ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.23

Г. А. Амирджанян[1], А. Г. Камалян[2], Г. А. Камалян[1]

О некоторых типах факторизации матриц-функций

(Представлено академиком А. Б. Нерсесяном 30/IX 2019)

Ключевые слова: *теплицев оператор, индексное подпространство, индексная факторизация.*

1^0**.** Пусть $\Omega^+(\ni 0)$ – ограниченная многосвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с границей, состоящей из конечного числа замкнутых непересекающихся жордановых спрямляемых кривых, $\Omega^- = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}^+$, $L_p^{\pm}$ $(1 \le p \le \infty)$ – подпространство функций из L_p $(= L_p(\Gamma))$, совпадающих почти всюду на Γ с угловыми предельными значениями функций из класса Смирнова $E_p^{\pm}$ области $\Omega^{\pm}$ (см. [1, 2]), $\overset{\circ}{L_p^-} = \{f \in L_p^- \,; f(\infty) = 0\}$, а P_+ (P_-) – оператор, проектирующий прямую сумму $\mathcal{L}_p = L_p^+ \dot{+} \overset{\circ}{L_p^-}$ на L_p^+ $(\overset{\circ}{L_p^-})$ параллельно $\overset{\circ}{L_p^-}$ (L_p^+). Далее, пространство вектор-столбцов (матриц) порядка n $(n \times m)$ с элементами из линеала X будем обозначать через X^n $(X^{n\times m})$. Действие проекторов $P_{\pm}$ в $\mathcal{L}_p^n$ $(\mathcal{L}_p^{n\times m})$ будем понимать покомпонентно, а вместо слов матрица-функция и вектор-функция употреблять сокращения соответственно м.-ф. и в.-ф.

Пусть G – м.-ф. порядка $n \times n$, элементы которой почти всюду на контуре Γ принимают конечные комплексные значения. Ниже будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathcal{D}_{\ell_-,p}^-$ $(\mathcal{D}_{r,p}^+)$ – пространство всех в.-ф. $\varphi_- \in \left(L_p^-\right)^n$ $(\varphi_+ \in \left(L_p^+\right)^n)$ таких, что $G\varphi_- \in \mathcal{L}_p^n$ $(G\varphi_+ \in \mathcal{L}_p^n)$; $\mathcal{D}_{\ell_-,p}^+$ $(\mathcal{D}_{r_+,p}^-)$ – пространство всех в.-ф. $\varphi_+ \in \left(L_p^+\right)^n$ $(\varphi_- \in \left(L_p^-\right)^n)$, для которых существует $\varphi \in \mathcal{L}_p^n$ такое, что $\varphi_+ = G\varphi$ $(\varphi_- = G\varphi)$; τ_α $(\alpha \in \mathbb{C})$, τ'_α $(\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ – операторы, действующие на функцию (в.-ф., м.-ф.) по формулам $(\tau_\alpha f)(t) = (t-\alpha)f(t)$, $\tau'_\alpha = -\alpha^{-1}\tau_\alpha\tau_0^{-1}$, $\tau'_\infty = \tau_0^{-1}$; $T_{\ell_-,p,j}$, $T_{r_+,p,j}$ $(j \in \mathbb{Z})$ семейства теплицевых операторов с областями определения $\mathcal{D}_{\ell_-,p}^-$ и $\mathcal{D}_{r_+,p}^+$ соответственно, действующие по формулам $T_{\ell_-,p,j}\varphi_- = \tau_0 P_-(\tau_0^{-(j+1)} G\varphi_-)$, $T_{r_+,p,j}\varphi_+ = P_+(\tau_0^{-j} G\varphi_+)$; $N_{\ell_-,p,j}^- = \ker T_{\ell_-,p,j}$, $N_{r_+,p,j}^+ = \ker T_{r_+,p,j}$.

В.-ф. $\varphi_- = \tau_0^{-j+1} G\varphi_+$ называют (r_+, p, j)-двойственной к в.-ф. $\varphi_+ \in N_{r,p,j}^+$, а множество в.-ф., двойственных к элементам множества $M \subset N_{r_+,p,j,}^+$ называют (r_+, p, j)-двойственным множеством к M (см. [3]). Подпространство (r_+, p, j), двойственное к $N_{r_+,p,j}^+$, обозначим через $N_{r_+,p,j}^-$. Следуя [3], подпространство $\widehat{N}_{r_+,p,j}^{\pm} := N_{r_+,p,j}^{\pm} + \tau_0^{\pm 1} N_{r_+,p,j}^+$ будем называть $(r_+, p, j)_{\pm}$ наследственным, а его произвольное прямое дополнение $M_{r_+,p,j}^{\pm}$ в $N_{r_+,p,j+1}^+$ соответственно (r_+, p, j) – индексным подпространством м.-ф. G. Как известно (см. [3]), $\dim M_{r_+,p,j}^+ = \dim M_{r_+,p,j}^-$, а число $\hat{n}_{r_+} := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dim M_{r_+,p,j}^+$ удовлетворяет неравенству $\hat{n}_{r_+} \le n$. Это обстоятельство позволило ввести естественное понятие (r_+, p, j) частных индексов м.-ф. G (см. [3, 4]) вне зависимости от существования стандартной факторизации Винера – Хопфа. В случае $\hat{n}_{r_+} = n$, следуя [4], будем говорить, что м.-ф. G допускает (r_+, p)-конечную индексацию. В случае $\hat{n}_{r_+} < n$ в [4] введено понятие бесконечных индексов. В [4] изучены также факторизационные свойства м.-ф., допускающих (r_+, p)-конечную индексацию и введено понятие (r_+, p)-индексной факторизации.

В работе [5] исследована (r_+, p)-факторизация мероморфных матриц-функций. В данной работе вводятся и изучаются понятия (ℓ_-, p) частных индексов, (ℓ_-, p) конечной индексации, (ℓ_-, p) индексной факторизации. Определяются также (r_-, p) и (ℓ_+, p) варианты этих понятий.

2^0. В.-ф. $\varphi_+ = \tau_0^{-j-1} G\varphi_-$ назовем (ℓ_-, p, j) двойственной к в.-ф. $\varphi_- \in N_{\ell_-,p,j}^-$. Множество в.-ф. (ℓ_-, p, j), двойственных к элементам $N_{\ell_-,p,j}^-$, является подпространством, которое будем обозначать через $N_{\ell_-,p,j}^+$ и называть двойственным к $N_{\ell_-,p,j}^-$. Пространство $\widehat{N}_{\ell_-,p,j}^- := N_{\ell_-,p,j}^{\mp} + \tau'_\alpha N_{\ell_-,p,j}^{\mp}$ $(\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ не зависит от α и является подпространством $N_{\ell_-,p,j-1}^{\mp}$. Это пространство будем называть $(\ell_-, p, j)_{\mp}$ наследственным подпространством м.-ф. G. Произвольное прямое дополнение $\widehat{N}_{\ell_-,p,j}^{\mp}$ в $N_{\ell_-,p,j-1}^{\mp}$ будем называть $(\ell_-, p, j)_{\mp}$ индексным подпространством G. Пространство $\widehat{N}_{\ell_-,p,j}$ является $(\ell_-, p, j-1)$ двойственным к $\widehat{N}_{\ell_-,p,j}^-$. Нетрудно видеть, что если $\varphi_- \in N_{\ell_-,p,j-1}^-$ $(\varphi_+ \in N_{\ell_-,p,j-1}^+)$, $\tau'_\alpha \varphi_- \in \mathcal{D}_{\ell_-,p}^-$ $(\tau_\alpha^{-1}\varphi_+ \in \mathcal{D}_{\ell_-,p}^+)$ при некотором $\alpha \in \overline{\Omega}^-$ $(\alpha \in \Omega_+)$, то $(\tau'_\alpha)^{-1}\varphi_- \in N_{\ell_-,p,j}^-$, $(\tau_\alpha^{-1}\varphi_+ \in N_{\ell_-,p,j}^+)$. Нетрудно также убедиться, что множество элементов $(\ell_-, p, j)_-$, двойственное к элементам $(\ell_-, p, j)_-$ индексного пространства м.-ф. G, является $(\ell_-, p, j)_+$ индексным подпространством м.-ф. G. В этом смысле любое $(\ell_-, p, j)_+$ индексное подпространство является двойственным к некоторому $(\ell_-, p, j)_-$ индексному подпространству, причем размерности этих индексных подпространств совпадают. Индексные подпространства обладают следующим свойством.

Теорема 1. *За исключением, быть может, конечного числа $j \in \mathbb{Z}$ все $(\ell_-, p, j)_{\mp}$ индексные подпространства являются нулевыми. Кроме того* *для произвольного набора* $(\ell_-, p, j)_\mp$ *индексных подпространств* $M^\mp_{\ell_-,p,j}$ *справедливо неравенство*

$$\hat{n}_{\ell_-} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dim M^\mp_{\ell_-,p,j} \leq n\,.$$

Для $z \in \Omega^-$ подпространства $N^-_{\ell_-,p,j-1}(z)$, $M^-_{\ell_-,p,j-1}(z)$ и для $z \in \Omega^+$ подпространства $N^+_{\ell_-,p,j-1}(z)$, $M^+_{\ell_-,p,j-1}(z)$ определены следующим образом:

$$N^\mp_{\ell_-,p,j}(z) = \left\{\varphi_\mp(z);\ \varphi_\mp \in N^\mp_{\ell_-,p,j-1}\right\},$$

$$M^\mp_{\ell_-,p,j}(z) = \left\{\varphi_\mp(z);\ \varphi_\mp \in M^\mp_{\ell_-,p,j-1}\right\}.$$

Нетрудно убедиться, что для $j \in \mathbb{Z}$ и соответствующих z справедливы равенства:

$$N^\mp_{\ell_-,p,j}(z) \dot{+} M^\mp_{\ell_-,p,j}(z) = N^\mp_{\ell_-,p,j-1}(z) \tag{1}$$

$$\dim M^\mp_{\ell_-,p,j}(z) = \dim M^-_{\ell_-,p,j} = \dim M^+_{\ell_-,p,j}\,. \tag{2}$$

Из равенств (1) следует

Теорема 2. *Пусть* $k > i$ $(k, i \in \mathbb{Z})$ и $\xi_1 > \xi_2 > \cdots > \xi_s$ *все возможные целые значения* j $(k \geq j > i)$, *для которых* $(\ell_-, p, j)_\mp$ *индексные подпространства ненулевые. Тогда*

$$N^\mp_{\ell_-,p,j} = \left(N^\mp_{\ell_-,p,k} + \tau_0^{\mp 1} N^\mp_{\ell_-,p,k} + \cdots + \left(\tau_0^{\mp 1}\right)^{-i+k} N_{\ell_-,p,k}\right) \dot{+}$$

$$\dot{+} M^\mp_{\ell_-,p,\xi_1} \dot{+} \tau_0^{\mp 1} M^\mp_{\ell_-,p,\xi_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \left(\tau_0^\mp\right)^{-i+\xi_1-1} M^\mp_{\ell_-,p,\xi_1} \dot{+}$$

$$\dot{+} M^\mp_{\ell_-,p,\xi_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \left(\tau_0^\mp\right)^{-i+\xi_s-1} M^\mp_{\ell_-,p,\xi_s}\,,$$

где $M^\mp_{\ell_-,p,\xi_m}$ *(*$m = 1, \ldots, s$*) произвольные* $(\ell_-, p, \xi_m)_\pm$ *индексные подпространства.*

3^0. Точку $z_\mp \in \Omega^\mp$ назовем (ℓ_-, p)-регулярной для м.-ф. G, если для некоторого $j \in \mathbb{Z}$

$$\dim N^\mp_{\ell_-,p,i}(z_\mp) = \max_{z\in\Omega^\mp} \dim N^\mp_{\ell_-,p,i}(z)\,.$$

Аналогично [3] нетрудно убедиться, что множество нерегулярных для м.-ф. G в $\Omega^\mp$ не более чем счетно, а числа

$$n_+ = n_+(\ell_-, p, G) := \dim\left(\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} N^-_{\ell_-,p,j}(z)\right),$$

$$n_{-} = n_{-}(\ell_{-}, p, G) \coloneqq n - \dim\left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} N^{-}_{\ell_{-},p,j}(z)\right)$$

одинаковы для всех регулярных точек из Ω^{-}. Функцию $\mu_{\ell_{-},p}: \widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{N}_0$ ($\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) определим с помощью равенств $\mu_{\ell_{-},p}(j) = \dim M^{-}_{\ell_{-},p,j}$ $(j \in \mathbb{Z})$ и $\mu_{\ell_{-},p}(\pm\infty) = n_{\pm}(\ell_{-}, p, G)$. Условимся $\chi_{\pm\infty,1} = \dots = \chi_{\pm\infty,n_{\pm}} = \pm\infty$ называть $\pm$ бесконечными (ℓ_{-}, p) частными индексами м.-ф. G. Пусть $\{\eta_1, \dots, \eta_s\} = \{j \in \mathbb{Z};\ \mu_{\ell_{-},p}(j) > 0\}$, $\eta_1 > \eta_2 > \dots > \eta_s$, $\mu_{\ell_{-},p}(\eta_i) = n_i$ $(i = 1, \dots, s)$. Числа $\chi_1, \dots, \chi_{\hat{n}}$, определенные равенствами $\chi_1 = \dots = \chi_{n_1} = \eta_1$, $\chi_{n_1+1} = \dots = \chi_{n_1+n_2} = \eta_2$, ..., $\chi_{n_1+n_2+\dots+n_{s+1}+1} = \dots = \chi_{\hat{n}} = \eta_s$, будем называть (ℓ_{-}, p) частными индексами м.-ф. G. В случае $\hat{n} = n$ будем говорить, что м.-ф. G допускает конечную (ℓ_{-}, p) индексацию. Из равенств (1), (2) следует, что в случае конечной индексации для любого $k \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство

$$\dim N^{\mp}_{\ell_{-},p,k} = \sum_{j>k} (j-k)\mu_{\ell_{-},p}(j)\,.$$

Если $\xi_1 > \dots > \xi_s$ все возможные значения (ℓ_{-}, p) частных индексов м.-ф. G, а $M^{\mp}_{\ell_{-},p,\xi_k}$ $(k = 1, \dots, s)$ произвольные (ℓ_{-}, p, ξ_k) индексные подпространства м.-ф. G, то пространство $M^{\mp}_{\ell_{-},p} = M^{\mp}_{\ell_{-},p,\xi_1} \dotplus \dots \dotplus M^{\mp}_{\ell_{-},p,\xi_s}$ будем называть $(\ell_{-}, p)_{\mp}$ индексным пространством м.-ф. G. Если $M^{+}_{\ell_{-},p,\xi_k}$ $(k = 1, \dots, s)$ являются $(\ell_{-}, \xi_k - 1)$ двойственными к $M^{-}_{\ell_{-},p,\xi_k}$, то $(\ell_{-}, p)_{\mp}$, индексные пространства $M^{\mp}_{\ell_{-},p}$ будем называть двойственными. Скажем, что м.-ф. G допускает (ℓ_{-}, p) индексную факторизацию, если имеет место представление

$$G = G_{+} \wedge G_{-}^{-1}, \tag{3}$$

где a) $G_{\mp} \in \left(L_p^{\mp}\right)^{n\times n}$; b) для любых $z \in \overline{\Omega}^{-}$, $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, в.-ф. $(\tau_z')^{-1} G_{-} v$ не принадлежит $\mathcal{D}^{-}_{\ell_{-},p}$; c) для любых $z \in \Omega^{+}$, $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, в.-ф. $\tau_z^{-1} G_{+} v$ не принадлежит $\mathcal{D}^{+}_{\ell_{-},p}$; d) $\Lambda(t) = diag[t^{\chi_1}, \dots, t^{\chi_n}]$, $\chi_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \dots, n)$ и $\chi_1 \geq \chi_2 \geq \dots \geq \chi_n$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть м.-ф. G имеет конечную (ℓ_{-}, p) индексацию и $M^{\mp}_{\ell_{-},p}$ – некоторые двойственные $(\ell_{-}, p)_{\mp}$ индексные пространства м.-ф. G. Тогда м.-ф. G допускает индексную факторизацию (3), где числа $\chi_1 \geq \dots \geq \chi_n$ совпадают с (ℓ_{-}, p) частными индексами G, а столбцы м.-ф. $G_{\mp}$ являются базисом $M^{\mp}_{\ell_{-},p}$.*

Теорема 4. *Пусть м.-ф. G допускает (ℓ_{-}, p) индексную факторизацию (3) и $\mu_{\ell_{-},p}(+\infty) = 0$. Тогда м.-ф. G допускает (ℓ_{-}, p) конечную индексацию с (ℓ_{-}, p) частными индексами, совпадающими с числами*

$\chi_1, \dots, \chi_n$. *Кроме того столбцы м.-ф.* $G_\pm$ *являются базисом некоторых двойственных* (ℓ_-, p) *индексных пространств.*

Заметим, что если $G = G_+ \wedge G_-^{-1}$ и $G = G'_+ \wedge G'^{-1}_-$ две различные (ℓ_-, p) индексные факторизации, то существует невырожденная полиномиальная от z^{-1} м.-ф. $Q = \left(q_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ с элементами, удовлетворяющими условиям

$$q_{ij} = 0 \text{ при } j < i; \deg q_{ij} \le \chi_i - \chi_j \text{ при } j \ge i, \tag{4}$$

такая, что

$$G'_- = G_- Q, G'_+ = G_+ \Lambda Q \Lambda^{-1}. \tag{5}$$

Обратно, если представление $G = G_+ \wedge G_-^{-1}$ является (ℓ_-, p) индексной факторизацией м.-ф. G, а $G'_\pm$ определены по формулам (5), где элементы полиномиальной от z^{-1} м.-ф. Q удовлетворяют условиям (4), то представление $G = G'_+ \wedge (G'_-)^{-1}$ также является (ℓ_-, p) индексной факторизацией м.-ф. G.

Напомним (см. [2]), что под левой факторизацией Винера – Хопфа (далее $WH(\ell, p)$) м.-ф. G в пространстве L_p $(1 < p < \infty)$ относительно контура Γ понимают представление вида $G = G_+ \wedge G_-^{-1}$, где $G_\pm \in \left(L_p^\pm\right)^{n \times n}$, $(G_\pm)^{-1} \in \left(L_q^\pm\right)^{n \times n}$ $\left(q = {}^p/_{p-1}\right)$, $\Lambda(t) = diag[t^{\chi_1}, \dots, t^{\chi_n}]$, $\chi_1 \ge \dots \ge \chi_n$ ($\chi_1, \dots, \chi_n$ – целые числа, называемые левыми частными p-индексами м.-ф. G).

Следующая теорема устанавливает связь между $WH(\ell, p)$ факторизацией и (ℓ_-, p) индексной факторизацией.

Теорема 5. *Пусть м.-ф.* G *допускает* $WH(\ell, p)$ *факторизацию* $(1 < p < \infty)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) *м.-ф.* G *допускает конечную* (ℓ_-, p) *индексацию, причем ее* (ℓ_-, p) *частные индексы совпадают с левыми частными индексами м.-ф.* G;
b) $WH(\ell, p)$ *факторизация м.-ф.* G *является одновременно* (ℓ_-, p) *индексной факторизацией;*
c) *произвольная* (ℓ_-, p) *индексная факторизация м.-ф.* G *одновременно является* $WH(\ell, p)$ *факторизацией.*

4^0. Под (ℓ_+, p) частными индексами м.-ф. G будем понимать (r_+, p) частные индексы транспонированной м.-ф. G'. Аналогично, под (r_-, p) частными индексами м.-ф. G будем понимать (ℓ_-, p) частные индексы м.-ф. G'. Эти понятия могут быть введены независимо с помощью ядер операторов $T'_{\ell_+,p,j}$, $T'_{r_-,p,j}$ $(j \in \mathbb{Z})$, действующих соответственно в $\left(L_p^+\right)^n$ и $\left(L_p^-\right)^n$ (с естественными областями определения) по формулам:

$$T'_{\ell_+,p,j}\varphi_+ = \left(P_+\left(\varphi_+^t \tau_0^{-j} G\right)\right)^t, \qquad T'_{r_-,p,j}\varphi_- = \left(\tau_0 P_-\left(\varphi_-^t \tau_0^{-(j+1)} G\right)\right)^t.$$

Будем говорить, что м.-ф. G допускает (r_-, p) конечную индексацию (соответственно (ℓ_+, p) конечную индексацию), если G' допускает (ℓ_-, p) конечную индексацию ((r_+, p) конечную индексацию).

Аналогичным образом могут быть введены понятия (r_-, p) и (ℓ_+, p) индексные факторизации. Свойства введенных понятий могут быть без труда сформулированы и доказаны переходом к соответствующим (ℓ_-, p) и (r_+, p) понятиям для м.-ф. G'.

[1] Армянский государственный экономический университет
[2] Ереванский государственный университет, Институт математики НАН РА
e-mail: ahrah83@gmail.com; armen.kamalyan@ysu.am,
kamalyan_armen@yahoo.com; h.qamalyan@gmail.com

Г. А. Амирджанян, А. Г. Камалян, Г. А. Камалян

О некоторых типах факторизации матриц-функций

Определены некоторые типы факторизации матрицы-функции, определенной на замкнутом контуре комплексной плоскости. Такие факторизации называются индексными и обобщают как левую, так и правую факторизацию Винера – Хопфа. Наиболее подробно рассматривается левая индексная факторизация, определение которой основано на понятии левых частных индексов.

Հ. Ա. Ամիրջանյան, Ա. Հ. Քամալյան, Հ. Ա. Քամալյան

Մատրից-ֆունկցիաների որոշ տիպի ֆակտորիզացիաների մասին

Սահմանված են կոմպլեքս հարթության փակ կոնտուրի վրա որոշված մատրից-ֆունկցիայի որոշ տիպի ֆակտորիզացիաներ: Այդ ֆակտորիզացիաները կոչվում են ինդեքսային և ընդհանրացնում են Վիներ-Հոպֆի ինչպես ձախակողմյան, այնպես էլ աջակողմյան ֆակտորիզացիաները: Առավել մանրամասն դիտարկվում է ձախակողմյան ինդեքսային ֆակտորիզացիան, որի սահմանումը հիմնված է ձախակողմյան մասնակի ինդեքսներ հասկացության վրա:

H. A. Amirjanyan, A. G. Kamalyan, H. A. Kamalyan

On the Some Types of Factorization of Matrix Functions

Some types of factorization of matrix functions are defined in this article. Matrix functions are defined on a closed countour of the complex plane. These factorizations are called index factorizations and summarize both left and right Wiener-Hopf factorization. The left index factorization is considered most detailed which definition is baced on the concept of left partial indices.

Литература

1. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.-Л. ГИТЛ, 1950.
2. *Litvinchuk G. S., Spitkovskii I. M.* Factorization of Measurable Matrix Functions. OT: Advances and Applications. V. 25. Basel-Boston, Birkhäser, Verlag. 1987.
3. *Камалян А. Г.* – ДНАН РА. 2007. Т. 107. № 4. С. 316–322.
4. *Камалян А. Г.* – ДНАН РА. 2008. Т. 108. № 1. С. 5–11.
5. *Амирджанян Р. А., Камалян А. Г.* – Изв. НАН РА. Математика. 2007. Т. 42. № 6. С. 31–50.