

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Р. В. Даллакян

Аналог одной теоремы Вербицкого для произведений Джрбашяна

(Представлено академиком В. С. Захаряном 17/VI 2019)

Ключевые слова: оператор интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, последовательность (wN) .

Введение. Пусть $\mathcal{D}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $-1 < \alpha < +\infty$ и пусть последовательность $\{a_n\} \subset \mathcal{D}, a_n \neq 0, n = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\sum_n (1 - |a_n|)^{1+\alpha} < +\infty. \quad (1)$$

Произведение М. М. Джрбашяна $B_\alpha(z; \{a_n\}), z \in \mathcal{D}$, определяется (см. [1], гл. IX) следующим образом:

$$B_\alpha(z; \{a_n\}) = \prod_n \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\{-W_\alpha(z; a_n)\},$$

где для $\xi \in \mathcal{D}$

$$W_\alpha(z; \xi) = \int_{|\xi|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \left\{ \xi^{-k} \int_0^{|\xi|} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx - \bar{\xi}^k \int_{|\xi|}^1 (1-x)^\alpha x^{-k-1} dx \right\} z^k.$$

В частном случае $\alpha = 0$ эти произведения совпадают с произведением Бляшке (см. [1], с. 625):

$$B(z; \{a_n\}) \equiv B_0(z; \{a_n\}) = \prod_n \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \cdot \frac{|a_n|}{a_n}.$$

Оператор интегро-дифференцирования $D^{-\alpha} (-1 < \alpha < +\infty)$ в смысле Римана – Лиувилля с началом в нулевой точке определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha} \{ \varphi(r) \} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, & \text{если } 0 < \alpha < +\infty, \\ \varphi(r), & \text{если } \alpha = 0, \\ \frac{d}{dr} D^{-(1+\alpha)} \{ \varphi(r) \}, & \text{если } -1 < \alpha < 0. \end{cases}$$

В [2] доказано утверждение о взаимосвязи между произведениями B_α ($-1 < \alpha < 0$) и B .

Теорема. Пусть $-1 < \alpha < 0$ и последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (1). Тогда

$$B_\alpha(z; \{a_n\}) = B(z; \{a_n\}) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z) d\omega(\theta) \right\}, \quad |z| < 1,$$

где

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1+\alpha) \left[\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right],$$

$\omega(\theta)$ – невозрастающая функция ограниченной вариации на $[0; 2\pi]$, имеющая вид

$$\omega(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\theta D^{-\alpha} \left\{ \log \left| \frac{B_\alpha(r_n e^{i\theta}; \{a_n\})}{B(r_n e^{i\theta}; \{a_n\})} \right| \right\} d\theta,$$

$$(0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots, r_n \uparrow 1).$$

Как хорошо известно (см. [3], с. 54). для существования радиального предела произведения Бляшке в граничной точке $e^{i\varphi}$ необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялось условие Фростмана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - |a_n|}{|e^{i\varphi} - a_n|} < +\infty,$$

где $\{a_n\}$ – последовательность нулей этого произведения.

Для произведений B_α ($-1 < \alpha < 0$) доказано (см. [4]), что если в граничной точке $e^{i\varphi}$ имеет место условие типа Фростмана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - |a_n|}{|e^{i\varphi} - a_n|} \right)^{1+\alpha} < +\infty,$$

то в этой точке существует конечный и отличный от нуля радиальный предел произведения B_α .

Говорят, что функция $f \in L^p(\partial\mathbb{D})$ входит в класс

$$Lip(\beta; p) (0 < \beta \leq 1, 1 \leq p < +\infty),$$

если ее L^p -модуль непрерывности

$$\omega_p(\delta) = \sup_{|\theta| \leq \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} \left| f(e^{i(\varphi+\theta)}) - f(e^{i\varphi}) \right|^p d\varphi \right\}^{1/p}$$

удовлетворяет условию $\omega_p(\delta) \leq \text{const} \delta^\beta$. Согласно теореме Харди – Литтлвуда (см. [5], с. 78) граничные значения функции f из пространства Харди H^p принадлежат классу $Lip(\beta; p)$ тогда и только тогда, когда

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \left| f'(re^{i\varphi}) \right|^p d\varphi \right\}^{1/p} \leq \frac{\text{const}}{(1-r)^{1-\beta}}.$$

Отметим, что при $\frac{1}{p} < \beta < 1$ имеем $Lip(\beta; p) \subset C(\partial D)$ (см. [5], с. 91).

Скажем, что последовательность $\{a_n\} \subset D$ удовлетворяет условию Ньюмана (N) , если

$$\sup_{n \geq 1} \frac{1 - |a_{n+1}|}{1 - |a_n|} < 1, (|a_n| \uparrow 1).$$

Скажем, что последовательность $\{a_n\} \subset D$ удовлетворяет условию (wN) , если состоит из конечного объединения (N) -последовательностей.

И. Э. Вербицким в [6] доказан следующий результат.

Теорема. Пусть B – произведение Бляшке, $\{a_n\}_{n \geq 1}$ – его нули. Следующие утверждения равносильны:

1. последовательность $\{a_n\}_{n \geq 1}$ удовлетворяет условию (wN) ;
2. $\hat{B}(k) = O\left(\frac{1}{k}\right)$;
3. $\sum_{k=N}^{\infty} |\hat{B}(k)|^2 = O(N^{-1})$;
4. $B \in Lip\left(\frac{1}{p}; p\right)$ для некоторого $p \in (1, \infty)$;
5. выполняется условие

$$\int_{\partial D} |B''(r\xi)| |d\xi| \leq C(1-r)^{-1}.$$

Целью настоящей работы является установление аналогичного результата для произведений B_α М. М. Джрбашяна.

Основные результаты. Сначала доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. Граничная функция сходящего произведения B_α ($-1 < \alpha \leq 0$) не может принадлежать классу $Lip(1; 1)$.

Теорема 2. Пусть $-1 < \alpha \leq 0$, последовательность $\{a_n\} \subset D$ удовлет-

воряет условию (1) и $B_\alpha(e^{i\varphi}; \{a_n\}) \in \text{Lip}(\beta; p)$, $1 < p < +\infty$. Тогда $0 < \beta \leq \frac{1}{p}$.

Далее доказывается аналог упомянутой выше теоремы И. Э. Вербицкого.

Теорема 3. Пусть $-1 < \alpha \leq 0$ и $B_\alpha(z; \{a_n\})$ – сходящее произведение Джрбашяна. Тогда следующие условия равносильны:

1. последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию (wN) ;
2. $\hat{B}_\alpha(k) = O\left(\frac{1}{k}\right)$;
3. $\sum_{k \geq m} |\hat{B}_\alpha(k)|^2 = O\left(\frac{1}{m}\right)$;
4. $B_\alpha(e^{i\varphi}; \{a_n\}) \in \text{Lip}\left(\frac{1}{p}; p\right)$ для некоторого $p \in (1, +\infty)$;
5. $\int_0^{2\pi} |B_\alpha''(re^{i\varphi})| d\varphi \leq \text{const}(1-r)^{-1}$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта N-18T-1AO19.

Армянский национальный политехнический университет
e.mail: dallakyan57@mail.ru

Р. В. Даллакян

Аналог одной теоремы Вербицкого для произведений Джрбашяна

М. М. Джрбашян, пользуясь оператором интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля, обобщил класс мероморфных в единичном круге функций N Неванлинны, введя классы N_α ($-1 < \alpha < +\infty$). «Роль» произведений Бляшке в этих классах играют произведения B_α Джрбашяна. В статье доказан аналог одной теоремы И. Э. Вербицкого для произведений Джрбашяна B_α ($-1 < \alpha < 0$).

Ռ. Վ. Դալլաքյան

Վերբիցկու մի թեորեմի անալոգը Զրբաշյանի արտադրյալների համար

Մ. Մ. Զրբաշյանը, օգտվելով Ռիման-Լիուվիլլի ինտեգրո-դիֆերենցման տեսությանից, ընդհանրացրել է Նևանլինայի միավոր շրջանում մերոմորֆ N դասերը՝

ներմուծելով N_α ($-1 < \alpha < +\infty$) դասեր: Այդ դասերում Բլաշկեի արտադրյալի «դերը» կատարում են B_α Ջրբաշյանի արտադրյալները: Այս աշխատանքում ապացուցված է Ի. Է. Վերբիցկու մի թեորեմի անալոգը Ջրբաշյանի B_α ($-1 < \alpha < 0$) արտադրյալների համար:

R. V. Dallakyan

On a Verbitsky's Type Theorem for M. M. Djrbashyan Products

M. M. Djrbashyan had generalized the Nevanlinna's functional class N , and using Riemann – Liouville integro-differentiation operator introduced N_α ($-1 < \alpha < +\infty$) classes. In these classes Blaske products are substituted by Djrbashyan products. One analog of Werbitsky's theorem for Djrbashyan products B_α ($-1 < \alpha < 0$) is obtained in this paper.

Литература

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные произведения и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 671 с.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* – Мат. заметки. 1968. Т. 4. Вып. 1. С. 3-10.
3. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* – Теория предельных множеств. М. Мир. 1971. 312 с.
4. *Захарян В. С.* – Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. Т. 3. № 4-5. С. 287-300.
5. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces. N. Y. and London, Ac. Press. 1970. 260 p.
6. *Вербицкий И. Э.* – Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1982. Т. 107. С. 27-35.