ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 2

МЕХАНИКА

УДК 529.3

Академик Г. Е. Багдасарян

Магнитоупругие волны Лява в случае магнитострикционного слоя

(Представлено 30/V 2019)

Ключевые слова: *поверхностные магнитоупругие волны, магнитострикция, магнитное поле, фазовая скорость, дисперсия.*

Известно [1], что при отсутствии внешнего магнитного поля в двухслойной среде (полупространстве) всегда можно возбуждать поверхностную волну Лява, скорость которой меньше скорости объемных поперечных волн в подложке и больше скорости указанных объемных волн в слое. Настоящая работа посвящена вопросам существования и характера распространения поверхностной магнитоупругой волны Лява в случае магнитострикционного слоя и идеально проводящего ферромагнитного полупространства. Установлено, что если среда находится в магнитном поле и ее материал обладает магнитострикционными свойствами, то: а) сохраняется вышеуказанный характер существования и распространения поверхностной волны, а присутствие магнитного поля имеет только количественное влияние; б) в среде будет распространяться новый тип поверхностных магнитоупругих волн, обусловленный исключительно магнитострикционным свойствам среды. Установлено также, что фазовая скорость новой поверхностной волны меньше скорости объемных поперечных волн в материале слоя и волна распространяется с дисперсией.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двухслойную магнитоупругую среду, состоящую из диэлектрического магнитострикционного слоя постоянной толщины h, лежащего на упругом, магнитомягком ферромагнитном полупространстве, материал которого является идеальным проводником.

Прямоугольная декартовая система координат $x_1x_2x_3$ выбрана так, что координатная плоскость x_1x_2 совпадает с плоскостью раздела, а ось x_2 направлена в глубь полупространства.

Предполагается, что область $x_2 < -h$ является вакуумом, а граница слоя $x_2 = -h$ свободна от внешней механической нагрузки. Рассматриваемая магнитоупругая система находится во внешнем стационарном магнитном поле, которое в отсутствие ферромагнитного тела характеризуется вектором напряженности $\vec{H}_0(0,0,H_0)$, где $H_0 = \text{const}$. Величины, отнесенные к области слоя $(-h < x_2 < 0)$, будем отмечать индексом «1», отнесенные к полупространству $(x_2 > 0)$ – индексом «2», отнесенные к области вакуума $(x_2 < -h)$ – индексом «е».

В этих условиях напряженность магнитного поля невозмущенного состояния всюду (в вакууме, в слое и в полупространстве) совпадает с напряженностью заданного магнитного поля $\vec{H}_0$. Более того, поскольку $\vec{H}_0$ параллельна границе полупространства и поверхностям слоя, то компоненты тензора напряжений Максвелла на поверхностях раздела являются непрерывными и поэтому поверхностные силы магнитного происхождения равны нулю. Нулю равны также объемные силы магнитного происхождения в невозмущенном состоянии, т.к. H_0 постоянная. Следовательно, в невозмущенном состоянии присутствие рассматриваемого магнитоактивного тела не меняет магнитное поле во всем пространстве, и, во-вторых, под действием невозмущенного магнитного поля в теле возникают только индуцированные напряжения s_{ij}^0, которые являются следствием намагничивания среды. Отметим [2], что в рассматриваемом случае влияние s_{ij}^0 на характеристики возмущенного состояния пренебрежимо мало по сравнению с влиянием магнитных объемных сил возмущенного состояния.

Учитывая сказанное, характеристики магнитного поля представляются в вид:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}, \quad \vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{m},$$

где $\vec{H}_0$, $\vec{B}_0$ и $\vec{M}_0$ – соответственно векторы напряженности магнитного поля, магнитной индукции и намагниченности недеформированного тела, $\vec{h}$, $\vec{b}$ и $\vec{m}$ – возмущения к указанным величинам, обусловленные деформацией среды. В вакууме векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ связаны соотношением $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, где μ_0 – магнитная постоянная $\left(\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Н}/\text{А}^2\right)$, а в магнитоактивном материале – соотношением $\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$. Следовательно, характеристики магнитного поля невозмущенного (недеформированного) состояния являются решением задачи магнитостатики рассматриваемого ферромагнитного тела и имеют следующие выражения:

в области вакуума

$$\vec{B}_0^{(e)} = \mu_0 \vec{H}_0, \quad \vec{H}_0^{(e)} = \vec{H}_0, \quad \vec{M}_0^{(e)} = 0;$$

в области слоя и полупространства

$$\vec{B}_0^{(i)} = \mu_0 \mu_r^{(i)} \vec{H}_0, \quad \vec{H}_0^{(i)} = \vec{H}_0, \quad \vec{M}_0^{(i)} = \chi^{(i)} \vec{H}_0^{(i)}, \ (i = 1, 2). \tag{1.1}$$

Характеристики возмущенного состояния определяются из уравнений и граничных условий теории магнитоупругости ферромагнитного тела [2-5]. Принимая возмущения малыми, путем линеаризации в работе [6] получены линейные уравнения и поверхностные условия, описывающие поведение малых возмущений в магнитоактивной упругой среде. Здесь на основе сформулированных в [6] линейных краевых задач исследуются существование и характер распространения малых магнитоупругих возмущений в случае антиплоской задачи. Тогда $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0$, и согласно модели идеальной проводимости $\vec{h}^{(2)} = rot\left(\vec{u} \text{x} \vec{H}_0\right) = 0$ в подложке. В результате имеем следующие уравнения и поверхностные условия, описывающие поведение магнитоупругих возмущений в рассматриваемой слоистой среде [2]:

уравнения в области слоя $\left(-h < x_2 < 0\right)$

$$\begin{gathered} \bar{G}^{(1)} \Delta u_3^{(1)} + \beta \Delta \varphi^{(1)} = \rho_1 \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^2} \\ \beta \Delta u_3^{(1)} - \mu_0 \mu_r^{(1)} \Delta \varphi^{(1)} = 0; \end{gathered} \tag{1.2}$$

уравнение в области полупространства $\left(x_2 > 0\right)$

$$G^{(2)} \Delta u_3^{(2)} = \rho_2 \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^2}, \tag{1.3}$$

уравнение в области вакуума $\left(x_2 < -h\right)$

$$\Delta \varphi^{(e)} = 0; \tag{1.4}$$

условия на поверхности раздела $\left(x_2 = 0\right)$

$$\begin{gathered} \bar{G}^{(1)} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2} = G^{(2)} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_2}, \\ u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \\ \mu_0 \mu_r^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2} - \beta \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_2} = 0; \end{gathered} \tag{1.5}$$

условия на свободной поверхности слоя $\left(x_2 = -h\right)$

$$\begin{gathered} \bar{G}^{(1)} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2} = 0, \\ \varphi^{(1)} = \varphi^{(e)}, \\ \mu_0 \mu_r^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2} - \beta \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_2} = \mu_0 \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x_2}; \end{gathered} \tag{1.6}$$

В (1.1)-(1.6) $u_3^{(1)}$ $\left(u_3^{(2)}\right)$ – перемещение частиц по направлению оси x_3 в слое (полупространстве); $\varphi^{(1)}\left(\varphi^{(2)}\right)$ – потенциал магнитного поля в слое и $\varphi^{(e)}$ – потенциал магнитного поля в области вакуума,

$$\bar{G}^{(1)} = G^{(1)} - \mu_0\chi^{(1)}\left[M_0^{(1)}\right]^2\left(\frac{e_1-e_2}{2}\right)^2,$$

$$\beta = \mu_0\chi^{(1)}M_0^{(1)}\frac{e_1-e_2}{2}, \tag{1.7}$$

$$M_0^{(i)} = \chi^{(i)}H_0^{(i)},$$

$\chi^{(i)} = \mu_r^{(i)} - 1-$ магнитная восприимчивость, $\mu_r^{(i)}$ – относительная магнитная проницаемость, e_1 и e_2 – коэффициенты магнитострикции материала слоя.

В приведенных уравнениях, условиях и формулах, имея в виду, что у основных магнито-стрикционных материалов $30<\chi<10^4$, $|e_i|<10^2$, $G^{(i)}\approx 10^{11}\,\text{Н/м}^2$, $B_0 \le B_S \sim 3\,\text{Тесла}$ (B_S- индукция насыщения), принято, что $|\chi e_i| >> 1$ и $|e_i| B_0^2\left(\mu_0 G^{(i)}\right)^{-1} << 1$.

Кроме условий (1.5) и (1.6) должны удовлетворяться также условия затухания возмущений на бесконечности.

2. Условия существования волн Лява. Скорости их распространения. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции

$$u_3^{(2)} = A_1 e^{-\alpha x_2} e^{i(kx_1-\omega t)} \quad x_2>0, \tag{2.1}$$

$$\varphi^{(e)} = A^{(e)} e^{kx_2} e^{(kx_1-\omega t)} \quad x_2<-h, \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \varphi^{(1)} = \left[\dfrac{\beta\Phi(x_2)}{\mu_0\mu_r^{(1)}} + \varphi_{01}e^{kx_2} + \varphi_{02}e^{-kx_2}\right]e^{i(kx_1-\omega t)} \\ u_3^{(1)} = \Phi(x_2)e^{i(kx_1-\omega t)} \end{cases} \quad -h<x_2<0, \tag{2.3}$$

где

$$\Phi(x_2) = \begin{cases} B_1 e^{\alpha_1 x_2} + B_2 e^{-\alpha_1 x_2} & \text{при } \mathrm{v}<\mathrm{v}_s \\ C_1\cos\alpha_2 x_2 + C_2 \sin\alpha_2 x_2 & \text{при } \mathrm{v}>\mathrm{v}_s \end{cases}$$

являются решениями уравнений (1.2)-(1.4), если величины α, α_1 и α_2 имеют следующие представления:

$$\alpha = k\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{v}_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_1 = k\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{v}_s^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_2 = k\left(\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{v}_s^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

В (2.1)-(2.4) $A_i, B_i, C_i, \varphi_{0i} (i=1,2)$ и $A^{(e)}$ – произвольные постоянные,

$$
\begin{gathered}
\mathrm{v}=\frac{\omega}{k},\ \mathrm{v}_n^2=\frac{\mathrm{G}^{(2)}}{\rho_2},\\
\mathrm{v}_S=\left[\frac{\overline{\mathrm{G}}^{(1)}}{\rho_1}\left(1+r^2\right)\right]^{\frac{1}{2}},\quad r^2=\frac{\beta^2}{\mu_0\mu_r\overline{\mathrm{G}}^{(1)}},\ \mathrm{v}_c^2=\frac{\mathrm{G}^{(1)}}{\rho_1}.
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

v – фазовая скорость рассматриваемой магнитоупругой волны, k – волновое число; ω – частота колебаний; α – показатель затухания упругого смещения в полупространстве; v_n и v_c – соответственно, скорости объемных чисто упругих сдвиговых волн в полупространстве и слое; v_S – скорость объемных магнитоупругих сдвиговых волн в магнитострикционной среде (в материале слоя).

Решение (2.1) соответствует магнитоупругой волне Лява, затухающей внутри полупространства (как и в случае чисто упругих волн Лява), если удовлетворяется условие $\mathrm{v}<\mathrm{v}_n$, фиксирующее, что в рассматриваемом случае невозможно возбудить поверхностные магнитоупругие волны с фазовой скоростью больше скорости объемных сдвиговых волн в подложке. Указанное необходимое условие, как показано в работе [7], нарушается, если материал полупространства обладает магнитострикционным свойством.

Удовлетворяя поверхностным условиям (1.5) и (1.6), для определения произвольных постоянных получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений.

Из условий на плоскости раздела $\left(x_2=0\right)$ получаются следующие уравнения:

$$
\begin{gathered}
\left.\begin{cases}\left(\overline{G}^{(1)}+\dfrac{\beta^2}{\mu_0\mu_r^{(1)}}\right)\alpha_1\left(B_1-B_2\right)+\beta k(\varphi_{01}-\varphi_{02}) & \text{при } \mathrm{v}<\mathrm{v}_s,\\ \left(\overline{G}^{(1)}+\dfrac{\beta^2}{\mu_0\mu_r^{(1)}}\right)\alpha_2 C_2+\beta k(\varphi_{01}-\varphi_{02}) & \text{при } \mathrm{v}>\mathrm{v}_s,\end{cases}\right\}+\alpha G^{(2)}A_1=0,\\
\left.\begin{cases}B_1+B_2 & \text{при } \mathrm{v}<\mathrm{v}_s,\\ C_1 & \text{при } \mathrm{v}>\mathrm{v}_s,\end{cases}\right\}=A_1,\\
\left.\begin{cases}\mu_r^{(1)}(\varphi_{01}-\varphi_{02}) & \text{при } \mathrm{v}<\mathrm{v}_s,\\ \mu_r^{(1)}(\varphi_{01}-\varphi_{02}) & \text{при } \mathrm{v}>\mathrm{v}_s\end{cases}\right\}=0;
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Условия на свободной поверхности слоя $\left(x_2=-h\right)$ приводят к следующим уравнениям:

$$
\left.\begin{cases}\left(\overline{G}^{(1)}+\dfrac{\beta^2}{\mu_0\mu_r^{(1)}}\right)\alpha_1\left(B_1e^{-\alpha_1 h}-B_2e^{\alpha_1 h}\right)+\beta k(\varphi_{01}e^{-kh}-\varphi_{02}e^{kh}) & \text{при } \mathrm{v}<\mathrm{v}_s,\\ \left(\overline{G}^{(1)}+\dfrac{\beta^2}{\mu_0\mu_r^{(1)}}\right)\alpha_2(C_2\cos\alpha_2 h+C_1\sin\alpha_2 h)+\beta k(\varphi_{01}e^{-kh}-\varphi_{02}e^{kh}) & \text{при } \mathrm{v}>\mathrm{v}_s\end{cases}\right\}=0;
$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\beta}{\mu_0\mu_r^{(1)}}\left(B_1 e^{-\alpha_1 h}+B_2 e^{\alpha_2 h}\right)+\varphi_{01}e^{-kh}+\varphi_{02}e^{kh} & \text{при } \mathrm{v}<\mathrm{v}_s, \\ \dfrac{\beta}{\mu_0\mu_r^{(1)}}\left(C_1\cos\alpha_2 h-C_2\sin\alpha_2 h\right)+\varphi_{01}e^{-kh}+\varphi_{02}e^{kh} & \text{при } \mathrm{v}>\mathrm{v}_s \end{cases}\right\}=A^{(e)}e^{-kh} \tag{2.7}$$

$$\left.\begin{cases} \mu_0\mu_r^{(1)}k(\varphi_{01}e^{-kh}-\varphi_{02}e^{kh}) & \text{при } \mathrm{v}<\mathrm{v}_s, \\ \mu_0\mu_r^{(1)}k(\varphi_{01}e^{-kh}-\varphi_{02}e^{kh}) & \text{при } \mathrm{v}>\mathrm{v}_s \end{cases}\right\}=\mu_0 k e^{-kh}A^{(e)}.$$

Из условия совместности однородной линейной системы (2.6)-(2.7) в зависимости от соотношений между v и v_s ($\mathrm{v}>\mathrm{v}_s$ и $\mathrm{v}<\mathrm{v}_s$) получаются характеристические уравнения для определения скорости распространения поверхностной магнитоупругой волны:

уравнение в случае $\mathrm{v}>\mathrm{v}_s$

$$\left[\frac{G^{(2)}\alpha}{1+r^2}\gamma+\bar{G}^{(1)}\left(1+r^2\right)\delta\alpha_2^2\right]tg\alpha_2 h-\left[G^{(2)}\delta\alpha-\bar{G}^{(1)}\gamma\right]\alpha_2=0, \tag{2.8}$$

уравнение в случае $\mathrm{v}<\mathrm{v}_s$

$$\left[\frac{G^{(2)}\alpha}{1+r^2}\gamma-\bar{G}^{(1)}\left(1+r^2\right)\delta\alpha_1^2\right]th\alpha_1 h+\left[\bar{G}^{(1)}\gamma-G^{(2)}\delta\alpha\right]\alpha_1=0, \tag{2.9}$$

где $\delta=\mu_r^1\mathrm{shkh}+\mathrm{chkh},\ \ \gamma=r^2\mathrm{kshkh}$.

Уравнения типа (2.8) получены также в работе [7], где рассматривается задача Лява в случае магнитострикционного полупространства с неферромагниным слоем.

Из неоходимого условия $\mathrm{v}<\mathrm{v}_n$ существования рассматриваемой волны и уравнения (2.8) следует, что магнитоупругие волны с фазовой скоростью v, удовлетворяющей условию $\mathrm{v}_S<\mathrm{v}<\mathrm{v}_n$, могут существовать независимо от магнитных свойств среды и наличия внешнего магнитного поля. Заметим, что скорость волны Лява в чисто упругом случае также удовлетворяет указанному условию, и наличие магнитного поля при магнитострикционной среде влияет только на величину скорости волны, изменяющеюся в отмеченном интервале. Более того, указанный интервал заменяется интервалом ($\mathrm{v}_s,\mathrm{v}_n$).

Вернемся к случаю $\mathrm{v}<\mathrm{v}_S$, т.е. к вопросу о возможности существования магнитоупругих поверхностных волн, скорость распространения которых меньше скорости объемных магнитоупругих сдвиговых волн в магнитострикционном слое. Ответ будет положительным, если уравнение (2.9) имеет действительный корень. Для этого необходимо, чтобы имело место следующее условие:

$$\frac{G^{(2)}\delta\alpha-\bar{G}^{(1)}\gamma}{G^{(2)}\alpha\gamma-\bar{G}^{(1)}\left(1+r^2\right)^2\delta\alpha_1^2}>0 \tag{2.10}$$

Легко заметить, что при $e_i = 0$ условие (2.10) не имеет места. Следовательно, если среда обладает магнострикционным свойством, то уравнение (2.9) может иметь положительный корень, означающий, что в рассматриваемой двухслойной среде можно возбудить поверхностные магнитоупругие волны, скорость распространения которых меньше скорости сдвиговых объемных волн в материале слоя (сказанное подтверждается также численным решением уравнения (2.9)). Из уравнений (2.8) и (2.9) следует также, что фазовая скорость рассматриваемых волн зависит от частоты колебаний и поэтому для этих волн имеет место дисперсия.

Институт механики НАН РА
e-mail: baghdasaryan@rau.am

Академик Г. Е. Багдасарян

Магнитоупругие волны Лява в случае магнитострикционного слоя

Рассматриваются вопросы существования и распространения поверхностной магнитоупругой волны Лява в случае магнитострикционного слоя и идеально проводящего ферромагнитного полупространства. Установлено, что если среда находится в магнитном поле и ее материал обладает магнитострикционными свойствами, то: а) сохраняется вышеуказанный характер существования и распространения поверхностной волны, а присутствие магнитного поля имеет только количественное влияние; б) в среде будет распространяться новый тип поверхностных магнитоупругих волн, обусловленный исключительно магнитострикционными свойствами среды. Установлено также, что фазовая скорость новой поверхностной волны меньше скорости объемных поперечных волн в материале слоя и волна распространяется с дисперсией.

Ակադեմիկոս Գ. Ե. Բաղդասարյան

Լյավի ալիքները մագնիսաստրիկցիոն շերտի դեպքում

Դիտվում են մակերևութային մագնիսաառաձգական ալիքների գոյության ու տարածման հարցերը շերտավոր մագնիսաստրիկցիոն կիսատարածություններում: Ցույց է տրված, որ, ի թիվս նշված մաքուր առաձգական ալիքների, գոյություն ունի նաև նոր տիպի մակերևութային մագնիսաառաձգական ալիք, որի գոյությունը պայմանավորված է բացառապես միջավայրի մագնիսաստրիկցիոն հատկությամբ: Բացահայտված է, որ նոր տիպի ալիքի տարածման արագությունը կարող է լինել ավելի փոքր, քան ընդլայնական ծավալային ալիքի արագությունը շերտում: Ցույց է տրված, որ նոր տիպի ալիքը տարածվում է դիսպերսիայով:

Academician G. E. Baghdasaryan

Love Waves in the Case of Magnetostrictive Layer

This paper is devoted to the issues of existence and propagation of surface magnetoelastic waves in layered magnetostrictive half-spaces. It is shown that besides the noted pure alastic waves, the new type of surface magnetoelastic wave exists, which existence is exclusively conditioned by magnetostrictive properties of medium. It is

established that the speed of this new wave can be less than the speed of transverse bulk waves in the layer. It is also established that the new wave propagates with dispersion.

Литература

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1987.
2. *Baghdasaryan G. Y., Danoyan Z. N.* Magnetoelastic waves. Springer. 2018.
3. *Brown W. F.* Magnetoelastic interaction. Springer-Verlag, New York. 1966.
4. *Pao Y. H., Yen C. S.* – J. Eng. Sci. 1973. V. 11(4). P. 415-436.
5. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. М. Мир. 1991. 560 с.
6. *Багдасарян Г. Е.* – Мат. методы и физ.-мех. поля. 1998. Т. 41. № 3. С. 70-75.
7. *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н., Саноян Л. А.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1989. Т. 42. № 5. С. 3-9.