

упругости или инерции масс. Поэтому реактивное сопротивление бывает упругим или инерционным. Наличие частоты говорит о том, что граничное условие должно быть комплексным выражением, и поэтому в настоящей статье предлагается модель для исследования распространения волн в упругих телах (полупространство с тонким слоем), где на внешней границе слоя касательное напряжение линейно меняется с соответствующей составляющей скорости.

1. Постановка задачи. Рассматриваются чисто сдвиговые упругие волны в системе слой – полупространство. Полупространство из упругого материала в прямоугольной системе координат (x, y, z) занимает область $x, z \in (-\infty, \infty), y \in [0, \infty)$, а слой – область $x, z \in (-\infty, \infty), y \in [-h, 0]$. Величины, относящиеся к слою, будут отмечаться индексом 1, соответствующие величины для полупространства будут без индексов.

Уравнение чисто сдвиговых волн в слое имеет вид [5]

$$\frac{\partial \sigma_{13}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(1)}}{\partial y} = \rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

где

$$\sigma_{13}^{(1)} = \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial x}, \sigma_{23}^{(1)} = \mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial y}. \quad (1.2)$$

Соответствующее уравнение и материальные связи для полупространства следующие:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

$$\sigma_{13} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \sigma_{23} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.4)$$

Предполагается, что на внешней границе слоя задано условие

$$\sigma_{23}^1 + \alpha_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} = 0 \quad \text{при } y = -h. \quad (1.5)$$

На плоскости контакта слоя и полупространства принимается непрерывность перемещения и напряжения

$$w_1 = w, \quad \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}, \quad \text{при } y = 0. \quad (1.6)$$

Требуется найти решения уравнений (1.1), (1.3), удовлетворяющие граничным условиям (1.5), (1.6) и условию затухания

$$\lim_{y \rightarrow \infty} w = 0. \quad (1.7)$$

2. Решение краевой задачи с граничным условием (1.5). Решение волнового уравнения (1.3) с учетом (1.4) представляется в виде [5]

$$w = A e^{kpy} \exp i(\omega t - kx), \quad (2.1)$$

где

$$p^2 - (1 - \eta^2) = 0 \quad \eta = \frac{\omega}{kc_t} c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2.2)$$

Для того чтобы решение (2.1) удовлетворяло условию затухания (1.7), необходимо, чтобы имело место неравенство

$$\operatorname{Re} p < 0. \quad (2.3)$$

В случае волн Лява ($\alpha_0 = 0$) получается $\eta^2 < 1$ и $p = -\sqrt{1 - \eta^2}$, т.е. для p получается действительное значение.

Если принять комплексные выражения

$$\omega = \alpha_1 + i\beta_1, \quad p = r + iq, \quad (2.4)$$

то условию затухания будет удовлетворять корень уравнения (2.2)

$$p_1 = -\Gamma + i\alpha\beta/\Gamma. \quad (2.5)$$

В (2.5) приняты новые обозначения:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{kc_t}, \quad \beta = \frac{\beta_1}{kc_t'}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{(1 - \alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \right]^{1/2}. \quad (2.6)$$

При этом решение (2.1) при $p = p_1$ из (2.5) будет удовлетворять условию затухания, если

$$0 < \alpha^2 < 1 + \beta^2. \quad (2.7)$$

Примем, что слой достаточно тонок по сравнению с длиной волны. Запишем уравнение (1.1) в виде

$$\mu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(1)}}{\partial y} = \rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}. \quad (2.8)$$

Для уравнения (2.8) примем, что $w_1 = w_1(x, t)$, и после этого проинтегрируем его по y от $-h$ до 0 ; с учетом граничных условий (1.5) и (1.6) получим

$$h\mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha_0 \frac{\partial w}{\partial t} - \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (2.9)$$

Таким образом, для определения постоянного A решения (2.1) получили граничное условие (2.9).

3. Дисперсионное уравнение и численные результаты. Из (2.1) и (2.9) при значении корня $p = p_1$ из (2.5) получим дисперсионное уравнение, которое после деления на действительную и мнимую части преобразуется к системе алгебраических уравнений относительно искомым безразмерных параметров α, β

$$\begin{aligned} \frac{H}{\Gamma}(1-\theta(\alpha^2-\beta^2))+\beta\alpha_*+\Gamma &= 0, \\ \delta\alpha\beta+\delta\alpha\alpha_*\Gamma+2\alpha\beta\Gamma &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В (3.1) введены обозначения

$$c_{i1}^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1}, \quad \theta = \frac{c_t^2}{c_{i1}^2}, \quad kh = H, \quad \alpha_* = \frac{\alpha_0 c_t}{\mu}, \quad \gamma = \frac{\mu}{\mu_1}, \quad \delta = \frac{\rho}{\rho_1}.$$

Из (3.1), когда частота ω действительная, следует $\beta = 0$, и решение, удовлетворяющее условию затухания (1.7), существует, если $\theta > 1$.

При подстановке решения (2.1) в граничное условие (2.9) получается дисперсионное уравнение для полупространства с тонким слоем с граничным условием (1.5)

$$H(\eta^2\theta-1)+i\gamma\eta\alpha_*-\gamma\sqrt{1-\eta^2}=0. \quad (3.2)$$

Если $\alpha_* = 0$, то из (3.2) получается дисперсионное уравнение задачи Лява для полупространства с тонким слоем, которое имеет действительное решение, удовлетворяющее условию затухания (1.7) при $\theta > 1$. Уравнение (3.2) запишем в виде

$$\sqrt{1-\eta} = \frac{1}{\sqrt{1+\eta}}(\gamma^{-1}H(\eta^2\theta-1)+i\alpha_*\eta). \quad (3.3)$$

Запись (3.3) удобна для нахождения корня уравнения (3.2) методом последовательных приближений:

$$\eta_n = 1 - \frac{1}{1+\eta_{n-1}}(\gamma^{-1}H(\eta_{n-1}^2\theta-1)+i\alpha_*\eta_{n-1}). \quad (3.4)$$

α_* γ	1	1.5
0.01	0.9574-0.0042i	0.9688-0.0044i
0.05	0.9572-0.0208i	0.9686-0.0219i
0.1	0.9565-0.0417i	0.9678-0.0439i
0.5	0.9345-0.2083i	0.9437-0.2193i

Численные решения уравнения (3.2) при значениях параметров $\theta = 2$, $H = 0.1$, $\gamma = 1$ и $\gamma = 1.5$ в зависимости от α_* , которое характеризует линейное изменение касательного напряжения от соответствующей составляющей скорости, приведены в таблице.

Таким образом, наличие на внешней границе слоя условия (1.5) (полупространство с тонким слоем) приводит к незначительному усилению затухания по глубине.

4. Решение краевой задачи с импедансными граничными условиями. Теперь рассмотрим задачу Лява с импедансными граничными условиями (на границе полупространства нормальное и касательное напряжения линейно изменяются с соответствующей составляющей перемещения, умноженной на частоту) [6-8]. Граничное условие (1.5) заменяется на

$$\sigma_{23}^1 + \omega Z w_1 = 0 \quad \text{при } y = -h. \quad (4.1)$$

Здесь ω – частота ($\omega \in R$), $Z \in R$ ($Z = const$). Условие (4.1) соответствует следующей модели: упругий слой покрыт бесконечно тонкой мембраной, допускающей свободные нормальные перемещения на границе и препятствующей касательным перемещениям. Отметим, что при $Z = 0$ из (4.1) имеем слой со свободной от напряжений границей, а при $Z \mapsto \infty$ – слой с закрепленной границей.

Удовлетворяя решениям (2.1) и (2.8) и граничным условиям (1.6) и (4.1), получим дисперсионное уравнение

$$\operatorname{tg}\left(kh\sqrt{\theta\eta^2 - 1}\right) = \frac{\gamma - \frac{\omega Z}{\mu_1 k \sqrt{1 - \eta^2}}}{\sqrt{\theta\eta^2 - 1} + \frac{\gamma\omega Z}{\mu_1 k \sqrt{\theta\eta^2 - 1}}}. \quad (4.2)$$

Из (4.2) при $Z = 0$ получается дисперсионное уравнение задачи Лява [5].

Для полупространства с тонким слоем дисперсионное уравнение запишется в виде

$$\frac{\gamma}{H} \sqrt{1 - \eta^2} = (\theta\eta^2 - 1) + \frac{Zc_t}{\mu_1 H} \eta. \quad (4.3)$$

При $Z = 0$ уравнение (4.3) имеет действительное решение $\frac{1}{\theta} < \eta^2 < 1$, удовлетворяющее условию затухания (1.7), если $\theta > 1$. Уравнение (4.3) при $Z \in R$ не имеет действительного решения. Следовательно, для полупространства с тонким слоем с импедансными граничными условиями (4.1) сдвиговые упругие волны не существуют.

Заключение. Таким образом, показано, что для полупространства с тонким слоем с импедансными граничными условиями сдвиговые упругие волны не существуют, в то время как в рассмотренной структуре (полупространство с тонким слоем), где на внешней границе слоя касательное напряжение линейно изменяется с соответствующей составляющей скорости, сдвиговые упругие волны существуют. На основе исследования упро-

ценных уравнений проанализирован волновой процесс в рассмотренной структуре.

¹Институт механики НАН РА

²Ереванский государственный университет

e.mail: vas@ysu.am

М. В. Белубекян, С. В. Саркисян

Распространение волн в системе тонкий слой – полупространство со смешанными граничными условиями

Предлагается модель для исследования распространения волн в упругих телах (полупространство с тонким слоем), где на внешней границе слоя касательное напряжение линейно меняется с соответствующей составляющей скорости.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Ս. Վ. Սարգսյան

Ալիքների տարածումը բարակ շերտ - կիսատարածություն համակարգում խառը եզրային պայմաններով

Առաջարկված է մի մոդել, որի միջոցով կարելի է հետազոտել ալիքների տարածումը առաձգական մարմիններում (բարակ շերտով կիսատարածություն), երբ շերտի արտաքին եզրին շոշափող լարումը փոփոխվում է գծայնորեն՝ արագության բաղադրիչին համապատասխան:

M. V. Belubekyan, S. V. Sarkisyan

Propagation of Waves in a Thin Layer – Half-Space System with Mixed Boundary Conditions

The model is offered for the study of wave propagation in elastic bodies (half-space with a thin layer), where the shear stress on the outer boundary of the layer varies linearly with the corresponding component velocity.

Литература

1. *Kossovich L. Y., Mukhomodyarov R. R., Parfenova Y. A.* – Vestnik of Samara University. Natural Science Series. Mechanics. 2008. № 8/2 (67). P. 78-89 (in Russian).
2. *Meleshko V. V., Bondarenko A. A., Dovgiy S. A. et al.* – Mathematical methods and physico-mechanical fields. 2008. V. 51. № 2. P. 86-104 (in Russian).
3. *Belubekyan M. V.* – Proc. of NAS of Armenia. Mechanics. 2011. V. 64. № 4. P. 3-6 (in Russian).
4. *Belubekyan M. V., Sarkisyan S. V.* – Z Angew Math Mech. 2018. V. 98. P. 1623–1631. <https://doi.org/10.1002/zamm.201700157>.

5. *Belubekyan V. M., Sarkisyan S. V.* – Reports of NAS RA. 2018. V. 118. № 1. P. 33-38 (in Russian).
6. *Pham Chi Vinh, Trinh Thi Thanh Hue* – Int. J. Eng. Sci. 2014. V. 85. P. 175-185.
7. *Pham Chi Vinh, Nguyen Quynh Xuan* – European Journal of Mechanics-A/Solids. 2017. V. 61. P. 180-185.
8. *Baljeet Singh* – Geosciences Research. 2017. November, V. 2. № 4. <https://dx.doi.org/10.22606/gr.2017.24004>.
9. *Шутилов В. А.* Основы физики ультразвука: Учеб. пособие. Изд-во Ленингр. ун-та. 1980. 280 с.