ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517

С. Л. Гогян[1], Н. В. Срапионян[2]

# Изменение значений функций на множестве малой меры и ряды с монотонными коэффициентами

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 20/II 2019)

**Ключевые слова:** *ряды с монотонными коэффициентами, изменение функций.*

Начиная с первого десятилетия XX в. интенсивными темпами проводились исследования об улучшении свойств функций, при изменении их значений на множестве малой меры. Первые фундаментальные результаты в этом направлении были получены Н. Н. Лузиным в 1912 г. (см [1]). Далее в этом направлении интересные результаты получили Е. Меньшов, А. Талалян, К. Оскольков, Б. Кашин, М. Григорян, О. Церетели и др.

Нашей отправной точкой является работа [2], где рассматривается возможность изменений значений функций на множестве малой меры таким образом, чтобы для полученной функции коэффициенты разложения по системе Хаара были монотонно убывающими, при этом множество, на котором проводилось изменение значений функций, не зависело бы от функции. Были доказаны следующие теоремы.

**Теорема А ([2], теорема 3).** *Каково бы ни было измеримое множество $E, E \subset [0,1]$ с мерой $0 < |E| < 1$, существует функция $f_0 \in L^1(0,1)$ такая, что если некоторая функция $f \in L^1(0,1)$ совпадает с $f_0$ на множестве $E$, то последовательность $\{|c_n(f)|\}_{n=1}^{\infty}$ не может быть монотонно убывающей ($c_n(f)$ – коэффициент разложения при -той функции, нормированной в $L^1(0,1)$ системе Хаара).*

В той же работе доказана следующая теорема.

**Теорема Б ([2], теорема 4).** *Для любого $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$, существует измеримое множество $E, E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти $\tilde{f}, \tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающую с $f$ на $E$, такую, что все ненулевые члены в последовательности $\{c_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке.*

Как видно из этих теорем, функцию можно модифицировать таким образом, чтобы ненулевые члены ряда коэффициентов по системе Хаара были расположены в убывающем порядке, однако невозможно добиться этого для всей последовательности.

В данной работе мы показываем, что существует базис, для которого верна следующая теорема.

**Теорема 1**. *Существует нормированный в* $L^1(0,1)$ *базис* $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такой, что для любого* $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$, *существует измеримое множество* $E, E \subset [0,1]$ *с мерой* $|E| > 1-\epsilon$ *такое, что для любой функции* $f \in L^1(0,1)$ *можно найти функцию* $\tilde{f}, \tilde{f} \in L^1(0,1)$, *которая совпадает с* $f$ *на множестве* $E$ *и для которой все члены последовательности* $\{c_n(f,\Psi)\}_{n=1}^{\infty}$ *расположены в убывающем порядке.*

**Основная лемма и идея доказательства теоремы.** Базис, который обладает свойством теоремы 1, был построен в работе [3] для случая, когда последовательность $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ растет очень быстро, например $M_i = 2^{2^i}$.

Разделим систему Хаара на две подпоследовательности $\{b_i\}$ и $\{\phi_i\}$, причем $b_i = h_i^{(2)}$ при $i = 1,2,3, \ldots$ Положим также $N_0 = 0$ и $N_i = \sum_{k=1}^{i} 2^{2^k}$. В [2] рассматривается система функций $F = \left\{\left\{f_{(i,j)}\right\}_{j=0}^{M_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$, которая определяется следующим образом:

$$f_{(i,0)} = \phi_i - \frac{1}{M_i+1} \sum_{N_{i-1}+1 \le k \le N_i} b_k,$$

$$f_{(i,j)} = f_{(i,0)} + b_{N_{i-1}+j}, \quad j = 1,2,\ldots,M_i\,.$$

В работе [2] отмечено, что система $\left\{f_{(i,j)}\right\}$ является базисом в $L^1(0,1)$. Отметим свойства системы $F$ и чисел $M_i$, которые используются в дальнейшем:

$$2 \le \|f_{(i,j)}\| \le 3,$$

$$\phi_i = \frac{1}{M_i+1} \sum_{j=0}^{M_i} f_{(i,j)},$$

$$\sum_{j=1}^{i} \frac{M_j}{M_{i+1}} < \frac{2}{M_i} < 2^{-i}\,.$$

С помощью этих аргументов становится возможным доказать лемму, которая является усиленной версией леммы 1 из [2].

**Лемма 1.** *Пусть даны числа* $i \in N, \gamma \neq 0, \delta > 0, \nu, q \ge 1, \epsilon > 0$ *и двоичный интервал*

$$\Delta = \left(\frac{i-1}{2^\nu}, \frac{i}{2^\nu}\right), \quad 1 \le i \le 2^\nu,$$

где $\Delta \cap [0,\epsilon] = \emptyset$. Тогда существуют измеримое множество $E, E \subset \Delta$, натуральное число $k, k > i$ и полином по системе $F$

$$Q = \sum_{j=N_i}^{N_k} \sum_{0 \le s \le M_j} a_{(j,s)} f_{(j,s)}$$

такие, что

1) $|E| \geq (1 - 2^{-q})|\Delta|$,
2) $\gamma - \epsilon < Q(t) < \gamma + \epsilon$ для всех $t, t \in E$,
3) $-\epsilon < Q(t) < \epsilon$ для всех $t, t > \epsilon, t \notin \Delta$,
4) $\int_{\epsilon}^{1} |Q(t) dt \leq 2|\gamma| \cdot |\Delta|(1 + \epsilon)$,
5) последовательность $a_{(j,s)}$ постоянна относительно второго индекса и монотонно убывающая относительно первого индекса,
6) $$\left\| \sum_{j=N_i}^{A} \sum_{0 \leq s \leq M_j} a_{(j,s)} f_{(j,s)} + \sum_{0 \leq s \leq B} a_{(A+1,s)} f_{(A+1,s)} \right\| \leq 3\|Q\|$$

для всех $N_i \leq A \leq N_k - 1, 0 \leq B \leq M_A$.

С применением утверждений леммы 1, а также техники, описанной в работе [2], доказывается теорема 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18-1A081

[1] Институт математики НАН РА

[2] Ереванский государственный университет

e-mail: gogyan@instmath.sci.am, nerses.srapionyan@gmail.com

**С. Л. Гогян, Н. В. Срапионян**

## Изменение значений функций на множестве малой меры и ряды с монотонными коэффициентами

Существует нормированный базис в $L^1(0,1)$ такой, что для любого положительного $\epsilon$ существует множество $E$, $|E| \leq \epsilon$, такое, что значения любой функции из $L^1(0,1)$ можно изменить на множестве $E$ таким образом, чтобы последовательность коэффициентов разложения полученной функции по данному базису была монотонно убывающей.

**Ս. Լ. Գոգյան, Ն. Վ. Սրապիոնյան**

## Փոքր չափի բազմության վրա ֆունկցիաների արժեքների փոփոխում և մոնոտոն գործակիցներով շարքեր

Գոյություն ունի $L^1(0,1)$-ում նորմավորված բազիս, որ ցանկացած $\epsilon$ դրական թվի համար գոյություն ունի $E$ չափելի բազմություն, $|E| \leq \epsilon$, որ $L^1(0,1)$-ից ցանկացած ֆունկցիայի արժեքները $E$ բազմության վրա հնարավոր է փոխել այնպես, որ ստացված ֆունկցիայի վերլուծության գործակիցներն ըստ մեր բազիսի լինեն դասավորված նվազման կարգով:

**S. L. Gogyan, N. V. Srapionyan**

## Modifications of Values of Functions on a Set of Small Measure and Series with Monotone Coefficients

There exists a normalized basis in $L^1(0,1)$ such, that for every positive $\epsilon$ there exists a set $E, |E| \leq \epsilon$ such, that the values of any function from $L^1(0,1)$ can be changed on $E$ in such a way, that the sequence of coefficients of that function by our basis is monotone decreasing.

### Литература

1. *Лузин Н. Н.* – Мат. сборник. 1912. Т. 28. С. 266–294.
2. *Gogyan S., Grigoryan M.* – Anal. Math. 2006. V. 32. № 1. P. 49-80.
3. *Gogyan S.* – Proceedings of the YSU. Physical and Mathematical Sciences. 2016. V. 239. № 1. P. 3-6.