с учетом релятивистских эффектов были выполнены недавно в работе [33]. Учет релятивистских эффектов приводит к большему сжатию и еще большей дифференциальности вращения в результате коллапса, чем в случае ньютоновского гравитационного потенциала.

7. Заключение. В статье приведены результаты численного моделирования задачи о коллапсе железного ядра вращающейся массивной

звезды. Показано, что как и в ряде других работ, в результате гравитационного коллапса происходит возникновение ударной волны отскока, возникает также всплеск нейтринного излучения.

В расчетах коллапса с образованием нейтронной звезды очень важны роль уравнения состояния и учет нейтринных потерь. На первых этапах расчетов был сделан приближенный учет температурных эффектов в уравнении состояния, и грубый учет большой оптической толщи по нейтринно введенным экспоненциальным множителям, уменьшающим нейтринные потери. Большое влияние на результат оказывает способ выбора подавления нейтринных потерь. При сильном их подавлении коллапс с образованием нейтронной звезды сопровождается сильным взрывом, который мог бы объяснить энергетику сверхновой II типа. Опираясь на многочисленные расчеты коллапса с максимально точным, по возможности, учетом нейтринных потерь и наиболее реалистического уравнения состояния, мы выбираем функцию подавления нейтринных потерь при упрощенном уравнении состояния, которая дает соответствие с результатами точных расчетов коллапса, где энергия последующего взрыва была более чем в 100 раз меньше той, которая необходима для объяснения взрыва сверхновой. С другой стороны, более точный учет ядерного состава вещества при расчете нейтринных потерь приводит к примерно той же функции подавления нейтринных потерь.

На развитой стадии коллапса ударная волна выходит на границу железного ядра, но уносимое ею количество массы и энергии незначительно и не позволяет объяснить взрыв сверхновых второго типа. При этом, в конечной стадии коллапса звезда состоит из почти твердотельно быстровращающейся центральной нейтронной звезды и дифференциально вращающейся оболочки. Максимальная дифференциальность вращения находится вблизи поверхности нейтронной звезды, на расстоянии ~ 10 - 15 км от центра звезды. Наличие даже слабого полоидального магнитного поля в такой ситуации может привести к возникновению тороидальной компоненты магнитного поля и ее росту. Это, в свою очередь, как предложено в [14], может привести к возникновению волны сжатия, движущейся по быстро спадающему фону плотности во внешние слои оболочки звезды. Такая волна сжатия быстро увеличивает свою скорость и превращается в ударную МГД волну, выход которой наружу и приводит к магнитоторационному взрыву сверхновой.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантом РФФИ 02-02-16900, программой РАН "Нестационарные астрономические объекты", грантом ИНТАС 00491.

¹ Факультет ВМиК МГУ, Россия

² Институт космических исследований РАН,

Россия, e-mail: gkogan@mx.iki.rssi.ru, moiseenko@mx.iki.rssi.ru

2D SIMULATION OF DYNAMICS OF THE COLLAPSE OF THE ROTATING CORE AND NEUTRON STAR FORMATION ON ADAPTIVE TRIANGULAR GRID IN LAGRANGIAN COORDINATES

N.V.ARDELJAN¹, G.S.BISNOVATYI-KOGAN²,
K.V.KOSMACHEVSKII¹, S.G.MOISEENKO²

Results of 2D numerical simulations of a rotating core collapse and formation of neutron star with a strongly differential rotation are presented. Specially developed numerical method, based on the operator-difference lagrangian completely conservative implicit numerical scheme on the triangular reconstructing grid was applied for the simulation. The collapse results in the ejection of the small amounts of mass and energy. It does not allow to explain supernova type II explosion. Strong differential rotation in presence of even weak initial poloidal magnetic field could lead to growth of the magnetic pressure, formation of MHD shock and transformation of the rotational energy to the radial energy of ejection (magnetorotational supernova explosion).

Key words: *stars:neutron:theory*

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Н.Иванова, В.С.Имшенник, Д.К.Надежин, Научн. информ. Астрон. совета АН СССР, №13, с.3, 1969.
2. W.D.Arnett, Can. J. Phys., 45, 1621, 1967.
3. A.Barrows, T.Mazurek, Astrophys. J., 259, 330, 1982.
4. R.L.Bowers, J.Wilson, Astrophys. J., 263, 366, 1982.
5. S.A.Colgate, R.H.White, Astrophys. J., 143, 626, 1966.
6. S.Woosley, T.A.Weaver, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 24, 205, 1986.
7. A.Barrows, J.Hayes, J.Fryxell, Astrophys. J., 450, 830, 1995.
8. H.-Th.Janka, E.Müller, Astron. Astrophys., 290, 496, 1994.
9. H.-Th.Janka, E.Müller, Astrophys. J., 448, L109, 1995.
10. M.Herant, W.Benz, W.R.Fix et al., Astrophys. J., 435, 339, 1994.
11. D.S.Miller, J.R.Wilson, R.W.Mayle, Astrophys. J., 415, 278, 1993.
12. C.L.Fryer, M.S.Warren, Astrophys. J., 574, L174, 2002.
13. R.Buras, M.Rampp, H.-Th.Janka, K.Kifonidis, Phys. Rev. Lett., 90, №24, p.241101, 2003.
14. Г.С.Бисноватый-Коган, Астрон. ж., 47, 813, 1970.
15. Н.В.Арделян, Г.С.Бисноватый-Коган, Ю.П.Попов, Астрон. ж., 56, 1244, 1979.

16. *G.S.Bisnovatyι-Kogan, Yu.P.Popov, A.A.Samokhin*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **41**, 321, 1976.
17. *Н.В.Арделян, К.В.Космачевский*, Неявный свободно-лагранжевый метод для расчета двумерных магнитогазодинамических течений, в кн.: "Математическое моделирование". М., МГУ, 1993. с.25.
18. *Н.В.Арделян, К.В.Космачевский, С.В.Черниговский*, Вопросы построения и исследования полностью консервативных разностных схем магнитной газовой динамики, М., МГУ, 1987, с.111.
19. *Н.В.Арделян, Г.С.Бисноватый-Коган, Ю.П.Попов, С.В.Черниговский*, *Астрон. ж.*, **64**, 495, 1987.
20. *Н.В.Арделян, Г.С.Бисноватый-Коган, Ю.П.Попов, С.В.Черниговский*, *Астрон. ж.*, **64**, 761, 1987.
21. *N.V.Ardeljan, G.S.Bisnovatyι-Kogan, K.V.Kosmachevskil, S.G.Moiseenko*, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **115**, 573, 1996.
22. *N.V.Ardeljan, G.S.Bisnovatyι-Kogan, S.G.Moiseenko*, *Astron. Astrophys.*, **355**, 1181, 2000.
23. *Н.В.Арделян, А.С.Камруков, Н.П.Козлов и др.*, *ДАН СССР*, **292**, 78, 1987.
24. *H.-Th.Janka*, *Astron. Astrophys.*, **256**, 453, 1992.
25. *A.Barrows, T.A.Thompson*, astro-ph/0210212.
26. *G.Baum, C.Pethick, P.Sutherland*, *Astrophys. J.*, **170**, 197, 1971.
27. *R.Malone, M.B.Johnson, H.A.Bethe*, *Astrophys. J.*, **199**, 741, 1975.
28. *P.Schindler, D.N.Schramm, P.J.Wiita et al.*, *Astrophys. J.*, **313**, 531, 1987.
29. *О.Зенкевич, К.Морган*, Конечные элементы и аппроксимации. Мир, М., 1986, с.318.
30. *А.А.Самарский, Ю.П.Попов*, Разностные методы решения задач газовой динамики. Наука, М., 1992, с.423.
31. *H.-Th.Janka, T.Plewa*, astro-ph/0212314.
32. *H.-Th.Janka, R.Mönchmeyer*, *Astron. Astrophys.*, **226**, 69, 1989.
33. *H.Dimmelmeier, J.A.Font, E.Müller*, *Astron. Astrophys.*, **393**, 523, 2002.