ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 118 2018 № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

В. М. Белубекян

Условия появления локализованной неустойчивости пластин на упругом основании

(Представлено чл.-кор. НАН РА А. А. Аветисяном 9/XI 2018)

Ключевые слова: *прямоугольная пластинка, устойчивость, локализация, упругое основание.*

По существу явление локализованной в окрестности свободного края неустойчивости сжатой прямоугольной пластинки было установленно А. Ю. Ишлинским [1] в 1954 г. В 1960 г. Ю. К. Коненков [2] доказал существование локализованных в окрестности свободного края пластинки изгибных колебаний. Эти две задачи оказались аналогичными задачами на собственные значения. В частности они приводятся к одинаковым уравнениям для определения собственных значений [3, 4].

Локализованная неустойчивость упругой изотропной полубесконечной пластины-полосы на упругом основании была рассмотрена в [5]. Аналогичная задача для изгибных колебаний ортотропной пластинки исследована в [6]. В реальности должны решаться задачи, когда край пластинки, противоположный свободному краю, закреплен (поперечное перемещение равно нулю). Тогда возникает вопрос: при каком удалении закрепления от свободного края появляется локализованная неустойчивость (или локализованные изгибные колебания).

1. Пластинка на упругом основании. Тонкая упругая изотропная пластинка в прямоугольной декартовой системе координат занимает область: $0 \le x \le a, 0 \le y \le b, -h \le z \le h$. Предполагается, что пластинка предварительно равномерно сжата по кромкам $y = 0$ и $= b$, а по лицевой поверхности $z = -h$ скреплена с упругим основанием. Уравнение устойчивости пластинки, полученное на основе гипотезы Кирхгофа, имеет вид [7, 8]

$$D\Delta^2 w + p\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4k^4 w = 0, \quad D = \frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}. \qquad (1.1)$$

Здесь D – жесткость пластинки на изгиб, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, p – усилие сжатия пластинки, $4k^4$ – коэффициент влияния основания по Винклеру, Δ – двумерный оператор Лапласа. Принимается, что края пластинки под действием сжимающей нагрузки свободно оперты:

$$w=0, \partial^2 w / \partial y^2 = 0 \text{ , при } \quad y=0,b. \tag{1.2}$$

Край пластинки $x=0$ свободен, что согласно теории Кирхгофа требует равенства нулю изгибающего момента (M_x) и обобщенного перерезывающего усилия $(\tilde{N}_x)$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]=0 \text{ при } \quad x=0. \tag{1.3}$$

Для четвертой кромки пластинки $x=a$ будут рассмотрены различные варианты граничных условий.

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.3), представляется в виде

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} W_n(x)\sin\lambda_n y, \;\; \lambda_n = n\pi / b \; . \tag{1.4}$$

Подстановка (1.4) в уравнение (1.1) приводит к решению последовательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение которых представляется следующим образом:

$$W_n = A_n sh\lambda_n p_1 x + B_n ch\lambda_n p_1 x + C_n sh\lambda_n p_2 x + D_n ch\lambda_n p_2 x \, , \tag{1.5}$$

где

$$p_1=\left(1+\sqrt{\eta_n^2-\xi_n^2}\right)^{1/2} \;\; p_2=\left(1-\sqrt{\eta_n^2-\xi_n^2}\right)^{1/2},$$

$$\eta_n^2=\frac{p}{D\lambda_n^2}, \qquad \xi_n^2=\frac{4k^2}{D\lambda_n^4}. \tag{1.6}$$

Требуя, чтобы решение (1.5), удовлетворяло условиям свободной кромки (1.3), получаем связи между произвольными постоянными B_n и D_n, A_n и C_n.

$$B_n=-\frac{p_2^2-\nu}{p_1^2-\nu}D_n \, , \qquad A_n=-\frac{p_2\left(p_2^2-2+\nu\right)}{p_1\left(p_1^2-2+\nu\right)}C_n \, . \tag{1.7}$$

2. Условия на четвертой кромке пластинки. Пусть четвертая сторона пластинки жестко закреплена. Тогда имеют место граничные условия

$$w=0, \; \partial w / \partial x = 0 \; , \qquad \text{при} \quad x=a \, . \tag{2.1}$$

Подстановка решения (1.4) с учетом (1.5), (1.7) в граничные условия (2.1) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_n, D_n :

$$\left[sh\lambda_n p_2 a-\frac{p_2\left(p_2^2-2+\nu\right)}{p_1\left(p_1^2-2+\nu\right)}sh\lambda_n p_1 a\right]C_n\left(ch\lambda_n p_2 a-\frac{p_2^2-\nu}{pp_1^2-\nu}ch\lambda_n p_1 a\right)D_n=0\, ,$$

$$p_2\left(ch\lambda_n p_2 a-\frac{p_2^2-2+\nu}{p_1^2-2+\nu}ch\lambda_n p_1 a\right)C_n+\left(p_2 sh\lambda_n p_2 a-p_1\frac{p_2^2-\nu}{p_1^2-\nu}ch\lambda_n p_1 a\right)D_n=0. \quad (2.2)$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (2.2) после некоторых преобразований приводится к уравнению

$$p_1 p_2\left[\left(p_2^2-\nu\right)\left(p_1^2-2+\nu\right)+\left(p_1^2-\nu\right)\left(p_2^2-2+\nu\right)\right]\left(1-ch\lambda_n p_1 a ch\lambda_n p_2 a\right)-$$
$$-\left[p_1^2\left(p_2^2-\nu\right)\left(p_1^2-2+\nu\right)+p_2^2\left(p_1^2-\nu\right)\left(p_2^2-2+\nu\right)ch\lambda_n p_1 a ch\lambda_n p_2 a\right]=0. \quad (2.3)$$

Из (2.3) в пределе $\lambda_n p_i a\to\infty$ (удлиненная пластинка) получается уравнение

$$\left(p_1-p_2\right)^2\left[p_1^2 p_2^2+2\left(1-\nu\right)p_1 p_2-\nu^2\right]=0, \quad (2.4)$$

откуда равенство нулю выражения в квадратных скобках совпадает как с уравнением, определяющим критическое напряжение потери устойчивости [3-5], так и с уравнением локализованных колебаний задачи Коненкова [2]. Указанное уравнение имеет корень, удовлетворяющий условию

$$\xi_n^2<\eta_n^2<1+\xi_n^2, \quad (2.5)$$

что указывает на существование локализованной неустойчивости в окрестности свободного края $x=0$.

Естественно ставить вопрос: когда появляется решение, удовлетворяющее условию (2.5) в зависимости от параметра $\lambda_1 a$? Если подставить в уравнение $\eta_n^2=1+\xi_n^2$ предельное значение из интервала (2.5), то получится уравнение относительно $\lambda_n a$

$$2\nu\left(2-\nu\right)+\left[\nu^2+\left(2-\nu\right)^2\right]ch\sqrt{2}\lambda_n a-\nu^2\sqrt{2}\lambda_n a sh\sqrt{2}\lambda_n a=0. \quad (2.6)$$

Если обозначить корень уравнения (2.6) при $n=1\left(\lambda_1 a\right)_*$ то очевидно, что решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условию (2.5), будет при $\lambda_1 a>\left(\lambda_1 a\right)_*$ Так как корень $\left(\lambda_1 a\right)_*$ оказывается достаточно большим, из уравнения (2.5) получается приближенное условие появления локализованной неустойчивости

$$\lambda_1 a>\frac{\left(2-\nu\right)^2+\nu^2}{\sqrt{2}\nu^2}. \quad (2.7)$$

Условие (2.7) совпадает с условием появления локализованных изгибных колебаний с аналогичными граничными условиями (1.2), (1.3), (2.1) [9].

В случае второго варианта граничных условий (свободное опирание)

$$w=0 \quad \partial^2 w/\partial x^2=0 \qquad \text{при } x=a. \quad (2.8)$$

подстановка (1.4) с учетом (1.5) приводит к следующим связям между произвольными постоянными:

$$B_n=-A_n th\lambda_n p_1 a, \; D_n=-C_n th\lambda_n p_2 a. \quad (2.9)$$

Выражения (2.9) вместе с выражениями (1.7) составляют однородную алгебраическую систему уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n, C_n и D_n. Равенство нулю детерминанта приводит к следующему уравнению:

$$p_2\left(p_1^2-\nu\right)\left(p_2^2-2+\nu\right)th\lambda_n p_1 a-p_1\left(p_2^2-\nu\right)\left(p_1^2-2+\nu\right)th\lambda_n p_2 a=0. \qquad (2.10)$$

Из уравнения (2.10) в пределе $\lambda_n p_i a \to \infty$ получается уравнение

$$\left(p_1-p_2\right)\left[p_1^2 p_2^2+2\left(1-\nu\right)p_1 p_2-\nu^2\right]=0. \qquad (2.11)$$

Итак, как и в предыдущем случае, получается известное уравнение задачи Коненкова. Уравнение (2.10) имеет корень $\eta_n^2=1+\xi_n^2 \quad \left(p_2 \to 0\right)$. Делением уравнения (2.10) на p_2 и предельным переходом $\eta_n^2 \to 1+\xi_n^2 \quad \left(p_2 \to 0\right)$ получается уравнение

$$\left(2-\nu\right)^2 th\sqrt{2}\lambda_n a-\sqrt{2}\lambda_n \nu^2 a=0\,. \qquad (2.12)$$

Из уравнения (2.12) определяется корень $\left(\lambda_1 a\right)_*$ превышение которого приводит к решению, удовлетворяющему условию (2.5) существования локализованной неустойчивости. В приближении $th\sqrt{2}\lambda_1 a \approx 1$ получается условие

$$\lambda_1 a>\frac{\left(2-\nu\right)^2}{\sqrt{2}\nu^2}\,, \qquad (2.13)$$

что также совпадает с аналогичным условием существования локализованных изгибных колебаний [9]. Условия (2.13) для задачи локализованной неустойчивости прямоугольной пластинки без упругого основания впервые было установлено П. Е. Товстиком [10].

Институт механики НАН РА

В. М. Белубекян

Условия появления локализованной неустойчивости пластин на упругом основании

Исследовано явление локализованной неустойчивости продольно-сжатой пластинки на упругом винклеровском основании. Определены условия возникновения локализованной неустойчивости в зависимости от геометрии пластинки. Показано, что полученные условия в предельных случаях совпадают с ранее полученными другими авторами условиями возникновения локализованных колебаний и локализованной неустойчивости в тонких пластинках.

Վ. Մ. Բելուբեկյան

Առաձգական հիմքի վրա սալերում տեղայնացված անկայունության առաջացման պայմանները

Ուսումնասիրված է տեղայնացված անկայունության երևույթը երկայնորեն սեղմված առաձգական ուղղանկյուն սալում, որը տեղադրված է առաձգական հիմքի վրա՝ հետևելով հայտնի Է. Վինկլերի մոդելին: Որոշված են տեղայնացված անկայունության առաջացման պայմանները՝ սալի երկրաչափությունից կախված: Ցույց է տրված, որ

ստացված պայմանները հայտնի սահմանային դեպքերում համընկնում են այլ հեղինակների կողմից նախկինում ստացված բարակ սալերում տեղայնացված տատանումների և տեղայնացված անկայունության առաջացման պայմանների հետ:

V. M. Belubekyan

Conditions of Arising of Localized Instability in Plates on Elastic Basement

Localized instability of rectangular elastic longitudinally compressed plates on Winkler foundation is investigated. Conditions of arising of localized instability are established in dependence of geometry of the plate. It is shown that in known limit cases the established conditions coincide with conditions of arising localized vibrations and localized instability in thin plates established earlier by other authors.

Литература

1. *Ишлинский А. Ю.* – ДАН СССР. 1954. Т.95. № 3. С. 477-479.
2. *Коненков Ю. К.* – Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 1. С. 124-126.
3. *Белубекян М. В.* В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван. Изд-во ЕГУ. 1997. С. 95-99.
4. *Белубекян М. В., Чил-Акопян Э. О.* – Изв. НАН Армении, Механика. 2004. Т. 57. № 2. С 34-39.
5. *Белубекян В.М., Чил-Акопян Э. О.* В. сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред (Тр. VII. междунар. конф. Горис – Степанакерт). Ереван, Ин-т механики НАН РА. 2011. С. 85-89.
6. *Althobaiti S., Prikazchikov D.A.* – Изв. НАН Армении, Механика. 2016. № 1. P. 16-24.
7. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит. 1960. 492 с.
8. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е.* – Изв. РАН МТТ. 2010. № 4. С. 30-42
9. *Белубекян М. В.* В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела, посвященного 95-летию С. А. Амбарцумяна. Ереван. Гитутюн. 2017. С. 93-98.
10. *Товстик П. Е.* Устойчивость тонких оболочек. (Аналитические. методы). М. Наука. 1995. 320 с.