

г) гипотеза Неймана об отсутствии сдвигов от изменения температуры [5].

Для простоты и наглядности принимается, что из лицевых поверхностей ($r = R \pm h/2$) оболочки происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона – Рихмана (на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями T^+ и T^- соответственно), а боковые поверхности ($x = 0$ и $x = a$) теплоизолированы.

Под действием неоднородного по толщине стационарного температурного поля ($\Theta \neq 0$) происходит выпучивание оболочки (с прогибом $w_T(x)$ и продольным перемещением $u_T(x)$), и вследствие этого появляется аэроупругое давление. Указанное выпученное состояние принимается как невозмущенное [1], и исследуется его устойчивость под действием температурного поля и давления обтекающего потока газа.

2. Характеристики невозмущенного состояния. 2.1. Определение температурного поля. На основе принятых предположений задача определения стационарного температурного поля сводится к решению уравнения теплопроводности $\Delta T = 0$ в области, занимаемой оболочкой, при следующих поверхностных условиях:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = k(T - T^\pm) \quad \text{при } r = R \pm \frac{h}{2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = a.$$

Сформулированная задача теплопроводности, согласно предположению о линейной зависимости температуры от толщины оболочки, имеет следующее решение:

$$T = T_0 + (r - R)\Theta, \quad T_0 = \frac{T^+ + T^-}{2}, \quad \Theta = \frac{k(T^+ - T^-)}{kh - 2\lambda}. \quad (2)$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, k – коэффициент теплоотдачи.

2.2. Определение термоупругих напряжений и перемещений. Учитывая принятые предположения, из основных уравнений, соотношений и граничных условий теории термоупругости тонких оболочек имеем:

соотношения

$$u_0^{(r)} = w_T(x), \quad u_0^{(x)} = u_T(x) - (r - R) \frac{dw_T}{dx} \quad (3)$$

согласно гипотезам Кирхгофа – Лява;

уравнения относительно u_T и w_T :

$$\frac{d^2 u_T}{dx^2} + \frac{\mu}{R} \frac{dw_T}{dx} = 0 \quad (4)$$

$$D \left[\frac{d^4 w_T}{dx^4} + \frac{12}{Rh^2} \left(\mu \frac{du_T}{dx} + \frac{w_T}{R} \right) \right] + \alpha p_\infty M \frac{dw_T}{dx} = 0, \quad (5)$$

согласно теории тонких оболочек;

выражение для внутренних усилий невозмущенного состояния:

$$T_{11}^0 = \int_{R-h/2}^{R+h/2} \sigma_{11}^0 dr = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\frac{du_T}{dx} + \mu \frac{w_T}{R} - \alpha(1+\mu)T_0 \right], \quad (6)$$

$$T_{22}^0 = \int_{R-h/2}^{R+h/2} \sigma_{22}^0 dr = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\mu \frac{\partial u_T}{\partial x} + \frac{w_T}{R} - \alpha(1+\mu)T_0 \right]$$

согласно обобщенному закону Гука.

Здесь $M = Ua_\infty^{-1}$ – число Маха для невозмущенного потока, $a_\infty = \alpha p_\infty \rho_\infty^{-1}$ – скорость звука для невозмущенного газа, p_∞ и ρ_∞ – давление и плотность газа в невозмущенном состоянии, α – показатель политропы, $D = Eh^3 / 12(1-\mu^2)$, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного теплового расширения материала оболочки.

Решения уравнений (4) и (5) должны удовлетворять условиям закрепления краев оболочки $x=0$ и $x=a$. Будут рассмотрены краевые условия следующего типа:

края шарнирно оперты и свободно перемещаются вдоль оси Ox

$$w_T = 0, \quad \frac{d^2 w_T}{dx^2} + \alpha(1+\mu)T_0 = 0 \quad \text{при } x=0, x=a, \quad (7)$$

$$\frac{du_T}{dx} - \alpha(1+\mu)T_0 = 0 \quad \text{при } x=0, x=a. \quad (8)$$

Решение u_T уравнения (4), удовлетворяющее условию (8), имеет следующий вид (при этом использовано также условие $w_T = 0$ на торцах оболочки):

$$u_T = -\frac{\mu}{R} \int_0^x w_T(\xi) d\xi + \alpha(1+\mu)T_0 x. \quad (9)$$

В силу (9) из (6) имеем:

$$T_{11}^0 = 0, \quad (10)$$

$$T_{22}^0 = Eh \left[\frac{w_T}{R} - \alpha T_0 \right].$$

Задача определения w_T в силу (5) и (9) сводится к решению уравнения

$$D \frac{d^4 w_T}{dx^4} + \frac{12}{Rh^2} \left(\frac{1-\mu^2}{R} w_T + \alpha \mu (1+\mu) T \right) + \alpha p_\infty M \frac{dw_T}{dx} = 0 \quad (11)$$

при граничных условиях (7). Получено решение уравнения (11), удовлетворяющее указанным условиям. Его здесь не приводим ввиду громоздкости.

3. Характеристики возмущенного состояния. Для получения уравнений возмущенного состояния учитывается, что:

а) величины, характеризующие невозмущенное состояние, удовлетворяют уравнениям и соотношениям, полученным в пункте 2;

б) величины невозмущенного состояния определены на основе линейной теории термоупругости (подлежащие определению величины входили в соответствующие уравнения и краевые условия линейно);

в) в окончательных уравнениях и соотношениях величины, характеризующие невозмущенное состояние, будут присутствовать только в первых степенях.

На основе теории термоупругости изотропных тел, гипотезы Кирхгофа – Лява и принятых предположений аналогично [6] получена следующая система линейных дифференциальных уравнений устойчивости рассматриваемой термогазоупругой системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{(1-\mu^2) T_{22}^0}{ERh} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{h^2}{12R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\Delta w + \frac{w}{R^2} \right) &= 0; \\ D \left[\Delta^2 w + \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{12}{Rh^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right) \right] + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\ - T_{22}^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \left(\rho_0 h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha p_\infty M \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\alpha (\alpha + 1)}{2} p_\infty M^2 \frac{dw_T}{dx} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $u(x, \varphi, t)$, $v(x, \varphi, t)$ и $w(x, \varphi, t)$ – возмущения перемещений точек срединной поверхности оболочки, ρ_0 – плотность материала оболочки, ε – коэффициент линейного затухания.

При решении конкретных задач устойчивости к системе (12) присоединяются граничные условия относительно возмущений, вытекающие из условий закрепления краев оболочки. Например, если края оболочки шарнирно оперты и неподвижны, то граничные условия представляются в виде

$$\frac{du}{dx} = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a. \quad (13)$$

4. Условия и область устойчивости. Решение системы (12), удовлетворяющее условиям (13), представим в виде

$$\begin{aligned}
u(x, \varphi, t) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) \cos \lambda_i x \right) \sin n\theta, \\
v(x, \varphi, t) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i(t) \sin \lambda_i x \right) \cos n\theta, \\
w(x, \varphi, t) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} w_i(t) \sin \lambda_i x \right) \sin n\theta, \quad \left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a} \right),
\end{aligned} \tag{14}$$

где $u_i(t)$, $v_i(t)$, $w_i(t)$ – подлежащие определению функции времени t .

Подставляя (14) в систему (12) и используя процесс ортогонализации, ограничиваясь случаем двухчленной аппроксимации, после некоторых преобразований приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно безразмерных функций $x_m = w_m/h$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + \alpha_{11} x_1 - \frac{2K\nu}{3} x_2 + \alpha_{12} x_2 &= 0, \\
\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + \frac{2K\nu}{3} x_1 + \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
\omega_1 t = \tau, \quad \chi &= \frac{1}{\omega_1} \left(\varepsilon + \frac{a_\infty \rho_\infty}{\rho h} \right), \quad K = \frac{4\alpha p_\infty}{\rho_0 \omega_1^2 h^2}, \quad \nu = M \frac{h}{a}, \\
\omega_1^2 &= \frac{1}{\rho h} \left[D(\lambda_1^2 + \mu_n^2)^2 + \frac{\lambda_1^4}{R^2 \Delta_{1n}} \right], \\
\alpha_{11} &= \sigma_{11} + T_0 \sigma_{11}^{(1)} + \Theta \sigma_{11}^{(2)}, \\
\alpha_{12} &= \Theta \sigma_{12}^{(2)}, \\
\alpha_{21} &= \Theta \sigma_{21}^{(2)}, \\
\alpha_{22} &= \sigma_{22} + T_0 \sigma_{22}^{(1)} + \Theta \sigma_{22}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты σ_{ij} и $\sigma_{ij}^{(1)}$ зависят только от геометрических и физико-механических параметров, а $\sigma_{ij}^{(2)}$ – также от приведенного параметра скорости ν аэротермоупругой системы и здесь не приводятся.

Представляя решение системы (15) в виде

$$x_1 = y_1 e^{\lambda\tau}, \quad x_2 = y_2 e^{\lambda\tau},$$

из условия существования нетривиального решения получим следующее характеристическое уравнение относительно λ :

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= 2\chi \\
a_2 &= T_0(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}) + \Theta(\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2)}) + \chi^2 \\
a_3 &= [\sigma_{11} + \sigma_{22} + T_0(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}) + \Theta(\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2)})]\chi \\
a_4 &= -\Theta\left[\frac{2}{3}Kv(\sigma_{12}^{(2)} - \sigma_{21}^{(2)}) + \sigma_{12}^{(2)}\sigma_{21}^{(2)}\right] + (\sigma_{11} + T_0\sigma_{11}^{(1)} + \Theta\sigma_{11}^{(2)})(\sigma_{22} + T_0\sigma_{22}^{(1)} + \Theta\sigma_{22}^{(2)}).
\end{aligned} \tag{17}$$

Невозмущенная форма пластинки будет устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости согласно теореме Гурвица записываются в виде

$$a_i > 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 4), \quad \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 > 0. \tag{18}$$

С учетом (17) система (18) примет вид

$$\begin{aligned}
&2\chi^2 + T_0(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}) + \Theta(\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2)}) > 0; \\
&-\frac{16}{9}K^2v^2 + 4\Theta\left[-\frac{2}{3}Kv\sigma_{21}^{(2)} + \sigma_{12}^{(2)}\left(\frac{2}{3}Kv + \sigma_{21}^{(2)}\right)\right] + \\
&\quad + (\sigma_{11} - \sigma_{22} + T_0(\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{22}^{(1)}) + \Theta(\sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{22}^{(2)}))^2 + \\
&\quad + 2\chi^2(\sigma_{11} + \sigma_{22} + T_0(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}) + \Theta(\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2)})) > 0; \\
&\frac{4}{9}K^2v^2 - \Theta\left[\frac{2}{3}Kv(\sigma_{12}^{(2)} - \sigma_{21}^{(2)}) + \sigma_{12}^{(2)}\sigma_{21}^{(2)}\right] + \\
&\quad + (\sigma_{11} + T_0\sigma_{11}^{(1)} + \Theta\sigma_{11}^{(2)})(\sigma_{22} + T_0\sigma_{22}^{(1)} + \Theta\sigma_{22}^{(2)}) > 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Условия (19) определяют область устойчивости рассматриваемой термоупругой системы в пространстве параметров v , T_0 , Θ . Рассмотрим ниже частные случаи $T_0 \neq 0$, $\Theta = 0$ и $T_0 = 0$, $\Theta \neq 0$ отдельно.

1) *Случай постоянного температурного поля* ($T_0 \neq 0$, $\Theta = 0$). Если влиянием затухания пренебречь (формально $\chi = 0$), то вместо (19) получится биквадратное уравнение, и поэтому условиями устойчивости будут:

$$\begin{aligned}
&T_0(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}) > 0; \\
&-\frac{16}{9}K^2v^2 + (\sigma_{11} + \sigma_{22} - T_0(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1)}))^2 > 0; \\
&\frac{4}{9}K^2v^2 + (\sigma_{11} + T_0\sigma_{11}^{(1)})(\sigma_{22} + T_0\sigma_{22}^{(1)}) > 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Для фиксированных значений T_0 численным решением системы (20) определены значения скорости v_{cr} , при которых рассматриваемая аэроупругая система теряет устойчивость. Результаты численных решений, представляющие зависимость v_{cr} от T_0 и n (где n – число полуволн вдоль круга цилиндра), представлены на рис. 1 и в табл. 1.

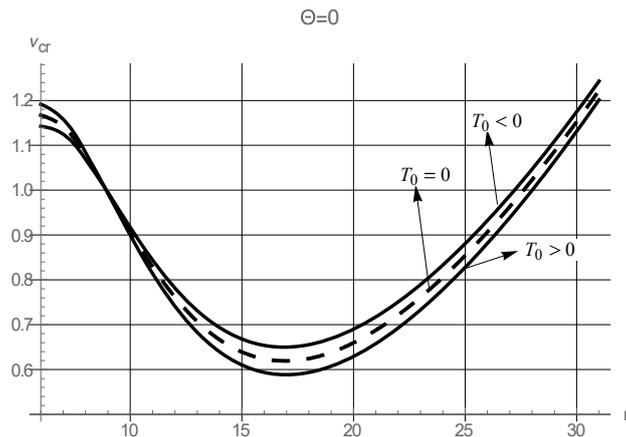


Рис. 1. Зависимость критической скорости v_{cr} от числа полуволн вдоль круга цилиндра n в случае постоянного температурного поля.

Для расчета здесь и в дальнейшем принято $\alpha=23.8 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$; $k=1200$ Вт/(м 2 град); $\lambda=210$ Вт/(м град); $\mu=0.34$; $a=1$ м; $h/a=1/100$; $R/a=2$.

Таблица 1

Значение критической скорости v_{cr} при разных значениях температуры T_0 и числа полуволн вдоль круга цилиндра n

T_0 N	-500	0	400
5	1.1918	1.1671	1.1424
10	0.8998	0.9084	0.8998
15	0.6102	0.6392	0.6681
17	0.5884	0.6192	0.6500
20	0.6291	0.6596	0.6899
25	0.8277	0.8540	0.8804
30	1.1311	1.1529	1.1747

Рис. 1 и табл. 1 показывают, что: а) постоянное температурное поле практически не влияет на значение v_{cr} ; б) в зависимости от числа полуволн v_{cr} имеет точку минимума.

2) Случай переменного по толщине оболочки температурного поля ($T_0 = 0, \Theta \neq 0$). В этом случае условиями устойчивости будут (19) при $T_0 = 0$:

$$\begin{aligned} & \Theta(\sigma_{11}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2)}) > 0; \\ & -\frac{16}{9}K^2v^2 + 4\Theta \left[-\frac{2}{3}Kv\sigma_{21}^{(2)} + \sigma_{12}^{(2)} \left(\frac{2}{3}Kv + \sigma_{21}^{(2)} \right) \right] + (\sigma_{11} - \sigma_{22} + \Theta(\sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{22}^{(2)}))^2 > 0; \\ & \frac{4}{9}K^2v^2 - \Theta \left[\frac{2}{3}Kv(\sigma_{12}^{(2)} - \sigma_{21}^{(2)}) + \sigma_{12}^{(2)}\sigma_{21}^{(2)} \right] + (\sigma_{11} + \Theta\sigma_{11}^{(2)})(\sigma_{22} + \Theta\sigma_{22}^{(2)}) > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

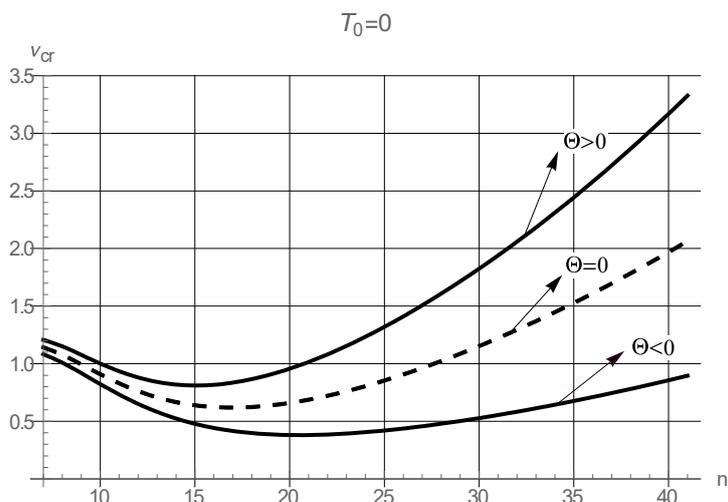


Рис. 2. Зависимость критической скорости v_{cr} от числа полуволн вдоль круга цилиндра n в случае переменного по толщине оболочки температурного поля.

Таблица 2

Значение критической скорости v_{cr} при разных значениях температуры T_0 и числа полуволн вдоль круга цилиндра n

$N \backslash \Theta$	-500	0	500
5	1.1150	1.1671	1.2239
10	0.8223	0.9084	1.0012
15	0.4779	0.6392	0.8110
20	0.3807	0.6596	0.9568
25	0.4200	0.8540	1.3192
30	0.5278	1.1529	1.8249

График зависимости критической скорости обтекающего потока от числа полуволн на основе условий (21) приведен на рис. 2. При разных значениях переменной температуры вычислены значения критической скорости (табл. 2).

Рис. 2 и табл. 2 показывают, что: а) переменность температурного поля имеет существенное влияние на величину критической скорости (v_{cr} увеличивается); б) функция $v_{cr}(n)$ имеет точку минимума, которая зависит от Θ .

Институт механики НАН РА

И. А. Варданян, А. А. Шмавонян

Задача термоупругого флаттера замкнутой цилиндрической оболочки

В линейной постановке рассмотрена задача устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки под действием неоднородного температурного поля и обтекающего оболочку сверхзвукового потока газа. Получены условия устойчивости невозмущенного состояния рассматриваемой аэротермоупругой системы. Показано, что совместным действием температурного поля и обтекающего потока можно регулировать процесс устойчивости и при помощи температурного поля существенно изменить величину критической скорости флаттера.

Ի. Ա. Վարդանյան, Հ. Ա. Շմավոնյան

Փակ գլանային թաղանթի ջերմաստաձգական ֆլատերի խնդիրը

Ներկայացվող աշխատանքում գծային դրվածքով դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող փակ գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը անհամասեռ ջերմային դաշտի ազդեցության տակ: Ստացված են դիտարկվող աերոթերմոաստաձգական համակարգի չգրգռված վիճակի կայունության պայմանները: Ցույց է տրված, որ շրջհոսվող գազի հոսանքի և ջերմային դաշտի համատեղ ազդեցությամբ կարելի է ղեկավարել կայունության պրոցեսը և ջերմային դաշտի օգնությամբ էապես փոխել ֆլատերի կրիտիկական արագության արժեքը:

I. A. Vardanyan, H. A. Shmavonyan

The Problem of Thermoelastic Flutter of Closed Cylindrical Shell

In this work, the problem of stability of closed cylindrical shell under the action of non-uniform temperature field and flowing around the shell supersonic gas is considered in a linear formulation. The stability conditions for the unperturbed state of the aérothermoelastic system under consideration are obtained. It is shown that the combined action of the temperature field and the flowing stream can control the process of stability and significantly change the value of the critical velocity of the flutter with the help of the temperature field.

Литература

1. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. – Изв. НАН РА. Механика. 2011. Т. 64. № 4. С. 51-67.
2. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложения в технике. М. Гос-техтеориздат. 1949.
3. Ashley H., Zartarian C. – J. Aeronaut. Sci. V. № 6. 1956.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. Физматгиз. 1961. 339 с.
5. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М. Изд-во АН СССР. 1962. 364 с.
6. Baghdasaryan G.E., Mikilyan M.A. Effects of magnetoelastic interactions in electroconductive plates and shells. Springer. 2016. 279 p.