ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 118 2018 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

К интерпретации теории армированных (слоистых) упругих сред как моментной теории упругости

(Представлено 12/IX 2018)

Ключевые слова: *армированный, слоистый, упругая среда, структурно-континуальные теории, моментная теория.*

Введение. В работах В. В. Болотина [1-3] построены структурные теории для тел из однородного изотропного упругого материала, армированного тонкими упругими плоскими параллельными пластинками повышенной жесткости или тонкими упругими стержнями повышенной жесткости. В предположении, что число армирующих элементов достаточно велико, в работах [4, 5] на основе принципа «размазывания» с помощью предельного перехода построены континуальные теории для рассмотренных армированных материалов, с весьма существенным заключением, что полученные уравнения в перемещениях в общих чертах (т.к. они содержат четвертые производные от перемещений) аналогичны уравнениям моментной теории упругости Фойхта – Коссера или ее обобщений, причем построенные теории армированных сред трактуются как структурно обоснованные реализации теории Фойхта – Коссера. В работах [4, 5] остается открытым вопрос: в конкретном случае армирования о какой конкретной модели Фойхта – Коссера идет речь. В данной работе, развивая идеи В. В. Болотина, для случая, когда армирующие элементы представляют собой тонкие упругие плоские параллельные пластинки, построена конкретная модель моментной теории упругости со стесненным вращением, которая идентична континуальной теории армированного таким образом материала.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плиту, состоящую из n упругих однородных слоев с постоянной толщиной $h_{(k)}\left(k=1,2,...,n\right)$ и чередующихся с ними $n-1$ упругих однородных слоев с постоянной толщиной $h_{[k]}\left(\left[k\right]=1,2,...,n-1\right)$. Изложим кратко построение структурной теории этой плиты, следуя работам [1-3]. Будем считать, что слои, входящие в первую группу, жесткие и каждый из них следует гипотезе Кирхгофа – Лява:

$$u_i^{(k)}\left(x_1,x_2,z^{(k)}\right)=v_i^{(k)}\left(x_1,x_2\right)-z^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x_i}\left(i=1,2\right),$$
$$u_3^{(k)}\left(x_1,x_2,z^{(k)}\right)=w^{(k)}\left(x_1,x_2\right). \qquad (1.1)$$

Здесь $u_i^{(k)},u_3^{(k)}\left(i=1,2\right)-$ тангенциальные и нормальное перемещения в любой точке $\left(x_1,x_2,z^{(k)}\right)$ $\left(k\right)-$го жесткого слоя, $v_i^{(k)}\left(i=1,2\right)-$ тангенциальные перемещения срединной плоскости $\left(z^{(k)}=0\right),w^{(k)}-$ прогиб этого слоя (координатная плоскость x_1x_2 является или внутренней плоскостью какого-либо слоя или плоскостью контакта слоев, $z^{(k)}-$отсчитывается от срединной плоскости $\left(k\right)$-го жесткого слоя).

Деформации и напряжения в $\left(k\right)$-м жестком слое определяются формулами:

$$\varepsilon_{11}^{(k)}=\gamma_{11}^{(k)}+z^{(k)}\chi_{12}^{(k)},\quad \varepsilon_{22}^{(k)}=\gamma_{22}^{(k)}+z^{(k)}\chi_{21}^{(k)},$$
$$\varepsilon_{12}^{(k)}=\varepsilon_{21}^{(k)}=\gamma_{12}^{(k)}+z^{(k)}\chi_{11}^{(k)}=\gamma_{21}^{(k)}+z^{(k)}\chi_{22}^{(k)}, \qquad (1.2)$$
$$\sigma_{11}^{(k)}=\tilde{\sigma}_{11}^{(k)}+z^{(k)}\mu_{12}^{(k)},\quad \sigma_{22}^{(k)}=\tilde{\sigma}_{22}+z^{(k)}\mu_{21}^{(k)},$$
$$\sigma_{12}^{(k)}=\sigma_{21}^{(k)}=\tilde{\sigma}_{12}^{(k)}+z^{(k)}\mu_{11}^{(k)}=\tilde{\sigma}_{21}^{(k)}+z^{(k)}\mu_{22}^{(k)}, \qquad (1.3)$$

где

$$\gamma_{11}^{(k)}=\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_1},\quad \gamma_{22}^{(k)}=\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_2},\quad \gamma_{12}=\gamma_{21}=\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_1},\quad \chi_{12}^{(k)}=-\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x_1^2},$$
$$\chi_{21}^{(k)}=-\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x_2^2},\quad \chi_{11}^{(k)}=\chi_{22}^{(k)}=-2\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x_1\partial x_2}, \qquad (1.4)$$

$$\tilde{\sigma}_{11}^{(k)}=\frac{E_{(k)}}{1-\nu_{(k)}^2}\left(\gamma_{11}^{(k)}+\nu_{(k)}\gamma_{22}^{(k)}\right)\left(1\leftrightarrow 2\right),$$
$$\tilde{\sigma}_{12}^{(k)}=\tilde{\sigma}_{21}^{(k)}=G_{(k)}\gamma_{12}^{(k)}=G_{(k)}\gamma_{21}^{(k)},\quad G_{(k)}=\frac{E_{(k)}}{2\left(1+\nu_{(k)}\right)}, \qquad (1.5)$$

$$\mu_{12}^{(k)}=\frac{E_{(k)}}{1-\nu_{(k)}^2}\left(\chi_{12}^{(k)}+\nu_{(k)}\chi_{21}^{(k)}\right)\left(1\leftrightarrow 2\right),$$
$$\mu_{11}^{(k)}=\mu_{22}^{(k)}=\frac{1}{2}G_{(k)}\chi_{11}^{(k)}=\frac{1}{2}G_{(k)}\chi_{22}^{(k)}. \qquad (1.6)$$

Здесь $E_{(k)},\nu_{(k)},G_{(k)}-$модель упругости, коэффициент Пуассона и модуль сдвига материала $\left(k\right)$–го жесткого слоя. Моментные части в напряжениях (1.3) нами специально обозначены через $\mu_{12}^{(k)},\mu_{21}^{(k)},\mu_{11}^{(k)}\mu_{22}^{(k)}$ (отметим, что в индексах этих величин первый индекс показывает нормаль к сечению, а второй – направление вектора момента).

Потенциальная энергия деформаций во всех жестких слоях вместе будет выражатся так:

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{v_{(k)}} U_{(k)}dv_{(k)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{\Omega}\Big[h_{(k)}\left(\tilde{\sigma}_{11}^{(k)}\gamma_{11}^{(k)}+\tilde{\sigma}_{22}^{(k)}\gamma_{22}^{(k)}+\tilde{\sigma}_{12}^{(k)}\gamma_{12}^{(k)}\right)+$$
$$+\frac{h_{(k)}^{3}}{12}\left(\mu_{12}^{(k)}\chi_{12}^{(k)}+\mu_{21}^{(k)}\chi_{21}^{(k)}+\mu_{11}^{(k)}\chi_{11}^{(k)}+\mu_{22}^{(k)}\chi_{22}^{(k)}\right)\Big]dx_1dx_2, \tag{1.7}$$

где Ω – область координатной плоскости x_1x_2.

Если подставить выражения напряжений и моментных напряжений из формул (1.5), (1.6), потенциальная энергия деформации (1.7) будет выражаться через деформации и изгибы-кручения.

Будем считать, что слои, входящие во вторую группу, мягкие и для каждого из этих слоев все компоненты напряжений, кроме $\tau_{13},\tau_{23},\sigma_{33}$, пренебрежимо малы, а перемещения подчиняются линейному закону изменения по толщине этих слоев. Сформулированные допущения для мягких слоев позволяют вырезать параметры напряженно-деформированного состояния $[k]$-го мягкого слоя через перемещения соседних жестких слоев:

$$\gamma_{31}^{[k]}=\gamma_{13}^{[k]}=\frac{v_1^{(k+1)}-v_1^{(k)}}{h_{[k]}}+\frac{c_k''\dfrac{\partial w^{(k+1)}}{\partial x_1}+c_k'\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial x_1}}{h_{[k]}}\quad (1\to 2),$$
$$\varepsilon_{33}^{[k]}=\gamma_{33}^{[k]}=\frac{w^{(k+1)}-w^{(k)}}{h_{[k]}}, \tag{1.8}$$

$$\tau_{13}^{[k]}=\tau_{31}^{[k]}=G_{[k]}\gamma_{13}^{[k]}=G_{[k]}\gamma_{31}^{[k]}\quad (1\to 2),\quad \sigma_{33}^{[k]}=E_{[k]}\gamma_{33}^{[k]}. \tag{1.9}$$

Здесь $G_{[k]},E_{[k]}$ – модуль сдвига и модуль упругости $[k]$-го мягкого слоя,

$$c_k'=\frac{h_{(k)}+h_{[k]}}{2},\quad c_k''=\frac{h_{(k)}+h_{[k+1]}}{2}. \tag{1.10}$$

Потенциальная энергия деформации во всех мягких слоях вместе

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{v_{[k]}} U_{[k]}dv_{[k]}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\iint_{\Omega}\Big[h_{[k]}\left(\tau_{31}^{[k]}\gamma_{31}^{[k]}+\tau_{32}^{[k]}\gamma_{32}^{[k]}+\sigma_{33}^{[k]}\gamma_{33}^{[k]}\right)dx_1dx_2. \tag{1.11}$$

Подставив в (1.11) значения напряжений через формулы (1.9), получим выражение потенциальной энергии деформации (1.11), выраженное через деформации $\gamma_{31}^{[k]},\gamma_{32}^{[k]},\gamma_{33}^{[k]}$.

Сумма выражений (1.7) и (1.11) представит потенциальную энергию деформации плиты в целом.

2. Общий вариационный принцип структурной теории. Для вывода уравнений равновесия и естественных граничных условий в [1-3] применен вариационный принцип Лагранжа. Для получения основных уравнений (уравнений равновесия, физических и геометрических уравнений) и естественных граничных условий, целесообразно применять общий вариационный принцип теории упругости [6] (принцип Ху – Вашицу), функционал которого имеет вид

$$I=\int_v\left[W\left(\varepsilon_{pq}\right)-X_p u_p\right]dv-\int_v\sigma_{pq}\left[\varepsilon_{pq}-\frac{1}{2}\left(u_{p,q}+u_{q,p}\right)\right]dv-\int_\Sigma F_p^* u_p d\Sigma. \qquad (2.1)$$

Здесь $W\left(\varepsilon_{pq}\right)$ – плотность потенциальной энергии деформации, выраженная через деформации, X_p – массовые силы, F_p^* – поверхностные усилия, v – область тела, Σ – его полная поверхность; $p,q=1,2,3.$

Для изучаемой задачи функционал (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
I=&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_\Omega\Bigg\{\frac{E_{(k)}h_{(k)}}{1-\nu_{(k)}^2}\left[\left(\gamma_{11}^{(k)}\right)^2+\left(\gamma_{22}^{(k)}\right)^2+2\nu_{(k)}\gamma_{11}^{(k)}\gamma_{22}^{(k)}+\frac{1}{2}\left(1-\nu_{(k)}\right)\left(\gamma_{12}^{(k)}\right)^2\right]+\\
&+\frac{E_{(k)}h_{(k)}^3}{12\left(1-\nu_{(k)}^2\right)}\left[\left(\chi_{12}^{(k)}\right)^2+\left(\chi_{21}^{(k)}\right)^2+2\nu_{(k)}\chi_{12}^{(k)}\chi_{21}^{(k)}+\frac{1}{4}\left(1-\nu_{(k)}\right)\left(\chi_{11}^{(k)}\right)^2+\right.\\
&\left.+\frac{1}{4}\left(1-\nu_{(k)}\right)\left(\chi_{22}^{(k)}\right)^2\right]\Bigg\}dx_1dx_2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\iint_\Omega\left\{G_{[k]}h_{[k]}\left[\left(\gamma_{31}^{(k)}\right)^2+\left(\gamma_{32}^{(k)}\right)^2\right]+\right.\\
&\left.+E_{[k]}h_{[k]}\left(\gamma_{33}^{(k)}\right)^2\right\}dx_1dx_2-\sum_{k=1}^{n}\iint_\Omega\left[h_{(k)}\left(\tilde\sigma_{11}^{(k)}\gamma_{11}^{(k)}+\tilde\sigma_{22}^{(k)}\gamma_{22}^{(k)}+\tilde\sigma_{12}^{(k)}\gamma_{12}^{(k)}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{h_{(k)}^3}{12}\left(\mu_{12}^{(k)}\chi_{12}^{(k)}+\mu_{21}^{(k)}\chi_{21}^{(k)}+\mu_{11}^{(k)}\chi_{11}^{(k)}+\mu_{22}^{(k)}\chi_{22}^{(k)}\right)\right]dx_1dx_2-\\
&-\sum_{k=1}^{n-1}\iint_\Omega h_{[k]}\left(\tau_{31}^{[k]}\gamma_{31}^{[k]}+\tau_{32}^{[k]}\gamma_{32}^{[k]}+\sigma_{33}^{[k]}\gamma_{33}^{[k]}\right)dx_1dx_2+ \qquad (2.2)\\
&+\sum_{k=1}^{n}\iint_\Omega\left\{h_{(k)}\left[\tilde\sigma_{11}^{(k)}\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_1}+\tilde\sigma_{22}^{(k)}\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_2}+\tilde\sigma_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_1}\right)\right]-\right.\\
&\left.-\frac{h_{(k)}^3}{12}\left[\mu_{12}^{(k)}\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x_1^2}+\mu_{21}^{(k)}\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x_2}+\mu_{11}^{(k)}2\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x_1\partial x_2}\right]\right\}dx_1dx_2+\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}\iint_\Omega h_{[k]}\left\{\tau_{31}^{[k]}\left[\frac{v_1^{(k+1)}-v_1^{(k)}}{h_{[k]}}+\frac{c_k''\dfrac{\partial w^{(k+1)}}{\partial x_1}+c_k'\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial x_1}}{h_{[k]}}\right]+\right.\\
&\left.+\tau_{32}^{[k]}\left[\frac{v_2^{(k+1)}-v_2^{(k)}}{h_{[k]}}+\frac{c_k''\dfrac{\partial w^{(k+1)}}{\partial x_2}+c_k'\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial x_2}}{h_{[k]}}\right]+\sigma_{33}^{[k]}\frac{w^{(k+1)}-w^{(k)}}{h_{[k]}}\right\}dx_1dx_2-\\
&-\sum_{k=1}^{n}\iint_\Omega\left(q_1^{(k)}v_1^{(k)}+q_2^{(k)}v_2^{(k)}+q_3^{(k)}w^{(k)}\right)dx_1dx_2-\\
&-\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_l\left[\left(\overset{0}{T}{}_{11}^{(k)}v_1^{(k)}+\overset{0}{S}{}_{12}^{(k)}v_2^{(k)}-\overset{0}{L}{}_{12}^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x_1}-\overset{0}{N}{}_{13}^{(k)}w^{(k)}\right)dx_2-\right.\right.
\end{aligned}$$

$$-\left(\overset{0}{S}{}_{21}^{(k)}\, v_1^{(k)} + \overset{0}{T}{}_{22}^{(k)}\, v_2^{(k)} - \overset{0}{L}{}_{21}^{(k)}\, \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x_2} - \overset{0}{N}{}_{23}^{(k)}\, w^{(k)}\right) dx_1 \Bigg]\Bigg\}.$$

Составив вариационное уравнение

$$\delta I = 0, \tag{2.3}$$

где I определяется выражением (2.2), а также вариации по всем функциональным аргументам, придем к физическим соотношениям упругости (1.5), (1.6), (1.9), геометрическим соотношениям (1.4), (1.8) и следующим уравнениям равновесия:

$$\begin{gathered}
h_{(k)} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}^{(k)}}{\partial x_1} + h_{(k)} \frac{\partial \tau_{12}^{(k)}}{\partial x_2} + \tau_{31}^{[k]} - \tau_{31}^{[k-1]} = -q_1^{(k)}, \\
h_{(k)} \frac{\partial \tau_{21}^{(k)}}{\partial x_1} + h_{(k)} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{22}^{(k)}}{\partial x_2} + \tau_{32}^{[k]} - \tau_{32}^{[k-1]} = -q_2^{(k)}, \\
\frac{h_{(k)}^3}{12}\left(\frac{\partial^2 \mu_{12}^{(k)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mu_{21}^{(k)}}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 \mu_{11}^{(k)}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial^2 \mu_{22}^{(k)}}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \left(c_k' \frac{\partial \tau_{31}^{[k]}}{\partial x_1} + c_k'' \frac{\partial \tau_{31}^{[k-1]}}{\partial x_1}\right) + \\
+\left(c_k' \frac{\partial \tau_{32}^{[k]}}{\partial x_2} + c_k'' \frac{\partial \tau_{32}^{[k-1]}}{\partial x_2}\right) + \sigma_{33}^{[k]} - \sigma_{33}^{[k-1]} = -q_3^{(k)},
\end{gathered} \tag{2.4}$$

$(k) = 1, 2, ..., n; \quad [k] = 1, 2, ..., n-1.$

Из вариационного уравнения (2.3) вытекают также естественные граничные условия рассматриваемой задачи, которые, например, для края $x_1 = const$ имеют вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{E}_{(k)} h_{(k)}}{1-\nu_{(k)}^2}\left(\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_1} + \nu_{(k)} \frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_2}\right) = \overset{0}{T}{}_{11}^{(k)}, \qquad \frac{\mathrm{E}_{(k)} h_{(k)}}{2\left(1+\nu_{(k)}\right)}\left(\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_1}\right) = \overset{0}{S}{}_{12}^{(k)}, \\
\frac{\mathrm{E}_{(k)} h_{(k)}^3}{12\left(1-\nu_{(k)}^2\right)}\left(\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x_1^2} + \nu_{(k)} \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x_2^2}\right) = \overset{0}{L}{}_{12}^{(k)}, \\
D_{(k)}\left[\frac{\partial^3 w^{(k)}}{\partial x_1^3} + \left(2-\nu_{(k)}\right)\frac{\partial^3 w^{(k)}}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right] - \frac{G_{[k]}}{h_{[k]}} c_k' \left(v_1^{(k+1)} - v_1^{(k)} + c_k' \frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial x_1} + c_k'' \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x_1}\right) - \\
-\frac{G_{[k-1]}}{h_{[k-1]}} c_k'' \left(v_1^{(k)} - v_1^{(k-1)} + c_{k-1}' \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x_1} + c_{k-1}'' \frac{\partial w^{(k-1)}}{\partial x_1}\right) = \overset{0}{N}{}_{13}^{(k)}.
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Для решения структурной задачи необходимо для каждого (k) решать систему уравнений (2.4), (1.5), (1.6), (1.9), (1.4), (1.8) с учетом граничных условий (2.5).

Подставив геометрические соотношения (1.4), (1.8) в физические соотношения упругости (1.5), (1.6), (1.9), а последние в уравнения равновесия (2.4), придем к системе дифференциальных уравнений в перемещениях, которые идентичны аналогичным уравнениям работ [1-3].

3. Континуальная теория слоисто-армированной плиты. В [4, 5] после построения структурной теории поставлена задача упрощения построенной структурной теории слоисто-армированной плиты, когда число армирующих элементов достаточно велико.

Для этой цели введем, как в работах [4, 5], три функции: $v_1(x_1,x_2,z)$, $v_2(x_1,x_2,z)$, $w(x_1,x_2,z)$ такие, что в точках, принадлежащих срединным плоскостям армирующих (т.е. жестких) элементов, они будут приближенно равны соответственно $v_1^{(k)}(x_1,x_2)$, $v_2^{(k)}(x_1,x_2)$, $w^{(k)}(x_1,x_2)$.

Будем предполагать, что функции $v_1(x_1,x_2,z)$, $v_2(x_1,x_2,z)$, $w(x_1,x_2,z)$ непрерывны и дифференцируемы столько раз, сколько это потребуется.

Благодаря использованию множественности армирующих элементов и того обстоятельству, что при переходе от одного армирующего элемента к другому соответствующие функции меняются достаточно медленно, формула для функционала (2.2) допускает дальнейшее упрощение. А именно, первые разности по индексу могут быть приближенно выражены через первые производные по переменной z, вторые – через соответствующие вторые произведения, конечные суммы могут быть аппроксимированы при помощи определенных интегралов в пределах от $-H_1$ до H_2 ($H_1+H_2=H-$ полная толщина плиты).

Поступая указанным образом, функционал (2.2) приближенно можем заменить следующим функционалом:

$$\begin{aligned}
\overline{I} = \int_{\Omega}\int_{-H_1}^{H_2} \frac{1}{2}\Bigg\{ & \frac{E_a h_a}{\left(1-\nu_a^2\right)c}\left[\left(\gamma_{11}\right)^2+\left(\gamma_{22}\right)^2+2\nu_a\gamma_{11}\gamma_{22}+\frac{1}{2}\left(1-\nu_a\right)\left(\gamma_{12}\right)^2\right]+ \\
&+\frac{E_a h_a^3}{12\left(1-\nu_a^2\right)c}\left[\chi_{12}^2+\chi_{21}^2+2\nu_a\chi_{12}\chi_{21}+\frac{1}{4}\left(1-\nu_a\right)\chi_{11}^2+\frac{1}{4}\left(1-\nu_a\right)\chi_{22}^2\right]+ \\
&+\frac{G_c c}{h_c}\left[\left(\gamma_{31}^2\right)+\left(\gamma_{32}^2\right)\right]+\frac{E_c}{\eta(1-\eta)}\left(\gamma_{33}\right)^2\Bigg\}dx_1dx_2dz- \\
-\iint_{\Omega}\int_{-H_1}^{H_2}\Bigg[& \frac{h_a}{c}\left(\sigma_{11}\gamma_{11}+\sigma_{22}\gamma_{22}+\tau_{12}\gamma_{12}\right)+\frac{h_a^3}{12c}\left(\mu_{12}\chi_{12}+\mu_{21}\chi_{21}+\mu_{11}\chi_{11}+\mu_{22}\chi_{22}\right)+ \\
&+\left(\tau_{31}\gamma_{31}+\tau_{32}\gamma_{32}+\sigma_{33}\gamma_{33}\right)\Bigg]dx_1dx_2dz+ \\
+\iint_{\Omega}\int_{-H_1}^{H_2}\Bigg[& \frac{h_a}{c}\left[\sigma_{11}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\sigma_{22}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\tau_{12}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)\right]- \qquad (3.1)\\
&-\frac{h_a^3}{12c}\left(\mu_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\mu_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\mu_{11}2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+\mu_{22}2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\tau_{31}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)+ \\
&+\tau_{32}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+\sigma_{33}\frac{\partial w}{\partial z}\Bigg\}dx_1dx_2dz-\int_{-H_1}^{H_2}\iint_{\Omega}\left(q_1v_1+q_2v_2+q_3v_3\right)\frac{1}{c}dx_1dx_2dz- \\
&-\int_{-H_1}^{H_2}dz\int_{\Gamma}\left[\frac{1}{c}\left(\overset{0}{T}_{11}v_1+\overset{0}{S}_{12}v_2+\overset{0}{N}_{13}w+\overset{0}{L}_{12}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)dx_2+\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{c}\left(\overset{0}{S}_{21} v_1 + \overset{0}{T}_{22} v_2 + \overset{0}{N}_{23} w + \overset{0}{L}_{21}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)dx_1\Bigg].$$

Переход от формулы (2.2) к формуле (3.1) и составляет операцию «энергетического размазывания» [4, 5] или энергетической континуализации.

Примем за основу вариационное уравнение (2.3), когда функционал имеет выражение (3.1); составляя вариации по всем функциональным аргументам, приходим к следующим трем группам уравнений континуальной теории армированной среды:

уравнения равновесия

$$\frac{h_a}{c}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{h_a}{c}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{31}}{\partial z}+\frac{1}{c}q_1=0,$$

$$\frac{h_a}{c}\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{h_a}{c}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{32}}{\partial z}+\frac{1}{c}q_2=0, \tag{3.2}$$

$$\frac{h_a^3}{12c}\left(\frac{\partial^2\mu_{12}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\mu_{21}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\mu_{11}}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\frac{\partial\tau_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}+\frac{1}{c}q_3=0,$$

физические соотношения упругости

$$\sigma_{11}=\frac{E_a}{1-\nu_a^2}\left(\gamma_{11}+\nu_a\gamma_{22}\right)(1\leftrightarrow 2),\quad \tau_{12}=\tau_{21}=\frac{E_a}{2(1+\nu_a)}\gamma_{12},$$

$$\mu_{12}=\frac{E_a h_a^2}{2\left(1-\nu_a^2\right)}\left(\chi_{12}+\nu_a\chi_{21}\right)(1\leftrightarrow 2), \tag{3.3}$$

$$\mu_{11}=\mu_{22}=\frac{E_a h_a^2}{4(1+\nu_a)}\chi_{11}=\frac{E_a h_a^2}{4(1+\nu_a)}\chi_{22},\quad \tau_{31}=\frac{G_c c}{h_c}\gamma_{31}(1\leftrightarrow 2),\quad \tau_{33}=\frac{E_c c}{h_c}\gamma_{33},$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{11}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(1\leftrightarrow 2),\quad \gamma_{12}=\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2},\quad \chi_{12}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(1\leftrightarrow 2),$$

$$\chi_{11}=\chi_{22}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2},\quad \gamma_{31}=\frac{\partial v_1}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}(1\leftrightarrow 2, x\to y),\quad \gamma_{33}=\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{3.4}$$

Если геометрические соотношения (3.4) подставить в физические соотношения (3.3) и последние – в уравнения равновесия, получатся уравнения в перемещениях континуальной теории армированной среды (типа уравнений Ламе теории упругости), которые совпадают с аналогичными уравнениями работ [4, 5]. В эти уравнения перемещения, кроме вторых производных, входят с производными четвертого порядка. Это свидетельствует о том, что здесь имеем дело с моментной теорией упругости со стесненным вращением.

Из составленного выше вариационного уравнения следуют также естественные граничные условия построенной континуальной теории армированной среды (эти граничные условия, выраженные в перемещениях, тоже совпадают с аналогичными граничными условиями работ [4, 5]):

для границы $x_1 = const$:

$$\frac{E_a h_a}{1-\nu_a^2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\nu_a\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)=\overset{0}{T}_{11},\qquad \frac{E_a h_a}{2(1+\nu_a)}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)=\overset{0}{S}_{12},$$

$$\frac{E_a h_a^3}{12\left(1-\nu_a^2\right)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu_a\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)=\overset{0}{L}_{12}, \tag{3.5}$$

$$\frac{G_c c^2}{h_c}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{E_a h_a^3}{12\left(1-\nu_a^2\right)}\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}+\left(2-\nu_a\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial x_2^2}\right]=\overset{0}{N}_{13},$$

для границы при $z=H_2$ и, аналогично, при $z=-H_1$:

$$\tilde{\tau}_{31}=q_1^{\pm},\quad \tilde{\tau}_{32}=q_2^{\pm},\quad \sigma_{33}=q_3^{\pm}. \tag{3.6}$$

Легко убедиться, что если в структурных уравнениях (2.4), (1.5), (1.6), (1.9), (1.4), (1.8) и в граничных условиях (2.5) перейти к пределу, при $k\to\infty$, в пределе получим уравнения (3.2)-(3.4) и граничные условия (3.5), (3.6).

4. Моментная теория упругости со стесненным вращением, заменяющая континуальную теорию армированной слоистой среды. Чтобы ответить на вопрос, какая именно моментная теория упругости заменяет континуальную теорию армированной слоистой среды, напишем уравнения равновесия для общей моментной теории упругости со стесненным вращением [7]:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{31}}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial z}+\tau_{31}-\tau_{13}=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{32}}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\mu_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{31}}{\partial z}+\tau_{32}-\tau_{23}=0, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{33}}{\partial z}+\tau_{21}-\tau_{12}=0,$$

Сравнивая уравнения (4.1) и (3.2), легко убедиться, что прежде всего должны выполняться следующие условия:

$$\tau_{12}=\tau_{21},\quad \mu_{13}=\mu_{31}=\mu_{23}=\mu_{32}=\mu_{33}=0. \tag{4.2}$$

С учетом (4.2) уравнения (4.1) примут вид

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{31}}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{32}}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}=0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{22}}{\partial x_2}+\tau_{31}-\tau_{13}=0,\qquad \frac{\partial\mu_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_2}+\tau_{32}-\tau_{23}=0. \tag{4.4}$$

Продифференцировав уравнение $(4.4)_1$ по x_1, а $(4.4)_2$ – по x_2 и просуммировав полученные уравнения, имея в виду уравнение $(4.4)_3$, получим

$$\frac{\partial^2\mu_{12}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\mu_{21}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\mu_{11}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\mu_{22}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}=0, \tag{4.5}$$

это уравнение, как можно убедиться, совпадает с уравнением $(3.2)_3$.

Таким образом, система уравнений равновесия $(4.3)_1$, $(4.3)_2$ и (4.5) совпадает с системой уравнений (3.2) (только необходимо в модели (4.3)-(4.5) напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ умножить на $\frac{h_a}{c}$, а моментные напряжения – на $\frac{h_a^3}{12c}$).

Для геометрических и физических соотношений построенной модели моментной теории упругости со стесненным вращением необходимо принимать геометрические соотношения (3.4) и физические соотношения (3.3). Для этой модели моментной теории упругости со стесненным вращением выражение (3.1) будет представлять собой общий вариационный функционал этой модели.

Ширакский государственный университет им М. Налбандяна
e-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

К интерпретации теории армированных (слоистых) упругих сред как моментной теории упругости

Использован общий вариационный функционал теории упругости при построении структурной и континуальной теории армированных (слоистых) упругих сред. Построена конкретная частная моментная теория упругости со стесненным вращением, которая адекватна континуальной теории армированной упругой среды. Построен общий вариационный функционал указанной частной теории моментной упругости со стесненным вращением.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Արմավորված (շերտավոր) առաձգական միջավայրի տեսության մեկնաբանությունը՝ որպես առաձգականության մոմենտային տեսություն

Արմավորված (շերտավոր) առաձգական համակարգի կառուցվածքային և կոնտինուալ տեսությունների կառուցման ժամանակ օգտագործվում է առաձգականության տեսության ընդհանուր վարիացիոն ֆունկցիոնալը: Կառուցված է արմավորված առաձգական միջավայրի կոնտինուալ տեսությանը ադեկվատ կաշկանդված պտույտներով առաձգականության մոմենտային տեսության կոնկրետ մասնավոր մոդելը: Կառուցված է կաշկանդված պտույտներով առաձգականության տեսության մասնավոր մոդելի ընդհանուր վարիացիոն ֆունկցիոնալը:

Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

To the Interpretation of the Theory of Reinforced (Layered) Elastic Media as a Moment Theory of Elasticity

In the present paper during the construction of the structural and continual theory of reinforced (layered) elastic media general variation functional of the theory of

elasticity is used. Concrete private moment theory of elasticity with constrained rotation is constructed, which is adequate to the continual theory of reinforced elastic media. General variation functional of the mentioned private theory of moment elasticity with constrained rotation is constructed.

Литература

1. *Болотин В. В.* – Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 3. С. 65-72.
2. *Болотин В. В.* В сб.: Расчеты на прочность. Вып. 11. М. Машиностро-ение. 1965. С. 31-63.
3. *Болотин В.В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М. Машиностроение. 1980. 376 с.
4. *Болотин В.В*. – Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 1. С. 61-66.
5. *Болотин В. В.* – Механика полимеров. 1965. № 2. С. 27-37.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 872 с.
7. *Койтер В. Т.* – Механика. Периодич. сб. перев.иностр. статей. 1965. № 3. С. 89-112.