ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. В. Белубекян [1], С. В. Саркисян [2]

Распространение волн в упругом слое, одна из лицевых плоскостей которого жестко закреплена, с инерционной массой на другой

(Представлено чл.-кор. НАН РА А. С. Аветисяном 11/II 2018)

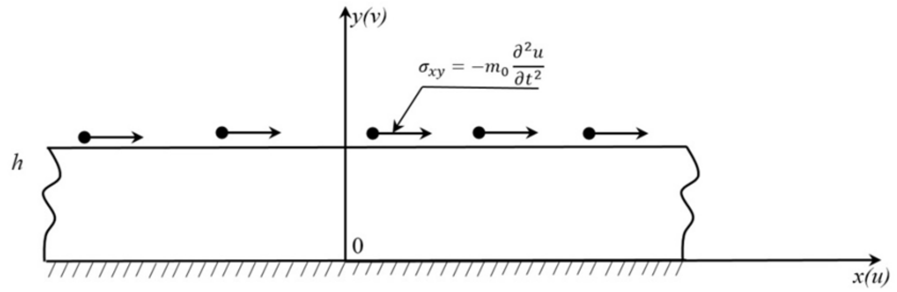
Ключевые слова: *слой, упругий волновод, инерционная масса.*

Введение. Упругий слой с плоскопараллельными лицевыми плоскостями представляет собой частный случай математической модели упругого волновода. Одной из первых работ по распространению волн в упругом волноводе является работа Похгаммера [1], где рассмотрена задача колебаний бесконечно длинного кругового цилиндра со свободными от нагрузок боковыми поверхностями. Аналогичные задачи колебаний для бесконечной плиты, находящейся в плоскодеформированном состоянии, со свободными лицевыми плоскостями впервые рассмотрели Рэлей и Лемб [2, 3]. В дальнейшем исследования по распространению упругих волн в слое со свободными лицевыми плоскостями детально изучены во многих работах, в частности отметим [4-9] .

Задача распространении волн в упругом слое, одна из лицевых плоскостей которого жестко закреплена, а другая свободна от напряжений, в двумерной постановке впервые решена в [10], где получено дисперсионное уравнение и проведено сравнение с результатами задачи Лемба. Было показано, что наименьшая фазовая скорость распространения волны равна фазовой скорости поверхностных волн Рэлея. Отличительной чертой этих задач является то обстоятельство, что симметричная и антисимметричная мода колебаний не разделяются, а также то, что к этому классу задач не применимы гипотезы классической теории балок и пластин, в частности, гипотеза Кирхгофа и уточненные теории [11-18].

В настоящей статье предлагается модель для исследования влияния инерционной массы, распределенной на одной плоскости с жестко закрепленой другой плоскостью упругого слоя, на характеристики упругого волновода.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим задачу распространения волн в бесконечном упругом слое толщиной h. Слой ограничен плоскостями $y=0$ и $y=h$. Плоскость $y=0$ жестко закреплена, а на плоскости $y=h$ задана сосредоточенная (инерционная) масса $m_0>0$.



Рассмотрим задачу плоской деформации, т.е. перемещения $\vec{u}\left(u(x,y,t),\right.$ $\left.\mathrm{v}(x,y,t),0\right)$ не зависят от переменной z, а $w=0$. При помощи преобразований

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1}$$

динамические уравнения теории упругости приводятся к автономным волновым уравнениям относительно динамических потенциалов $\varphi(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t)$ [5]. Решение этих уравнений представим в виде

$$\varphi=\left(A\,\mathrm{sh}\left(k\alpha_1 y\right)+B\,\mathrm{ch}\left(k\alpha_1 y\right)\right)\exp ik\left(x-ct\right), \tag{2}$$

$$\psi=\left(C\,\mathrm{sh}\left(k\alpha_2 y\right)+D\,\mathrm{ch}\left(k\alpha_2 y\right)\right)\exp ik\left(x-ct\right),$$

где $\alpha^2{}_1=1-\eta\theta,\ \alpha^2{}_2=1-\eta,\ \eta=c^2/c_t^2.$

Постоянные A,B,C и D должны определяться из следующих граничных условий:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\quad \text{при } y=0,$$

$$\frac{1-2\theta}{\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1}{\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0,$$

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0\quad \text{при } y=h. \tag{3}$$

Здесь $\theta=c_t^2/c_l^2<1,\ m=m_0k^2c^2\mu^{-1},\ \mu-$ модуль сдвига материала упругого слоя.

Удовлетворяя решение (2) граничным условиям (3), для постоянных интегрирования получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
iB+\alpha_2 C=0,\ \alpha_1 A-iD=0,\\
\frac{1-2\theta}{\theta}\left(Ash\left(H\alpha_1\right)+Bch\left(H\alpha_1\right)\right)-\frac{1}{\theta}\alpha_1^2\left(Ash\left(H\alpha_1\right)+Bch\left(H\alpha_1\right)\right)+\\
+2i\alpha_2\left(Cch\left(H\alpha_2\right)+Dsh\left(H\alpha_2\right)\right)=0,\ H=kh,\\
iA\left(2\alpha_1 ch\left(H\alpha_1\right)-\frac{m}{k}sh\left(H\alpha_1\right)\right)+iB\left(2\alpha_1 sh\left(H\alpha_1\right)-\frac{m}{k}ch\left(H\alpha_1\right)\right)+\\
+C\left(\left(1+\alpha_2^2\right)sh\left(H\alpha_2\right)-\frac{m}{k}\alpha_2 ch\left(H\alpha_2\right)\right)+D\left(\left(1+\alpha_2^2\right)ch\left(H\alpha_2\right)-\frac{m}{k}\alpha_2 sh\left(H\alpha_2\right)\right)=0.
\end{gathered}\tag{4}$$

Из условия существования нетривиального решения однородной системы алгебраических уравнений (4) получаем следующее характеристическое уравнение относительно безразмерной фазовой скорости распространения волн в упругом слое η:

$$\begin{gathered}
4(2-\eta)\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}-\left((2-\eta)^2+4\right)\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}ch\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right)ch\left(H\sqrt{1-\eta}\right)+\\
+\left((2-\eta)^2+4(1-\eta\theta)(1-\eta)\right)sh\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right)sh\left(H\sqrt{1-\eta}\right)+\\
+\frac{m}{k}\eta\sqrt{1-\eta}\left(sh\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right)ch\left(H\sqrt{1-\eta}\right)-\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}ch\left(H\sqrt{1-\eta\theta}\right)sh\left(H\sqrt{1-\eta}\right)\right)=0.
\end{gathered}\tag{5}$$

Исследование характеристического уравнения и численные результаты. Характеристическое уравнение (5) при отсутствии инерционной массы ($m_0=0$) совпадает с уравнением, полученным в работе [10]. Здесь исследуем влияние инерционной массы на колебания упругого слоя. При предельном переходе $\eta\to 1$ и при $m_0=0$ из уравнения (5) относительно H имеем следующую функцию:

$$f(H)=4-5ch\left(H\sqrt{1-\theta}\right)+H\frac{sh\left(H\sqrt{1-\theta}\right)}{\sqrt{1-\theta}}.$$

Для функции $f(H)$ в интервале $H\in[0,5]$ существует критическое значение H_*, при котором $f\left(H_*\right)=0.$ Следовательно, при $\mathrm{kh=H}_*$ в упругом слое получаются решения типа локализованных колебаний с безразмерной фазовой скоростью $\eta<1$. Например, при $\theta=\frac{1}{3}$ $H_*=3.8063.$

При наличии инерционной массы из характеристического уравнения (5) при $\eta\to 1$ имеем

$$f(m,H)=\frac{\sqrt{1-\theta}}{sh\left(H\sqrt{1-\theta}\right)}\left(-4+5ch\left(H\sqrt{1-\theta}\right)\right)-\frac{m}{k}-H.$$

При различных значениях kh получаются приведенные значения m, при которых существуют решения типа локализованных колебаний с безразмерной фазовой скоростью $\eta<1$.

В таблице приводятся значения инерционной массы m при различных значениях $H = kh$, когда $\theta = \frac{1}{3}$.

H	0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.1	1.3
m/k	10.0555	3.4978	2.2675	1.7896	1.4768	1.4168	1.3256

Как видно из таблицы, с возрастанием *H* приведенные значения сосредоточенной массы *m* убывают. Отметим, что при $\eta > 1$ получаем колебания упругого изотропного слоя толщиной h, одна из лицевых плоскостей которого жестко закреплена, а на другом задана инерционная масса m_0 с частотой $\omega = kc$, которую можно определить из уравнения (5).

Заключение. Таким образом, показано влияние инерционной массы, распределенной на одной плоскости с жестко закрепленой другой плоскостью упругого слоя, на характеристики упругого волновода. Наименьшая фазовая скорость распространения волны для упругого слоя, одна из лицевых плоскостей которого жестко закреплена, а другая свободна от напряжений, равна фазовой скорости поверхностных волн Рэлея. При различных значениях толщины слоя и волнового числа найдены значения инерционной массы, при которых в слое существуют решения типа локализованных колебаний, причем эти значения убывают.

[1]Институт механики НАН РА

[2]Ереванский государственный университет

e.mail:vas@ysu.am

М. В. Белубекян, С. В. Саркисян

Распространение волн в упругом слое, одна из лицевых плоскостей которого жестко закреплена, с инерционной массой на другой

Предлагается модель для исследования влияния инерционной массы, распределенной на одной плоскости с жестко закрепленой другой плоскостью упругого слоя, на характеристики упругого волновода.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Ս. Վ. Սարգսյան

Ալիքների տարածումը մի եզրը կոշտ ամրացված, իներցիոն զանգվածով բաշխված մյուս եզրով առաձգական շերտում

Առաջարկված է մի մոդել, որի միջոցով կարելի է հետազոտել առաձգական, մի հարթությամբ բաշխված իներցիոն զանգվածով, մյուսով՝ կոշտ ամրացված շերտում, առաձգական ալիքատարի բնութագրիչների վրա զանգվածի ազդեցությունը:

M. V. Belubekyan, S. V. Sarkisyan

Waves Propogation in Elastic Layer with one Boundary Clumped, in with Inertial Mass on the Another

The model is offered for the study of the inertial mass, in elastic layer distributed on the one plane with a clumped, in with inertial mass on the another on the characteristic of the waveguide.

Литература

1. *Pochhammer L.* – Journal für Mathematic. 1876. V. 81. P. 324-336.
2. *Lamb H.* – Proceedings of the Royal Society, SA. V. 93. 1917.
3. *Rayleigh J.W.* – Proc. Math. Soc. London. 1889. V. 20.
4. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М. Наука. 1981. 288 с.
5. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев. Наукова думка. 1981. 283 с.
6. *Achenbach J.D.* Wave propagation in elastic solids. North-Holland. 1984. 425 p.
7. *Miklowitz J.* Elastic Wave Propagation. Appl. Mech. Surv. Washington. D.C. Spartan Books. 1966. P. 809-839.
8. *Mindlin R.D.* Waves and Vibrations in Isotropic Elastic Plates. Structural Mechanics, Pergamon Press. New York. 1960. P. 199-232.
9. *Viktorov I.A.* Rayleigh and Lamb Waves – Physical Theory and Applications. New York. Plenum Press. 1967.
10. *Ишков П.К.* – Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1941. № 2. С.169–176.
11. *Мелешко В.В. и др.* – Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т. 51. № 2. С. 86–104.
12. *Белубекян В.М., Белубекян М.В.* – Доклады НАН Армении. 2015. Т. 115. № 1. С. 40-43.
13. *Вартанов А.Г.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т. 63. № 4. С. 3-30.
14. *Belubekyan M., Ghazaryan K., Vardanov A., Milanese A., Marzocca P.* In: Proceedings of 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 2008. P.1874-1886.
15. *Коссович Л.Ю. и др.* – Вестник СамГУ. Естественно-научная серия: Механика. 2008. № 8/2 (67). С. 78–89.
16. *Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю.* – Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М. Физматлит. 2010. 280 с.
17. *Абрамян Б.Л., Саакян А.В.* В сб.: Проблемы механики деформируемых тел. Ереван. 2003.
18. *Саркисян С.В., Саркисян А.С.* В кн.: Механика 2016 (Тр. Междунар. школы-конф. молодых ученых). Ереван. Ин-т механики. 2016. С. 124-127.